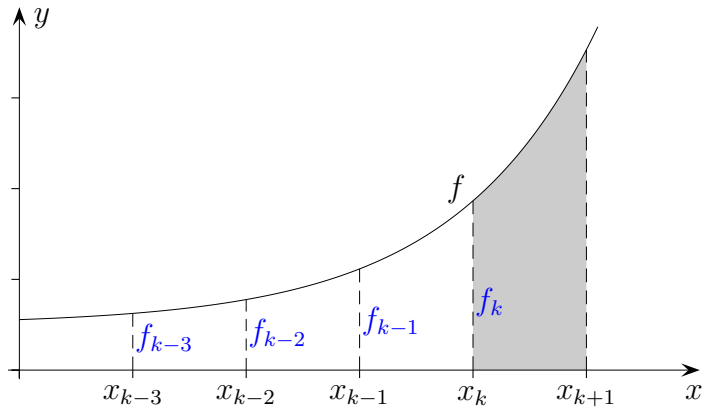


# Adams-Bashforth-Verfahren

$$y' = f(x, y) \quad \text{diskretisiert} \quad y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$



Approximiere  $f$  unter Verwendung der Stützstellen  $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$  mit einem Lagrange-Polynom (hier 3. Grades) und integriere. Jeweils zwei benachbarte Stützstellen haben den Abstand  $h$  zueinander.

Das Interpolationspolynom ist dann:

$$L(x) = f_{k-3} \cdot L_{k-3}(x) + f_{k-2} \cdot L_{k-2}(x) + f_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + f_k \cdot L_k(x)$$

mit z. B.

$$L_k = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-3})} \quad \text{es fehlt } \frac{(x - x_k)}{(x_k - x_k)}$$

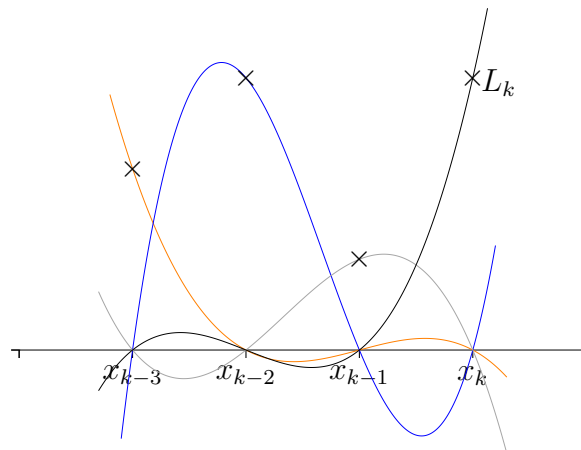
$$L_{k-1} = \frac{(x - x_k)(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})(x_{k-1} - x_{k-3})} \quad \text{es fehlt } \frac{(x - x_{k-1})}{(x_{k-1} - x_{k-1})}$$

Die Polynome können aufgrund ihrer regelmäßigen Struktur sofort angegeben werden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx \\ &= y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f_{k-3} \cdot L_{k-3}(x) + f_{k-2} \cdot L_{k-2}(x) + f_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + f_k \cdot L_k(x)] dx \\ &= y(x_k) + f_{k-3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-3}(x) dx + f_{k-2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-2}(x) dx + f_{k-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-1}(x) dx + f_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x) dx \end{aligned}$$

# Adams-Bashforth-Verfahren



Mit der Schrittweite  $h$  ist z. B. das Polynom 3. Grades mit  $L_k(x_k) = 1$ :

$$L_k = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-3})} = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{h \cdot 2h \cdot 3h}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x) dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{h \cdot 2h \cdot 3h} dx && \text{Substitution } x = x_k + h\xi, dx = h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{(x_k + h\xi - x_{k-1})(x_k + h\xi - x_{k-2})(x_k + h\xi - x_{k-3})}{h \cdot 2h \cdot 3h} h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{(h + h\xi)(2h + h\xi)(3h + h\xi)}{6h^3} h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{h^3(1 + \xi)(2 + \xi)(3 + \xi)}{6h^3} h d\xi \\ &= \frac{h}{6} \int_0^1 (6 + 11\xi + 6\xi^2 + \xi^3) d\xi = \frac{55}{24} h \end{aligned}$$

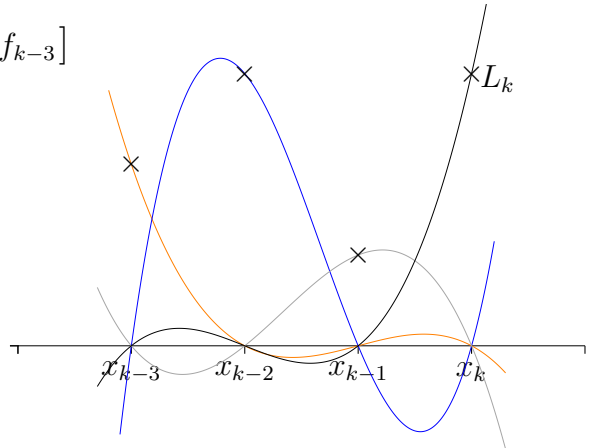
Auf diese Weise ermittelt man auch die anderen Koeffizienten.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} [55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}]$$

Um  $y_{k+1}$  zu ermitteln, benötigt man nur eine Funktionsauswertung von  $f_k = f(x_k, y_k)$ , der rechten Seite der Differentialgleichung. Die anderen Werte liegen schon aufgrund der vorherigen Rechnung vor.

# Adams-Bashforth-Verfahren 3. Grades

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} [55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}]$$



Mit der Schrittweite  $h$  ist

$$L_{k-1} = \frac{(x - x_k)(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})(x_{k-1} - x_{k-3})} = \frac{(x - x_k)(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(-h) \cdot h \cdot 2h}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-1}(x) dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(-h) \cdot h \cdot 2h} dx && \text{Substitution } x = x_k + h\xi, dx = h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{(x_k + h\xi - x_k)(x_k + h\xi - x_{k-2})(x_k + h\xi - x_{k-3})}{(-h) \cdot h \cdot 2h} h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{h\xi(2h + h\xi)(3h + h\xi)}{-2h^3} h d\xi \\ &= \dots = -\frac{59}{24} h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-2}(x) dx &= \int_0^1 \frac{(3h + h\xi)(h + h\xi)h\xi}{h \cdot (-h) \cdot (-2h)} h d\xi \\ &= \dots = \frac{37}{24} h \end{aligned}$$

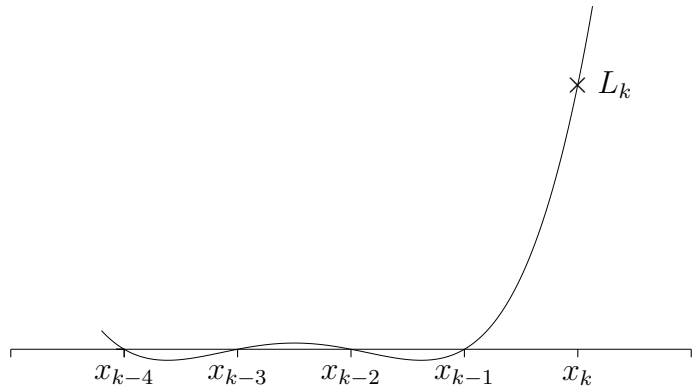
$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-3}(x) dx &= \int_0^1 \frac{(2h + h\xi)(h + h\xi)h\xi}{(-h) \cdot (-2h) \cdot (-3h)} h d\xi \\ &= \dots = -\frac{9}{24} h \end{aligned}$$

# Adams-Bashforth-Verfahren 4. Grades

Interpolationspolynom 4. Grades (5 Stützstellen):

$$L(x) = f_{k-4} \cdot L_{k-4}(x) + f_{k-3} \cdot L_{k-3}(x) + f_{k-2} \cdot L_{k-2}(x) + f_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + f_k \cdot L_k(x)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720} [1901f_k - 2774f_{k-1} + 2616f_{k-2} - 1274f_{k-3} + 251f_{k-4}]$$



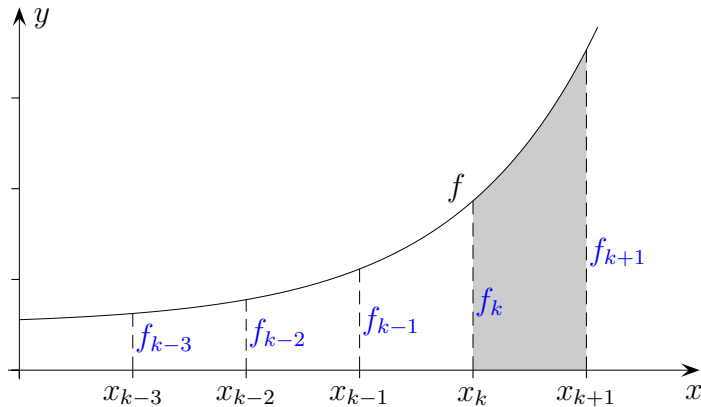
Mit der Schrittweite  $h$  ist z. B.

$$L_k = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})(x - x_{k-4})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-3})(x_k - x_{k-4})} = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})(x - x_{k-4})}{h \cdot 2h \cdot 3h \cdot 4h}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x) dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})(x - x_{k-4})}{24h^4} dx && \text{Substitution } x = x_k + h\xi \\ &= \int_0^1 \frac{(x_k + h\xi - x_{k-1})(x_k + h\xi - x_{k-2})(x_k + h\xi - x_{k-3})(x_k + h\xi - x_{k-4})}{24h^4} h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{(h + h\xi)(2h + h\xi)(3h + h\xi)(4h + h\xi)}{24h^4} h d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{h^4(1 + \xi)(2 + \xi)(3 + \xi)(4 + \xi)}{24h^4} h d\xi \\ &= \frac{h}{24} \int_0^1 (24 + 50\xi + 35\xi^2 + 10\xi^3 + \xi^4) d\xi = \frac{1901}{720} h \end{aligned}$$

# Adams-Moulton-Verfahren

$$y' = f(x, y) \quad \text{diskretisiert} \quad y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$



Wir befinden uns an der Stelle  $x_k$ .

Um  $f$  auf dem Intervall  $[x_k, x_{k+1}]$  zu approximieren, wurden bisher nur zurückliegende Stützstellen verwendet. Die Verwendung von  $f_{k+1}$  verspricht eine Verbesserung.

Für ein Lagrange-Polynom 3. Grades (4 Stützstellen  $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ ) führt dies auf

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} [9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}],$$

für 4. Grades (5 Stützstellen  $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ ) auf

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720} [251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}].$$

Zur Funktionsauswertung von  $f_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$  ist leider  $y_{k+1}$  erforderlich.

Es ähnelt der Situation, sich am eigenen Schopf aus dem Sumpf zu ziehen. Hier gelingt das.

$y_{k+1}$  wird zunächst mit dem Adams-Bashforth-Verfahren geschätzt (vorausgesagt engl. predicted), z.B. (Grad 2)

$$y_{k+1}^{(P)} = y_k + \frac{h}{12} [23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}]$$

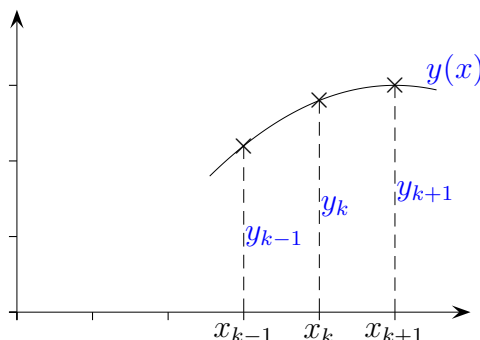
und dann mit dem Adams-Moulton-Verfahren verbessert (Prädiktor-Korrektor-Methode), z.B. (Grad 3)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} [9f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(P)}) + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}].$$

Wird an der Stelle  $x_k$  auch  $f_{k+1}$  verwendet, ist das Verfahren *implizit*, sonst *explizit*.

# BDF-Verfahren Backward-Differential-Formulae

$$y' = f(x, y)$$



Wir befinden uns an der Stelle  $x_k$ , haben die Werte  $y_k, y_{k-1}$  usw. ermittelt und suchen  $y_{k+1}$ . Zuerst stellen wir (z. B.) mit 3 Stützstellen  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  und den Stützwerten  $y_{k-1}, y_k, y_{k+1}$  das Lagrange-Polynom 2. Grades auf.

$$L(x) = y_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + y_k \cdot L_k(x) + y_{k+1} \cdot L_{k+1}(x)$$

$L(x)$  approximiert nun also  $y(x)$ .

An der Stelle  $x_{k+1}$  sollte dann  $L'(x_{k+1}) = f(x_{k+1}, y_{k+1})$  gelten, wegen  $y' = f(x, y)$ .

Aus dieser Gleichung kann  $y_{k+1}$  ermittelt werden. Eine Rechnung (Ableitung, siehe unten) ergibt:

$$3y_{k+1} - 4y_k + y_{k-1} = 2hf(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Dies ist auch schon die Iterationsgleichung für die Ermittlung der  $y$ -Werte der Lösungsfunktion.

$$L(x) = y_{k-1} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(-h)(-2h)} + y_k \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{h(-h)} + y_{k+1} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{2hh}$$

Klammern auflösen

ableiten

$x = x_{k+1}$  einsetzen

vereinfachen mit  $x_k = x_{k+1} - h, x_{k-1} = x_{k+1} - 2h$  ergibt

$$L'(x_{k+1}) = \frac{1}{2h} [y_{k-1} - 4y_k + 3y_{k+1}] = f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Für ein Lagrange-Polynom 3. Grades ist

$$L'(x_{k+1}) = \frac{1}{6h} [-2y_{k-2} + 9y_{k-1} - 18y_k + 11y_{k+1}] = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Für 4. Grad gilt:

$$L'(x_{k+1}) = \frac{1}{12h} [3y_{k-3} - 16y_{k-2} + 36y_{k-1} - 48y_k + 25y_{k+1}] = f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Siehe auch: [Numerische Integration](#)  
[Lagrange-Interpolation](#)  
[Startseite](#)