Cholesky-Zerlegung

$$LL^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 17 \\ 8 & 17 & 45 \end{pmatrix}$$

Das Produkt ist symmetrisch.

$$LL^T = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \quad \text{(symmetrisch)}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11}^2 & \dots & \dots \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & \dots \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt kann eine symmetrische Matrix mit positiven Elementen zerlegt werden.

$$\begin{aligned}
l_{11}^2 &= a_{11} & \Longrightarrow \quad l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\
l_{11}l_{21} &= a_{21} & l_{21} &= a_{21}/l_{11} \\
l_{11}l_{31} &= a_{31} & l_{31} &= a_{31}/l_{11} \\
l_{21}^2 + l_{22}^2 &= a_{22} & l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\
l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} &= a_{32} & l_{32} &= (a_{32} - l_{21} \cdot l_{31})/l_{22} \\
l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 &= a_{33} & l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$
wird mit der Zerlegung von A umformuliert: $L\underbrace{L^T\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$

1. Schritt, wir lösen $L\vec{y} = \vec{b}$
und beginnen oben.

$$\begin{aligned}
l_{11}\,y_1 & & &= b_1 \\
l_{21}\,y_1 &+ l_{22}\,y_2 & &= b_2 \\
l_{31}\,y_1 &+ l_{32}\,y_2 &+ l_{33}\,y_3 &= b_3
\end{aligned}$$

2. Schritt, wir lösen $L^T\vec{x} = \vec{y}$
und beginnen unten.

$$\begin{aligned}
l_{11}\,x_1 + l_{21}\,x_2 + l_{31}\,x_3 &= y_1 \\
l_{22}\,x_2 + l_{32}\,x_3 &= y_2 \\
l_{33}\,x_3 &= y_3
\end{aligned}$$

Lösen eines Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 8\,x_3 & = & 38 \\ 6\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & 17\,x_3 & = & 73 \\ 8\,x_1 & + & 17\,x_2 & + & 45\,x_3 & = & 168 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 17 \\ 8 & 17 & 45 \end{pmatrix}$$

siehe 1. Seite

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\,y_1 & & & & & = & 38 \\ 3\,y_1 & + & y_2 & & & = & 73 \\ 4\,y_1 & + & 5\,y_2 & + & 2\,y_3 & = & 168 \end{array} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 19 \\ & & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 16 \\ & & & & 2\,x_3 & = & 6 \end{array} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für dieses Verfahren muss die Koeffizientenmatrix symmetrisch sein.
Damit die Wurzeln reell sind, wird positive Definitheit vorausgesetzt.
Für große n ist der Aufwand des Cholesky-Verfahrens im Vergleich zum Gauß-Algorithmus ungefähr halb so groß.

Cholesky-Zerlegung

$$LL^T = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} l_{11}^2 & \dots & \dots & \dots \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & \dots & \dots \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 & \dots \\ l_{11}l_{41} & l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} & l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = A \quad \text{(symmetrisch)}$$

$$\begin{aligned}
l_{11}^2 &= a_{11} & \Longrightarrow \quad l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\
l_{11}l_{21} &= a_{21} & l_{21} &= a_{21}/l_{11} \\
l_{11}l_{31} &= a_{31} & l_{31} &= a_{31}/l_{11} \\
l_{11}l_{41} &= a_{41} & l_{41} &= a_{41}/l_{11} \\[1ex]
l_{21}^2 + l_{22}^2 &= a_{22} & l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\
l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} &= a_{32} & l_{32} &= (a_{32} - l_{21} \cdot l_{31})/l_{22} \\
l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} &= a_{42} & l_{42} &= (a_{42} - l_{21} \cdot l_{41})/l_{22} \\[1ex]
l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 &= a_{33} & l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} \\
l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} &= a_{43} & l_{43} &= (a_{43} - l_{31} \cdot l_{41} - l_{32} \cdot l_{42})/l_{33} \\[1ex]
l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 &= a_{44} & l_{44} &= \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2}
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $\quad A\,\vec{x} = \vec{b}$
wird mit der Zerlegung von A umformuliert: $\quad L\,\underbrace{L^T\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$

1. Schritt, wir lösen $\quad L\,\vec{y} = \vec{b}$.

$$\begin{array}{lllll}
l_{11}\,y_1 & & & & = b_1 \\
l_{21}\,y_1 & + \; l_{22}\,y_2 & & & = b_2 \\
l_{31}\,y_1 & + \; l_{32}\,y_2 & + \; l_{33}\,y_3 & & = b_3 \\
l_{41}\,y_1 & + \; l_{42}\,y_2 & + \; l_{43}\,y_3 & + \; l_{44}\,y_4 & = b_4
\end{array}$$

2. Schritt, wir lösen $\quad L^T\vec{x} = \vec{y}$.

$$\begin{array}{rrrrl}
l_{11}\,x_1 & + \; l_{21}\,x_2 & + \; l_{31}\,x_3 & + \; l_{41}\,x_4 & = y_1 \\
 & l_{22}\,x_2 & + \; l_{32}\,x_4 & + \; l_{42}\,x_4 & = y_2 \\
 & & l_{33}\,x_3 & + \; l_{43}\,x_4 & = y_3 \\
 & & & l_{44}\,x_4 & = y_4
\end{array}$$

Cholesky-Zerlegung

Zerlege

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{pmatrix}$$

Cholesky-Zerlegung

Zerlege

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$LL^T = A$$