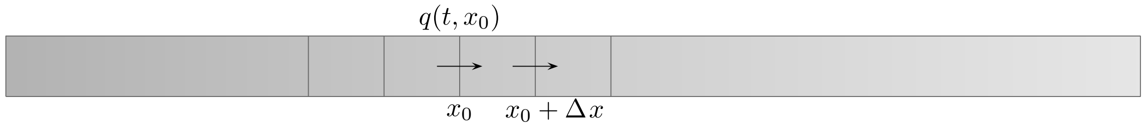
Diffusionsgleichung

Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \lambda > 0$$

tritt in der Theorie der Wärmeleitung, der Ausbreitung von Gasen und in der Beschreibung der Bewegung von Mikroorganismen auf. Wir wollen die DGL anhand der Ausbreitung von Amöben (einzellige Organismen) herleiten und nehmen an, dass die Amöben auf einem langgezogenen streifenförmigen Gebiet leben, so dass eine Koordinate zur Positionsbestimmung ausreicht.



$u(t, x)$ sei die lokale Konzentration (Dichte) der Amöben, Einheit [Anzahl/Längeneinheit],
$q(t, x)$ sei die Rate, mit der die Amöben die Stelle x zum Zeitpunkt t von links nach rechts überqueren.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Gesamtanzahl der Population sich nicht ändert (keine Nahrung vorhanden, daher keine Zellteilung), dann gilt für die Änderungsrate des Bestandes unter Berücksichtigung des Zu- und Abgangs:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\Delta x &= q(t, x) - q(t, x + \Delta x) \\
\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{q(t, x) - q(t, x + \Delta x)}{\Delta x} \\
\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial x} q(t, x)
\end{aligned}$$

Weil Amöben sich von grösserer zu kleinerer Konzentration bewegen, liegt der lineare Ansatz

$$q(t, x) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)$$

nahe (Fluss proportional zur Änderungsrate der lokalen Konzentration), das ergibt:

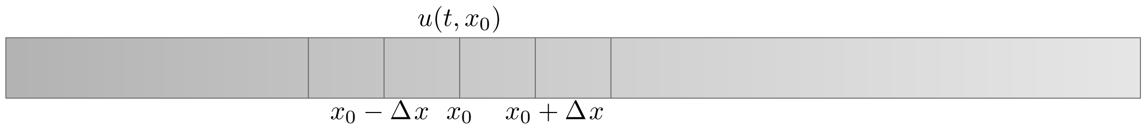
$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

Die 2-dimensionale Version (Ausbreitung in x- und y-Richtung) lautet:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y)$$

diskrete, iterative Lösung

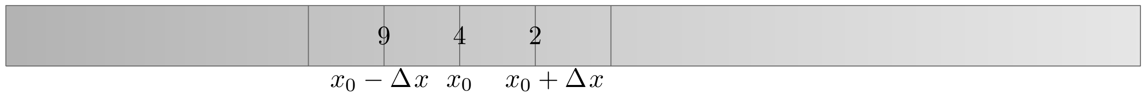
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \lambda > 0$$



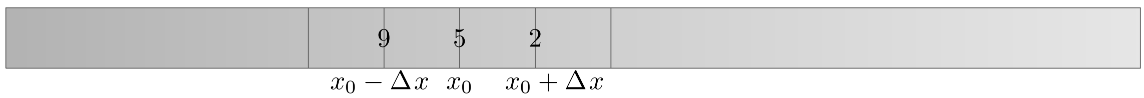
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) &= \frac{\dfrac{u(t,x+\Delta x) - u(t,x)}{\Delta x} - \dfrac{u(t,x) - u(t,x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \frac{u(t,x-\Delta x) + u(t,x+\Delta x) - 2u(t,x)}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } \lambda = \Delta x &= 1 \\
u_{\text{neu}} - u_{\text{alt}} &= u(t,x-\Delta x) + u(t,x+\Delta x) - 2u_{\text{neu}} \\
3u_{\text{neu}} &= u_{\text{alt}} + u(t,x-\Delta x) + u(t,x+\Delta x) \\
u_{\text{neu}} &= \frac{1}{3}(u_{\text{alt}} + u(t,x-\Delta x) + u(t,x+\Delta x))
\end{aligned}$$

alt



neu



Der Diffusionsgleichung entspricht diskret der Mittelwertbildung.
Für die diskrete Lösung gilt:

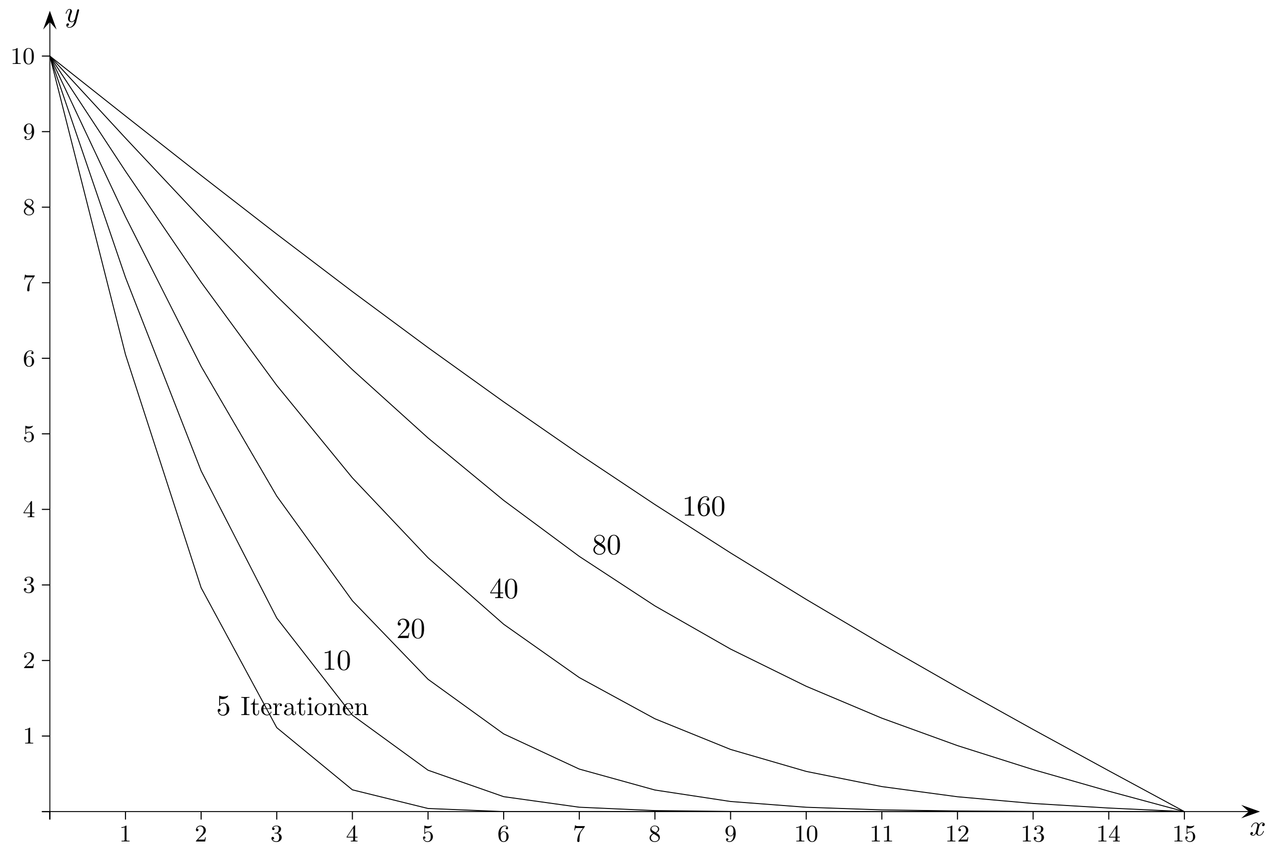
$$u_{\text{Mitte}} = \frac{1}{3}(u_{\text{Mitte}} + u_{\text{links}} + u_{\text{rechts}}) \qquad \text{Iterationsgleichung}$$

$$3u_{\text{Mitte}} = u_{\text{Mitte}} + u_{\text{links}} + u_{\text{rechts}}$$

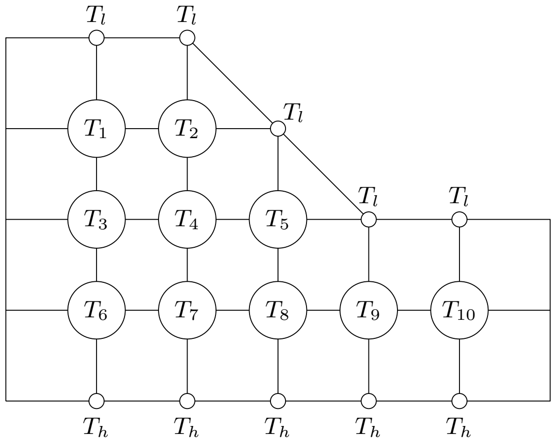
$$u_{\text{Mitte}} = \frac{1}{2}(u_{\text{links}} + u_{\text{rechts}}) \qquad \text{Gleichung für die Lösung}$$

Wärmeleitung in einem Stab, iterativ

Das linke Ende des Stabes wird konstant auf $10°\,C$ gehalten, das Rechte auf $0°\,C$ abgekühlt.



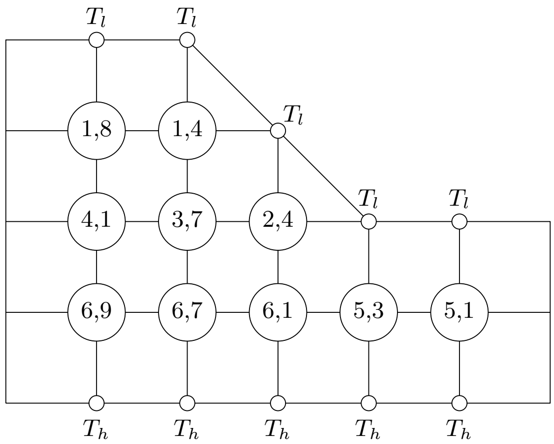
Wärmeleitung in einer Platte, diskret



Mit der Mittelwertsregel werden die Gleichungen aufgestellt.

$$
\begin{aligned}
3T_1 - T_2 - T_3 - T_l &= 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{3}(T_2 + T_3 + T_l) \\
4T_2 - T_1 - T_4 - 2T_l &= 0 \\
3T_3 - T_1 - T_4 - T_6 &= 0 \\
4T_4 - T_2 - T_3 - T_7 - T_5 &= 0 \\
4T_5 - T_4 - T_8 - 2T_l &= 0 \\
3T_6 - T_3 - T_7 - T_h &= 0 \\
4T_7 - T_4 - T_6 - T_8 - T_h &= 0 \\
4T_8 - T_5 - T_7 - T_9 - T_h &= 0 \\
4T_9 - T_8 - T_{10} - T_l - T_h &= 0 \\
3T_{10} - T_9 - T_l - T_h &= 0
\end{aligned}
$$

Sei $T_l = 0^\circ$, $\;T_h = 10^\circ$



Wärmeleitung in einer Platte, Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
3T_1 - T_2 - T_3 - T_l &= 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{3}(T_2 + T_3 + T_l) \\
4T_2 - T_1 - T_4 - 2T_l &= 0 \\
3T_3 - T_1 - T_4 - T_6 &= 0 \\
4T_4 - T_2 - T_3 - T_7 - T_5 &= 0 \\
4T_5 - T_4 - T_8 - 2T_l &= 0 \\
3T_6 - T_3 - T_7 - T_h &= 0 \\
4T_7 - T_4 - T_6 - T_8 - T_h &= 0 \\
4T_8 - T_5 - T_7 - T_9 - T_h &= 0 \\
4T_9 - T_8 - T_{10} - T_l - T_h &= 0 \\
3T_{10} - T_9 - T_l - T_h &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} T_l \\ 2T_l \\ 0 \\ 0 \\ 2T_l \\ T_h \\ T_h \\ T_h \\ T_l + T_h \\ T_l + T_h \end{pmatrix}
$$

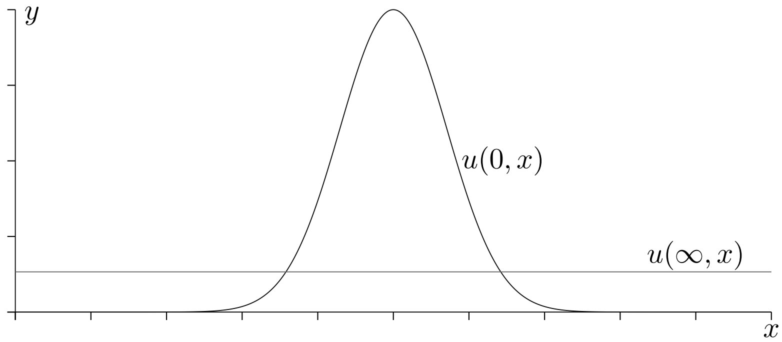
Das lineare Gleichungssystem ist dünn besetzt (viele Nullen).
Die Elemente ungleich null sind um die Hauptdiagonale herum konzentriert.
Zur Lösung wurden spezielle Algorithmen entwickelt.

Diffusion

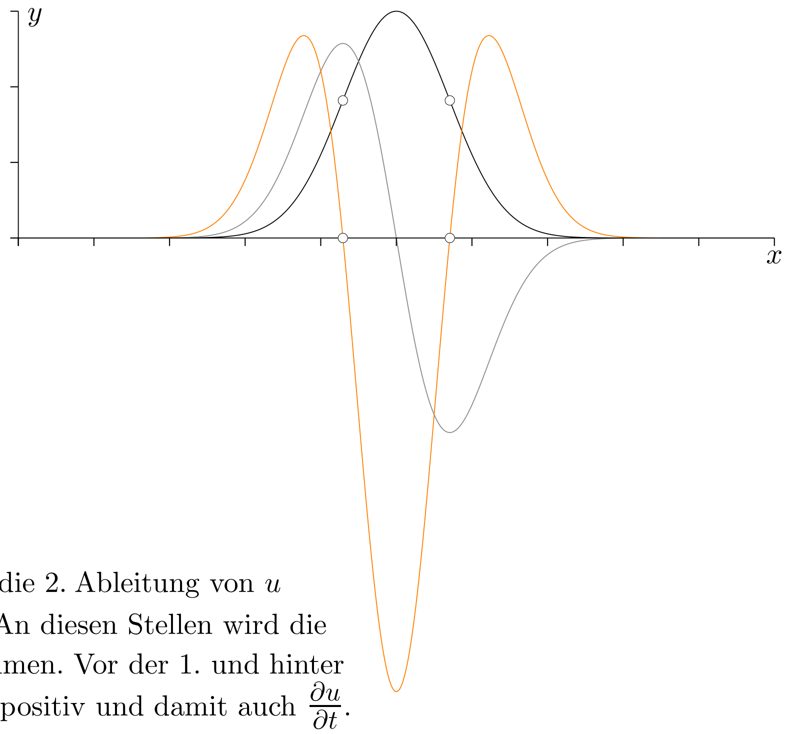
Dass die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad \lambda > 0, \qquad \text{einen Diffusionsprozess beschreibt, ist unmittelbar einsichtig.}$$

In einem Stab der Länge $10\,cm$ liege die durch $u(0,x)$ gegebene anfängliche Temperaturverteilung vor $(t = 0)$.

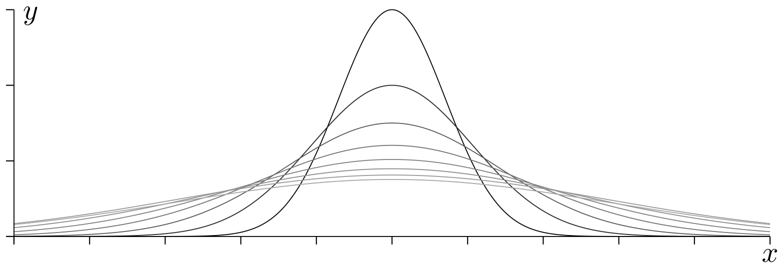


Nach einiger Zeit wird auf dem Stab der Temperaturverlauf $u(\infty, x)$ konstant sein.
Wie wird sich dieser in Abhängigkeit von der Zeit einstellen?



Zwischen den beiden Wendestellen ist die 2. Ableitung von u (orange) negativ und damit auch $\frac{\partial u}{\partial t}$. An diesen Stellen wird die Temperatur im weiteren Verlauf abnehmen. Vor der 1. und hinter der 2. Wendestelle ist die 2. Ableitung positiv und damit auch $\frac{\partial u}{\partial t}$. An diesen Stellen wird die Temperatur folglich zunehmen.

Diffusion



Die Wendestellen verschieben sich nach außen.
Sie trennen die Bereiche der Zu- und Abnahme.