

1. Clifford-Algebra
2.  $\mathbf{e}_1^2 = \dots = \mathbf{e}_n^2 = 1$
3. (Direkte) Konstruktion der Clifford-Algebra  $\mathbf{e}_i^2 = 1$
4.  $Cl_k(\mathbb{R}^n)$
5.  $Cl_2(\mathbb{R}^3)$

Grassmann-Algebra

# ↑ Clifford-Algebra

Clifford entdeckte 1878 wie aus Grassmann-Algebren durch geringfügige Abänderung der Multiplikation vielfältige Strukturen entstehen.

Die Verbindung von Grassmann-Algebra  $\wedge(\mathbb{R}^2)$  und Quaternionen ist nicht offensichtlich.

	<b>1</b>	<b><math>e_1</math></b>	<b><math>e_2</math></b>	<b><math>e_1 \wedge e_2</math></b>
<b>1</b>	1	<b><math>e_1</math></b>	<b><math>e_2</math></b>	<b><math>e_1 \wedge e_2</math></b>
<b><math>e_1</math></b>	<b><math>e_1</math></b>	0	<b><math>e_1 \wedge e_2</math></b>	0
<b><math>e_2</math></b>	<b><math>e_2</math></b>	<b><math>-e_1 \wedge e_2</math></b>	0	0
<b><math>e_1 \wedge e_2</math></b>	<b><math>e_1 \wedge e_2</math></b>	0	0	0

	<b>1</b>	<b><math>i</math></b>	<b><math>j</math></b>	<b><math>k</math></b>
<b>1</b>	1	<b><math>i</math></b>	<b><math>j</math></b>	<b><math>k</math></b>
<b><math>i</math></b>	<b><math>i</math></b>	-1	<b><math>k</math></b>	<b><math>-j</math></b>
<b><math>j</math></b>	<b><math>j</math></b>	<b><math>-k</math></b>	-1	<b><math>i</math></b>
<b><math>k</math></b>	<b><math>k</math></b>	<b><math>j</math></b>	<b><math>-i</math></b>	-1

$e_1 \wedge e_2$  beschreibt im  $\mathbb{R}^3$  das Vektorprodukt, desgleichen gilt  $i \times j = k$ .

Wenn man nun  $e_i \wedge e_i = -1$  abändert, ansonsten alle Rechenregeln der Grassmann-Algebra beibehält ( $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$  für  $i \neq j$ ), liegen mit  $e_1 = i$ ,  $e_2 = j$ ,  $e_1 \wedge e_2 = k$  die Quaternionen vor.

$e_i \wedge e_i = -1$  kann als (erweiterte) Skalarmultiplikation aufgefasst werden.

Die Assoziativität der neuen Verknüpfung ist allerdings noch zu zeigen.

Das Verknüpfungszeichen wird beibehalten.

Rechenbeispiele

$$\begin{aligned} j \wedge (i \wedge j) &= e_2 \wedge (e_1 \wedge e_2) \\ &= -e_2 \wedge e_2 \wedge e_1 \\ &= e_1 = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i \wedge j) \wedge j &= (e_1 \wedge e_2) \wedge e_2 \\ &= -e_1 = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_2) \wedge (e_1 \wedge e_2) &= -e_1 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

# ↑ Clifford-Algebra

Aus  $\wedge(\mathbb{R}^3)$

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
$e_1$	$e_1$	0	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	0	0	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0
$e_2$	$e_2$	$-e_1 \wedge e_2$	0	$e_2 \wedge e_3$	0	$-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0	0
$e_3$	$e_3$	$-e_1 \wedge e_3$	$-e_2 \wedge e_3$	0	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0	0	0
$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_2$	0	0	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0	0	0	0
$e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_3$	0	$-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0	0	0	0	0
$e_2 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0	0	0	0	0	0
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	0	0	0	0	0	0	0

entsteht mit  $e_i \wedge e_i = 1$  die Clifford-Algebra:

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
$e_1$	$e_1$	1	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$
$e_2$	$e_2$	$-e_1 \wedge e_2$	1	$e_2 \wedge e_3$	$-e_1$	$-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_3$	$-e_1 \wedge e_3$
$e_3$	$e_3$	$-e_1 \wedge e_3$	$-e_2 \wedge e_3$	1	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$-e_1$	$-e_2$	$e_1 \wedge e_2$
$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_2$	$-e_2$	$e_1$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$-1$	$-e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_3$	$-e_3$
$e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_3$	$-e_3$	$-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_1$	$e_2 \wedge e_3$	$-1$	$-e_1 \wedge e_2$	$e_2$
$e_2 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$-1$	$-e_1$
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$-e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-1$

Die verschiedenen Algebren  $Cl_k(\mathbb{R}^n)$  ergeben sich durch die Festlegungen:  
 $e_1^2 = \dots = e_k^2 = -1$ ,  $e_{k+1}^2 = \dots = e_n^2 = 1$  mit  $e_i^2 = e_i \wedge e_i$ .



# ↑ (Direkte) Konstruktion der Clifford-Algebra $e_i^2 = 1$

Die Herleitung der Grassmann-Algebra wird abgeändert.

Den Produkten  $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_i \wedge e_j \wedge e_k, \dots$  werden Teilmengen zuordnen.

Wir gehen von einem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $e_1, \dots, e_n$  aus und betten ihn in einen Vektorraum der Dimension  $2^n$  ein (hängen genügend Nullen dran).

Er ist nun Teilraum von  $\mathbb{R}^{2^n}$ .

Die  $e_i$  werden zu einer Basis des  $\mathbb{R}^{2^n}$  ergänzt.

Die Basiselemente indizieren wir mit den  $2^n$  Teilmengen von  $n$ , so dass wir

haben  $e_{\{1\}} = e_1, \dots, e_{\{n\}} = e_n, e_{\{1,2\}}, e_{\{1,3\}}, \dots, e_{\{1,\dots,n\}}, e_{\{\}},$

und definieren eine Multiplikation mit Hilfe der symmetrischen Differenz,  $R \Delta S = (R \cup S) \setminus (R \cap S)$ .

$$e_R \wedge e_S = \prod_{r \in R, s \in S} (r, s) e_{R \Delta S} \quad \text{mit} \quad (r, s) = \begin{cases} 1 & r \leq s \\ -1 & r > s \end{cases}$$

Beispiele

$$e_{\{1,3\}} \wedge e_{\{2\}} = (1, 2)(3, 2)e_{\{1,2,3\}} = -e_{\{1,2,3\}}$$

$$e_{\{1,2\}} \wedge e_{\{2,3\}} = e_{\{1,3\}}$$

Die Indexmengen haben ein gemeinsames Element.

$$e_{\{1,3,5\}} \wedge e_{\{2,3\}} = -e_{\{1,2,5\}}$$

$$e_{\{1,3,4\}} \wedge e_{\{2,3,4\}} = -e_{\{1,2\}}$$

$$e_{\{2,3,5\}} \wedge e_{\{7,8\}} = (-1)^{3 \cdot 2} e_{\{7,8\}} \wedge e_{\{2,3,5\}}$$

Die 6 Faktoren wechseln beim Übergang von  $(r, s)$  nach  $(s, r)$  das Vorzeichen.

$$e_{\{\}} \wedge e_{\{2,3,4\}} = e_{\{2,3,4\}}$$

Für das leere Produkt setzen wir 1.

Das Basiselement  $e_{\{\}}$  ist somit das Einselement.

$$e_{\{i\}} \wedge e_{\{i\}} = e_{\{\}} = 1$$

$$e_{\{1,2,3,4\}} = e_{\{1\}} \wedge e_{\{2,3,4\}} = e_{\{1\}} \wedge e_{\{2\}} \wedge e_{\{3,4\}} = e_{\{1\}} \wedge e_{\{2\}} \wedge e_{\{3\}} \wedge e_{\{4\}}$$

Assoziativität, nicht offensichtlich, obwohl  $\Delta$  assoziativ ist

$$\begin{aligned} (e_R \wedge e_S) \wedge e_T &= \prod_{r \in R, s \in S} (r, s) e_{R \Delta S} \wedge e_T \\ &= \prod_{r \in R, s \in S} (r, s) \prod_{h \in R \Delta S, t \in T} (h, t) e_{R \Delta S \Delta T} \\ &= \prod_{r \in R, h \in S \Delta T} (r, h) \prod_{s \in S, t \in T} (s, t) e_{R \Delta S \Delta T} \end{aligned}$$

$$= e_R \wedge (e_S \wedge e_T) \quad \text{für } R, S, T \text{ paarweise disjunkt siehe Grassmann-Algebra}$$

Durch gemeinsame Elemente können zusätzliche  $(\ )$ -Terme entstehen, jedoch stets paarweise.

$$(e_{\{1,5,7\}} \wedge e_{\{4,7\}}) \wedge e_{\{2,7\}} = e_{\{1,5,7\}} \wedge (e_{\{4,7\}} \wedge e_{\{2,7\}}) \quad \text{Rechts tritt } (7, k) \text{ mit } 7 > k \text{ doppelt auf, } k = 2.$$

↑

# ↑ (Direkte) Konstruktion der Clifford-Algebra $Cl_k(\mathbb{R}^n)$

Festlegungen (z. B.):  $\mathbb{R}^4$

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = e_4^2 = 1$$

## Multiplikation

$$e_R \wedge e_S = \prod_{r \in R, s \in S} (r, s) e_{R \Delta S} \quad \text{mit} \quad (r, s) = \begin{cases} -1 & (1, 1) \text{ oder } (2, 2) \\ 1 & (3, 3) \text{ oder } (4, 4) \\ 1 & r < s \\ -1 & r > s \end{cases}$$

Mehr bedarf es nicht.

## Beispiele $Cl_2(\mathbb{R}^8)$

$$e_1 \wedge e_1 = -\mathbf{1}$$

$$(e_{\{1,5\}} \wedge e_{\{4,7\}}) \wedge e_{\{2,7\}} = (5,4) e_{\{1,4,5,7\}} \wedge e_{\{2,7\}} = (5,4)(4,2)(5,2)(7,2) e_{\{1,2,4,5\}} = e_{\{1,2,4,5\}}$$

$$e_{\{1,5\}} \wedge (e_{\{4,7\}} \wedge e_{\{2,7\}}) = (4,2)(7,2) e_{\{1,5\}} \wedge e_{\{2,4\}} = (4,2)(7,2)(5,2)(5,4) e_{\{1,2,4,5\}} = e_{\{1,2,4,5\}}$$

$$\begin{aligned} (e_3 \wedge e_4 \wedge e_5) \wedge (e_3 \wedge e_4 \wedge e_5) &= -e_3 \wedge e_4 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_4 \wedge e_5 \\ &= e_3 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_4 \wedge e_5 \\ &= e_4 \wedge e_5 \wedge e_4 \wedge e_5 \\ &= -e_4 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_5 = -\mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) \wedge (e_2 \wedge e_3) &= (-1)^3 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_3 \\ &= (-1)^{3 \cdot 2 - 1} e_2 \wedge e_3 \wedge (e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) \end{aligned}$$

allgemein

$$e_R \wedge e_S = (-1)^{|R| \cdot |S| - |R \cap S|} e_S \wedge e_R \quad \implies \quad e_R \wedge e_S \wedge e_R^{-1} = (-1)^{|R| \cdot |S| - |R \cap S|} e_S$$

$$e_R \wedge e_S = -e_S \wedge e_R \quad (e_R \wedge e_S = e_S \wedge e_R) \quad \iff \quad \begin{cases} (|R| \text{ oder } |S| \text{ gerade}) \text{ und } R \cap S \text{ ungerade (gerade)} \\ (|R| \text{ und } |S| \text{ ungerade}) \text{ und } R \cap S \text{ gerade (ungerade)} \end{cases}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j [e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i] = 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i e_i^2 = 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^n b_j e_j$$

$$(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6) \wedge (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6) = (-1)^{1+2+3+4+5} e_1^2 e_2^2 e_3^2 e_4^2 e_5^2 e_6^2$$

# ↑ Clifford-Algebra $Cl_2(\mathbb{R}^3)$

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = 1$$

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
$e_1$	$e_1$	-1	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$-e_2$	$-e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$-e_2 \wedge e_3$
$e_2$	$e_2$	$-e_1 \wedge e_2$	-1	$e_2 \wedge e_3$	$e_1$	$-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$-e_3$	$e_1 \wedge e_3$
$e_3$	$e_3$	$-e_1 \wedge e_3$	$-e_2 \wedge e_3$	1	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_1$	$e_2$	$-e_1 \wedge e_2$
$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	-1	$e_2 \wedge e_3$	$-e_1 \wedge e_3$	$-e_3$
$e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_3$	$e_3$	$-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_1$	$-e_2 \wedge e_3$	1	$-e_1 \wedge e_2$	$-e_2$
$e_2 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_3$	$e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2$	1	$e_1$
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$	$-e_2 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_3$	$e_1 \wedge e_2$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$	-1

## Inverse

Inverse existieren nicht für  $e_3 \pm 1$ .

$$\begin{aligned} e_3^2 &= 1 \\ \implies e_3^2 - 1 &= 0 \\ \implies (e_3 - 1) \wedge (e_3 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Würde ein Inverses z.B. für  $e_3 - 1$  existieren, so folgte durch Multiplikation  $e_3 + 1 = 0$  und damit  $e_3 = -1$ .

$$(e_i \pm e_j)^{-1} \wedge (e_i \pm e_j) = 1 \quad \text{für } i \neq j, \quad (e_i \pm e_j)^{-1} = \frac{1}{(e_i \pm e_j)^2} (e_i \pm e_j)$$

$$(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \wedge (e_3 \wedge e_2 \wedge e_1) = 1$$

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 \wedge e_3 \\ &= \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}_{\text{Inv. existiert}} \wedge \underbrace{(e_3 + e_2)}_{\text{Inv. existiert}} \end{aligned}$$

↑

Bei der Behandlung der Grassmann-Algebra hatte ich mich an der Ausarbeitung einer von E. Artin 1960/61 an der Universität Hamburg gehaltenen Vorlesung *Analytische Geometrie und Algebra II* orientiert.  
Der (naheliegende) Übergang zur Clifford-Algebra erfolgte 2016 ohne Vorlage.  
Eine direkte Konstruktion der Clifford-Algebra entdeckte ich dann in dem Buch *GEOMETRIC ALGEBRA* von E. Artin, 1957 (hätte ich mir auch denken können).



## Grassmann-Algebra