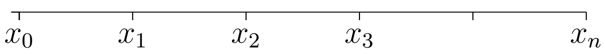
Differenzenverfahren

$$-y'' + 6y' = 2, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0, \quad \text{Intervall } [0,1]$$

Gesucht ist eine Funktion $u(x)$, die die DGL und die Randbedingungen erfüllt.



Das Intervall wird in n äquidistante Teilintervalle unterteilt mit:

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{5}, \quad i = 0,1,2,\ldots,5 \qquad\qquad \text{(hier } n = 5\text{)}$$

Für die Ableitungen werden die Näherungen verwendet (trotzdem =):

$$u' = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

$$u'' = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \qquad = \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h}$$

Damit erhalten wir eine diskrete Version des Problems

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 6\,\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 2, \quad i = 1,2,\ldots,4$$

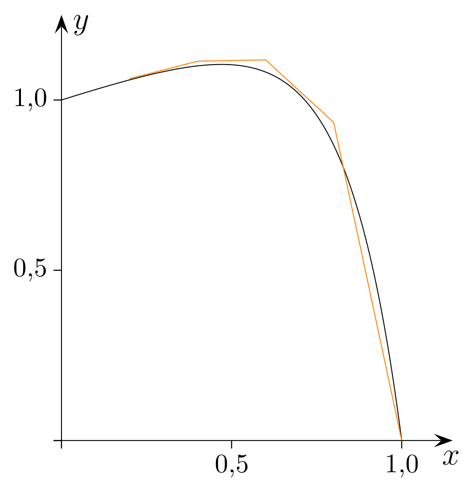
zusammengefasst ergibt das

$$cu_{i-1} + du_i + eu_{i+1} = f_i$$

mit $\qquad c = -40, \quad d = 50, \quad e = -10$

Insgesamt erhalten wir ein lineares Gleichungssystem der Ordnung 6:

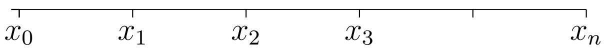
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c & d & e & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & d & e \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Differenzenverfahren

$$-y'' + ay' + by = f, \quad \text{gegeben } y(0),\, y(1), \quad \text{Intervall } [0,1]$$

Gesucht ist eine Funktion $u(x)$, die die DGL und die Randbedingungen erfüllt.



Das Intervall wird in n äquidistante Teilintervalle unterteilt mit:

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad\qquad \text{(hier } n = 5\text{)}$$

Für die Ableitungen werden die Näherungen verwendet (trotzdem =):

$$u' = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

$$u'' = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Damit erhalten wir eine diskrete Version des Problems

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + a\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + bu_i = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad f_i = f(x_i)$$

zusammengefasst ergibt das

$$cu_{i-1} + du_i + eu_{i+1} = f_i$$

mit $\qquad c = -\frac{1}{h^2} - \frac{a}{2h}, \quad d = \frac{2}{h^2} + b, \quad e = -\frac{1}{h^2} + \frac{a}{2h}$

Insgesamt erhalten wir ein lineares Gleichungssystem
der Ordnung $n+1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c & d & e & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & d & e \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ y(1) \end{bmatrix}$$

Startseite

Finite-Elemente-Methode (FEM)