Clifford-Algebra

$\boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_n^2 = 1$

(Direkte) Konstruktion der Clifford-Algebra $\boldsymbol{e}_i^2 = 1$

$Cl_k(\mathbb{R}^n)$

$Cl_2(\mathbb{R}^3)$

Clifford-Algebra

Clifford entdeckte 1878 wie aus Grassmann-Algebren durch geringfügige Abänderung der Multiplikation vielfältige Strukturen entstehen.

Die Verbindung von Grassmann-Algebra $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$ und Quaternionen ist nicht offensichtlich.

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	0	$\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$	0
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$	0	0
$\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$	0	0	0

	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
1	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	-1	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	-1

$\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2$ beschreibt im $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt, desgleichen gilt $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = k$.
Wenn man nun $\boldsymbol{e}_i{\wedge}\boldsymbol{e}_i = -1$ abändert, ansonsten alle Rechenregeln der Grassmann-Algebra beibehält ($\boldsymbol{e}_i{\wedge}\boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j{\wedge}\boldsymbol{e}_i$ für $i \neq j$), liegen mit $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{k}$ die Quaternionen vor.
$\boldsymbol{e}_i{\wedge}\boldsymbol{e}_i = -1$ kann als (erweiterte) Skalarmultiplikation aufgefasst werden.
Die Assoziativität der neuen Verknüpfung ist allerdings noch zu zeigen.
Das Verknüpfungszeichen wird beibehalten.

Rechenbeispiele

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}{\wedge}(\boldsymbol{i}{\wedge}\boldsymbol{j}) &= \boldsymbol{e}_2{\wedge}(\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2) \\
&= -\boldsymbol{e}_2{\wedge}\boldsymbol{e}_2{\wedge}\boldsymbol{e}_1 \\
&= \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{i}{\wedge}\boldsymbol{j}){\wedge}\boldsymbol{j} &= (\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2){\wedge}\boldsymbol{e}_2 \\
&= -\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2){\wedge}(\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2) &= -\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_1{\wedge}\boldsymbol{e}_2{\wedge}\boldsymbol{e}_2 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Clifford-Algebra

Aus $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0	0	0	0

entsteht mit $\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i = 1$ die Clifford-Algebra:

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	1	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	-1	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	-1	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	-1	$-\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

Die verschiedenen Algebren $Cl_k(\mathbb{R}^n)$ ergeben sich durch die Festlegungen:
$\boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_k^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_{k+1}^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_n^2 = 1$ mit $\boldsymbol{e}_i^2 = \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i$.

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_n^2 = 1$$

Multiplikation

Sei $\boldsymbol{e}_m$ gemeinsamer Faktor zweier Basiselemente.
$\boldsymbol{e}_m$ kann durch a bzw. b Vertauschungen an die 1. Stelle gebracht werden.
Wir legen daher fest:

$$\big((-1)^a \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \big((-1)^b \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l}\big) = (-1)^{a+b+k} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l}$$

Damit $\boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_m$ vorliegt und dann verschwindet, sind weitere k Vertauschungen erforderlich.

Assoziativität

$$\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l}\big) \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s} &= \\
(-1)^k \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s} &= \\
(-1)^{k+k+l} \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s} &= \\
(-1)^l \ldots &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \big(\boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s}\big) \\
&= (-1)^l \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s}
\end{aligned}$$

Die Assoziativität der Grassmann-Algebra wird verwendet.
Mehrere gemeinsame Faktoren sind entsprechend nach links zu tauschen
und in der Definition der Verknüpfung zu berücksichtigen.

Vereinfachte Rechnung:

$$(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_5) \wedge (\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_5) = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \quad (= -\boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$$

Mit 2 benachbarten Transpositionen kann $\boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5$ um eine Stelle versetzt werden.

Umkehrung der Reihenfolge

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 = (-1)^{1+2+3} \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1$$

Division mit Basiselementen

$$\big(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \big(\boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \boldsymbol{e}_{i_1}\big) = 1$$

Allgemein in $Cl_k(\mathbb{R}^n)$ (unmittelbar einsichtig):

$$\big(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \frac{1}{\big(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \big(\boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \boldsymbol{e}_{i_1}\big)} \big(\boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \boldsymbol{e}_{i_1}\big) = 1$$

(Direkte) Konstruktion der Clifford-Algebra $\boldsymbol{e}_i^2 = 1$

Die Herleitung der Grassmann-Algebra wird abgeändert.

Den Produkten $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k, \ldots$ werden Teilmengen zuordnen.

Wir gehen von einem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ aus und betten ihn in einen Vektorraum der Dimension 2^n ein (hängen genügend Nullen dran).
Er ist nun Teilraum von $\mathbb{R}^{2^n}$.
Die $\boldsymbol{e}_i$ werden zu einer Basis des $\mathbb{R}^{2^n}$ ergänzt.
Die Basiselemente indizieren wir mit den 2^n Teilmengen von n, so dass wir haben $\boldsymbol{e}_{\{1\}} = \boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_{\{n\}} = \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{e}_{\{1,2\}},\ \boldsymbol{e}_{\{1,3\}},\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_{\{1,\ldots,n\}},\ \boldsymbol{e}_{\{\,\}}$,

und definieren eine Multiplikation mit Hilfe der symmetrischen Differenz, $R \Delta S = (R \cup S) \setminus (R \cap S)$.

$$\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = \prod_{r \in R,\, s \in S} (r,s)\ \boldsymbol{e}_{R \Delta S} \qquad \text{mit} \qquad (r,s) = \begin{cases} 1 & r \leq s \\ -1 & r > s \end{cases}$$

Beispiele

$\boldsymbol{e}_{\{1,3\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2\}} = (1,2)(3,2)\boldsymbol{e}_{\{1,2,3\}} = -\boldsymbol{e}_{\{1,2,3\}}$

$\boldsymbol{e}_{\{1,2\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,3\}}$ Die Indexmengen haben ein gemeinsames Element.

$\boldsymbol{e}_{\{1,3,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3\}} = -\boldsymbol{e}_{\{1,2,5\}}$

$\boldsymbol{e}_{\{1,3,4\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}} = -\boldsymbol{e}_{\{1,2\}}$

$\boldsymbol{e}_{\{2,3,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{7,8\}} = (-1)^{3 \cdot 2} \boldsymbol{e}_{\{7,8\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,5\}}$ Die 6 Faktoren wechseln beim Übergang von (r,s) nach (s,r) das Vorzeichen.

$\boldsymbol{e}_{\{\,\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}}$ Für das leere Produkt setzen wir 1. Das Basiselement $\boldsymbol{e}_{\{\,\}}$ ist somit das Einselement.

$\boldsymbol{e}_{\{i\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{i\}} = \boldsymbol{e}_{\{\,\}} = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{e}_{\{1,2,3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{3\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{4\}}$

<u>Assoziativität, nicht offensichtlich, obwohl Δ assoziativ ist</u>

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S) \wedge \boldsymbol{e}_T &= \prod_{r \in R,\, s \in S} (r,s)\ \boldsymbol{e}_{R \Delta S} \wedge \boldsymbol{e}_T \\
&= \prod_{r \in R,\, s \in S} (r,s) \prod_{h \in R \Delta S,\, t \in T} (h,t)\ \boldsymbol{e}_{R \Delta S \Delta T} \\
&= \prod_{r \in R,\, h \in S \Delta T} (r,h) \prod_{s \in S,\, t \in T} (s,t)\ \boldsymbol{e}_{R \Delta S \Delta T} \\
&= \boldsymbol{e}_R \wedge (\boldsymbol{e}_S \wedge \boldsymbol{e}_T) \qquad \text{für } R, S, T \text{ paarweise disjunkt siehe Grassmann-Algebra}
\end{aligned}$$

Durch gemeinsame Elemente können zusätzliche ( )-Terme entstehen, jedoch stets paarweise.
$(\boldsymbol{e}_{\{1,5,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{4,7\}}) \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,5,7\}} \wedge (\boldsymbol{e}_{\{4,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}})$ Rechts tritt $(7,k)$ mit $7 > k$ doppelt auf, $k = 2$.

(Direkte) Konstruktion der Clifford-Algebra $Cl_k(\mathbb{R}^n)$

Festlegungen (z. B.): $\mathbb{R}^4$
$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_4^2 = 1$

<u>Multiplikation</u>

$$\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s)\ \boldsymbol{e}_{R\Delta S} \qquad \text{mit} \qquad (r,s) = \begin{cases} -1 & (1,1) \text{ oder } (2,2) \\ 1 & (3,3) \text{ oder } (4,4) \\ 1 & r < s \\ -1 & r > s \end{cases}$$

Mehr bedarf es nicht.

Beispiele $Cl_2(\mathbb{R}^8)$

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{1}$$

$$(\boldsymbol{e}_{\{1,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{4,7\}}) \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}} = (5{,}4)\,\boldsymbol{e}_{\{1,4,5,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}} = (5{,}4)(4{,}2)(5{,}2)(7{,}2)\,\boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}}$$

$$\boldsymbol{e}_{\{1,5\}} \wedge (\boldsymbol{e}_{\{4,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}}) = (4{,}2)(7{,}2)\,\boldsymbol{e}_{\{1,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,4\}} = (4{,}2)(7{,}2)(5{,}2)(5{,}4)\,\boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5) \wedge (\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5) &= -\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \\ &= \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \\ &= \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \\ &= -\boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5 = -\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_5) \wedge (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) &= (-1)^3\, \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ &= (-1)^{3\cdot 2-1}\, \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_5)\end{aligned}$$

allgemein

$$\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = (-1)^{|R|\cdot|S| - |R\cap S|}\, \boldsymbol{e}_S \wedge \boldsymbol{e}_R \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S \wedge \boldsymbol{e}_R^{-1} = (-1)^{|R|\cdot|S| - |R\cap S|}\, \boldsymbol{e}_S$$

$$\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = -\boldsymbol{e}_S \wedge \boldsymbol{e}_R \ \ (\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = \boldsymbol{e}_S \wedge \boldsymbol{e}_R) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (|R| \text{ oder } |S| \text{ gerade}) \text{ und } R\cap S \text{ ungerade (gerade)} \\ (|R| \text{ und } |S| \text{ ungerade}) \text{ und } R\cap S \text{ gerade (ungerade)} \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \big[\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i\big] = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \boldsymbol{e}_i^2 = 2\,\underbrace{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}_{\text{Skalarprodukt}} \qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j$$

$$(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_6) \wedge (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_6) = (-1)^{1+2+3+4+5}\, \boldsymbol{e}_1^2 \boldsymbol{e}_2^2 \boldsymbol{e}_3^2 \boldsymbol{e}_4^2 \boldsymbol{e}_5^2 \boldsymbol{e}_6^2$$

Clifford-Algebra $Cl_2(\mathbb{R}^3)$

$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_3^2 = 1$

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	-1	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	-1	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	1	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	-1

<u>Inverse</u>

Inverse existieren nicht für $\boldsymbol{e}_3 \pm 1$.

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}_3^2 &&= 1 \\ \Longrightarrow\quad & \boldsymbol{e}_3^2 - 1 &&= 0 \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{e}_3 - 1)\wedge(\boldsymbol{e}_3 + 1) &&= 0 \end{aligned}$$

Würde ein Inverses z. B. für $\boldsymbol{e}_3 - 1$ existieren, so folgte durch Multiplikation $\boldsymbol{e}_3 + 1 = 0$ und damit $\boldsymbol{e}_3 = -1$.

$(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)^{-1}\wedge(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j) = 1$ für $i \neq j$, $\quad (\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)^{-1} = \dfrac{1}{(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)^2}(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)$

$(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)\wedge(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1) = 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 \\ &= \underbrace{\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3}_{\text{Inv. existiert}}\wedge\underbrace{(\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2)}_{\text{Inv. existiert}} \end{aligned}$$

Bei der Behandlung der Grassmann-Algebra hatte ich mich an der Ausarbeitung einer von E. Artin 1960/61 an der Universität Hamburg gehaltenen Vorlesung *Analytische Geometrie und Algebra II* orientiert.
Der (naheliegende) Übergang zur Clifford-Algebra erfolgte 2016 ohne Vorlage.
Eine direkte Konstruktion der Clifford-Algebra entdeckte ich dann in dem Buch *GEOMETRIC ALGEBRA* von E. Artin, 1957 (hätte ich mir auch denken können).

Siehe auch: Grassmann-Algebra
Startseite