Binomischer Lehrsatz

Blaise Pascal (1623-1662)
Tartaglia (um 1500-1557)

In manchen mathematischen Betrachtungen treten Terme der Form $(a+b)^n$ auf.
Der Ausdruck $a+b$ heißt Binom. Es ist:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b) \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= (a+b)^3\cdot(a+b) \\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\cdot a \\
&\quad + (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\cdot b \\
&= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
&\qquad + a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die Koeffizienten wie die Zahlen im Pascalschen Dreieck gebildet werden:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= 1 \qquad \textit{sonst} \\
\binom{n}{k} &= \frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}
\end{aligned}$$

Die Binomialkoeffizienten (die Zahlen in den obigen Formeln vor den Potenzen wie a^2b, a^2b^2, usw.) können mit einer Formel errechnet werden, sie steht rechts neben dem Pascalschen Dreieck.
$n!$ bedeutet das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$, genannt n-Fakultät. Beispiel: $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 \;=\,?$

$$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot3}{1\cdot2} = 6 \qquad\qquad \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = \,?$$

lies: *4 über 2,* *5 über 3*

n über k

Um die Herleitung zu vervollständigen, wäre noch

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

zu beweisen (warum?).

facultas, lat. Möglichkeit, Fülle