Finanzmathematik

Dreisatz
Prozentrechnung
Zinseszins

Der Reichtum gleicht dem Seewasser,
je mehr man davon trinkt, desto
durstiger wird man.
Arthur Schopenhauer

1. Aus einem Wasserhahn fließen in einer Minute 48 Liter. Wieviel Liter fließen in $8\frac{3}{4}$ Minuten?

2. Ein Futtervorrat reicht für eine Kuh 12 Tage. Wie lange reicht er für drei Kühe?

3. $5\,m$ Stoff kosten im Ausverkauf 60 €. Wieviel kosten $9\,m$?

4. Ein Futtervorrat reicht für 3 Kühe 21 Tage. Wie lange reicht er für 7 Kühe?

5. Mit 4,5 Liter Benzin fährt ein Auto $50\,km$. Wie weit kommt es mit $21\,l$?

6. Ein Trinkwasservorrat auf einem Schiff ist für 15 Mann und 42 Tage berechnet.
   a) Wie lange kommt man aus, wenn nur 9 Mann an Bord sind?
   b) Für wieviel Mann reicht der Vorrat 56 Tage?

7. Ein Heizölvorrat reicht 80 Tage, wenn die Heizung täglich 12,5 Stunden in Betrieb ist.
   a) Bei welcher täglichen Brenndauer würde er 120 Tage ausreichen?
   b) Wie lange reicht der Vorrat bei einer täglichen Brenndauer von 9 Stunden?

8. Aus einer Teigmenge kann ein Bäcker 120 $2\frac{1}{2}$-kg-Brote formen.
   Wie viele $1\frac{1}{2}$-kg-Brote kann er aus derselben Teigmenge herstellen?

9. Die Schafe von zwei Herden sind erkrankt. In der 1. Herde sind es 91 von 1300 Schafen, in der 2. Herde sind es 162 von 1800 Schafen. Vergleiche den Krankheitsstand.

10. Eine Pflanze wächst im Jahr um 7 %. Wie lang ist sie
    a) nach einem Jahr,
    b) nach zwei Jahren, wenn sie jetzt $170\,cm$ misst?

11. Die Erdbevölkerung wächst in 5 Jahren um rund 11 %. 1980 betrug sie 4,48 Mrd.
    Wie viele Menschen werden vorraussichtlich 1990, 1995 und im Jahr 2000 leben?

12. Ein Neuwagen kostet 14400 €.
    Wieviel ist er nach einem Jahr wert, wenn er 25 % seines Wertes verloren hat?

13. Von 50 Schülern sind 10 weiblich. Wieviel Prozent sind das?

14. Der Milchpreis wurde - vor vielen Jahren - von 90 ct je Liter auf 99 ct erhöht.
    Wieviel Prozent des alten Preises macht der Preisunterschied aus?

15. Im Winterschlussverkauf wird ein Mantel um 15 % verbilligt und kostet nun 170 €.
    Was hat er vorher gekostet?

Finanzmathematik

1. Aus einem Wasserhahn fließen in einer Minute 48 Liter. Wieviel Liter fließen in $8\frac{3}{4}$ Minuten? 420

2. Ein Futtervorrat reicht für eine Kuh 12 Tage. Wie lange reicht er für drei Kühe? 4

3. $5\,m$ Stoff kosten im Ausverkauf 60 €. Wieviel kosten $9\,m$? 108

4. Ein Futtervorrat reicht für 3 Kühe 21 Tage. Wie lange reicht er für 7 Kühe? 9

5. Mit 4,5 Liter Benzin fährt ein Auto $50\,km$. Wie weit kommt es mit $21\,l$? $233\frac{1}{3}$

6. Ein Trinkwasservorrat auf einem Schiff ist für 15 Mann und 42 Tage berechnet.
   a) Wie lange kommt man aus, wenn nur 9 Mann an Bord sind? 70
   b) Für wieviel Mann reicht der Vorrat 56 Tage? 11,25

7. Ein Heizölvorrat reicht 80 Tage, wenn die Heizung täglich 12,5 Stunden in Betrieb ist.
   a) Bei welcher täglichen Brenndauer würde er 120 Tage ausreichen? $8\frac{1}{3}$
   b) Wie lange reicht der Vorrat bei einer täglichen Brenndauer von 9 Stunden? $111\frac{1}{9}$

8. Aus einer Teigmenge kann ein Bäcker 120 $2\frac{1}{2}$-kg-Brote formen.
   Wie viele $1\frac{1}{2}$-kg-Brote kann er aus derselben Teigmenge herstellen? 200

9. Die Schafe von zwei Herden sind erkrankt. In der 1. Herde sind es 91 von 1300 Schafen, in der 2. Herde sind es 162 von 1800 Schafen. Vergleiche den Krankheitsstand.
   1. H.: 7 %, 2. H.: 9 %

10. Eine Pflanze wächst im Jahr um 7 %. Wie lang ist sie
    a) nach einem Jahr, 181,9
    b) nach zwei Jahren, wenn sie jetzt $170\,cm$ misst? 194,6

11. Die Erdbevölkerung wächst in 5 Jahren um rund 11 %. 1980 betrug sie 4,48 Mrd.
    Wie viele Menschen werden vorraussichtlich 1990, 1995 und im Jahr 2000 leben?
    5,52 6,13 6,80

12. Ein Neuwagen kostet 14400 €.
    Wieviel ist er nach einem Jahr wert, wenn er 25 % seines Wertes verloren hat? 10800

13. Von 50 Schülern sind 10 weiblich. Wieviel Prozent sind das? 20 %

14. Der Milchpreis wurde - vor vielen Jahren - von 90 ct je Liter auf 99 ct erhöht.
    Wieviel Prozent des alten Preises macht der Preisunterschied aus? 10 %

15. Im Winterschlussverkauf wird ein Mantel um 15 % verbilligt und kostet nun 170 €.
    Was hat er vorher gekostet? 200

Finanzmathematik

16. 13 % einer Obstmenge sind verdorben, und zwar 52 kg.
    Wieviel kg hätte der Händler ohne den Schwund verkaufen können?

17. An 9 Arbeiter wurden in 6 Tagen bei täglich 8 Stunden Arbeit 5000 € Lohn gezahlt. Wieviel zahlt man bei demselben Stundenlohn an 5 Arbeiter in 7 Tagen bei 9-stündiger Arbeitszeit?

18. Drei Heizkörper erhöhen die Zimmertemperatur um 4°C bei 2-stündigem Betrieb.
    Ein Heizkörper wird defekt. Um wieviel Grad können die übrigen Heizkörper bei $2\frac{1}{2}$-stündigem Betrieb die Temperatur erhöhen?

19. Ein Kapital von 2000 € verzinst sich um 8 % pro Jahr.
    Auf wieviel Euro ist das Kapital in 15 Jahren angewachsen?

20. Das Anfangskapital beträgt 1000 €, der Zinssatz 9 %.
    a) Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdreifacht?
    b) Welcher Zinssatz müsste vorliegen, damit sich das Kapital schon in 10 Jahren verdreifacht?

21. Es werden 14000 € auf ein Sparkonto eingezahlt, der Zinssatz beträgt 6 %.
    a) Wie hoch ist der Kontostand nach 7 Jahren?
    b) Nach wieviel Jahren ist der Kontostand doppelt so hoch wie am Anfang?

Finanzmathematik

16. 13 % einer Obstmenge sind verdorben, und zwar 52 kg.
Wieviel kg hätte der Händler ohne den Schwund verkaufen können? 400

17. An 9 Arbeiter wurden in 6 Tagen bei täglich 8 Stunden Arbeit 5000 € Lohn gezahlt. Wieviel zahlt man bei demselben Stundenlohn an 5 Arbeiter in 7 Tagen bei 9-stündiger Arbeitszeit?
3645,83

18. Drei Heizkörper erhöhen die Zimmertemperatur um $4°C$ bei 2-stündigem Betrieb.
Ein Heizkörper wird defekt. Um wieviel Grad können die übrigen Heizkörper bei $2\frac{1}{2}$-stündigem Betrieb die Temperatur erhöhen?
$3\frac{1}{3}\,°C$

19. Ein Kapital von 2000 € verzinst sich um 8 % pro Jahr.
Auf wieviel Euro ist das Kapital in 15 Jahren angewachsen? 6344,34

20. Das Anfangskapital beträgt 1000 €, der Zinssatz 9 %.
    a) Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdreifacht? 12,75
    b) Welcher Zinssatz müsste vorliegen, damit sich das Kapital schon in 10 Jahren verdreifacht?
    11,61 %

21. Es werden 14000 € auf ein Sparkonto eingezahlt, der Zinssatz beträgt 6 %.
    a) Wie hoch ist der Kontostand nach 7 Jahren? 21050,82
    b) Nach wieviel Jahren ist der Kontostand doppelt so hoch wie am Anfang? 11,9

Finanzmathematik

Manche Menschen geben Geld aus, das sie nicht haben, für Dinge, die sie nicht brauchen, um damit Leuten zu imponieren, die sie nicht mögen.
Danny Kaye

22. Ein Patenonkel zahlt für sein Patenkind von dessen 1. bis zum 10. (einschließlich) Geburtstag jeweils 100 € auf ein Sparkonto ein. Wie groß ist der Gesamtwert der Beträge bis zum 10. Geburtstag geworden, $p = 6\,\%$?

23. Zu Beginn eines jeden Jahres zahlt ein Sparer 1000 € auf sein Sparkonto ein, und zwar 10mal, $p = 6\,\%$. Über welchen Betrag verfügt er am Erde des 10. Jahres?

24. Welches Kapital B_0 (Barwert) muss am Anfang des Jahres vorhanden sein, damit 4 Jahre lang am Ende des Jahres (nachschüssig) eine Rente von 500 € ausgezahlt werden kann, $p = 5\,\%$.

25. Ein verunglückter Bergmann erhält jährlich 16000 € Unfallrente und zwar 25 Jahre lang. Welchen Wert hat die Unfallrente, $p = 4\,\%$. (Der Wert ist derjenige Betrag, der zum jetzigen Zeitpunkt vorhanden sein muss, um die Rentenzahlungen zu ermöglichen. Dieser Betrag kann auch auf einmal ausgezahlt werden.)

26. Eine Rate von 200 € wird jeweils am Anfang des Jahres (vorschüssig) eingezahlt, und zwar 7 Jahre lang, $p = 5\,\%$. Wie groß ist das Kapital am Ende des 7. Jahres?

27. Ein Kapital von 100 € wird 10 Jahre lang zu 5 % verzinst.
Auf welchen Betrag wächst das Kapital bei
    a) jährlicher
    b) halbjährlicher
    c) vierteljährlicher Verzinsung?

28. Die Anzahl Amöben in einer Population wird durch folgende Tabelle beschrieben:

Zeit (h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl	120	145	173	208	245	300	360	430	520

    a) Wie viele Amöben sind nach 10, 11, 12, n Stunden vorhanden?
    b) Wie groß ist der Anfangsbestand?
    c) Wie viele Amöben sind nach 9,5 Stunden vorhanden?

29. Eine Familie hatte von einem Maler ein Gemälde für 6200 € gekauft. Als der Maler unterdessen Weltruf erlangt hatte, wurden der Familie nach 10 Jahren 25000 € geboten.
Wieviel Prozent p.a. (per anno) betrug der Wertzuwachs?

30. Für einen Wald, der jetzt 30800 m^3 Holz enthält, beträgt der Zuwachs 2 % p.a. Wie groß ist der Bestand nach 9 Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres 1300 m^3 geschlagen werden?

Finanzmathematik

22. Ein Patenonkel zahlt für sein Patenkind von dessen 1. bis zum 10. (einschließlich) Geburtstag jeweils 100 € auf ein Sparkonto ein. Wie groß ist der Gesamtwert der Beträge bis zum 10. Geburtstag geworden, $p = 6\,\%$? 1318,08

23. Zu Beginn eines jeden Jahres zahlt ein Sparer 1000 € auf sein Sparkonto ein, und zwar 10mal, $p = 6\,\%$. Über welchen Betrag verfügt er am Erde des 10. Jahres? 13971,64

24. Welches Kapital B_0 (Barwert) muss am Anfang des Jahres vorhanden sein, damit 4 Jahre lang am Ende des Jahres (nachschüssig) eine Rente von 500 € ausgezahlt werden kann, $p = 5\,\%$. 1772,98

25. Ein verunglückter Bergmann erhält jährlich 16000 € Unfallrente und zwar 25 Jahre lang. Welchen Wert hat die Unfallrente, $p = 4\,\%$. (Der Wert ist derjenige Betrag, der zum jetzigen Zeitpunkt vorhanden sein muss, um die Rentenzahlungen zu ermöglichen. Dieser Betrag kann auch auf einmal ausgezahlt werden.) 249953,28 (259951,41)

26. Eine Rate von 200 € wird jeweils am Anfang des Jahres (vorschüssig) eingezahlt, und zwar 7 Jahre lang, $p = 5\,\%$. Wie groß ist das Kapital am Ende des 7. Jahres? 1709,82

27. Ein Kapital von 100 € wird 10 Jahre lang zu 5 % verzinst.
Auf welchen Betrag wächst das Kapital bei
    a) jährlicher 162,89
    b) halbjährlicher 163,86
    c) vierteljährlicher Verzinsung? 164,35

28. Die Anzahl Amöben in einer Population wird durch folgende Tabelle beschrieben:

Zeit (h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Å	120	145	173	208	245	300	360	430	520

    a) Wie viele Amöben sind nach 10, 11, 12, n Stunden vorhanden?
    b) Wie groß ist der Anfangsbestand?
    c) Wie viele Amöben sind nach 9,5 Stunden vorhanden?

29. Eine Familie hatte von einem Maler ein Gemälde für 6200 € gekauft. Als der Maler unterdessen Weltruf erlangt hatte, wurden der Familie nach 10 Jahren 25000 € geboten.
Wieviel Prozent p.a. (per anno) betrug der Wertzuwachs? 14,96 %

30. Für einen Wald, der jetzt 30800 m^3 Holz enthält, beträgt der Zuwachs 2 % p.a. Wie groß ist der Bestand nach 9 Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres 1300 m^3 geschlagen werden? 24126

Finanzmathematik

31. Ein Student hebt von seinem 12000 € großen Vermögen am Anfang jeden Jahres 2000 € ab. Wie groß ist sein Vermögen am Ende seines 10-semestrigen Studiums? ($p = 5\,\%$)

32. Eine Frau hat zur Unterstützung ihres Bruders 30000 € am Anfang des Jahres angelegt, damit er 10 Jahre etwas davon hat. Welcher Betrag kann ihm jährlich am Ende des Jahres bei $p = 4\,\%$ ausgezahlt werden?

33. Ein Bäckermeister setzt sich mit 200000 € Vermögen zur Ruhe. Für den Lebensunterhalt hebt er 4000 € am Anfang jeden Jahres ab. Wie groß ist sein Vermögen nach 10 Jahren? ($p = 4\,\%$)

34. Es soll eine 20-jahrelang andauernde nachschüssige Rente von 1500 € und $p = 4\,\%$ p.a. wegen Umstellung auf geänderte Anlagemöglichkeiten in eine nachschüssige 15jährige Rente zu 4,5 % verwandelt werden. Wie groß ist die Rente?

35. Ein Hofbesitzer hat seine Feldfrüchte gegen Feuer und Hagel auf 5 Jahre versichert. Er will die Zahlungen einmalig ablösen. Wieviel muss er bezahlen, wenn die jährliche Prämie 28 € betragen soll? ($p = 4\,\%$)

36. Beim Münchner Oktoberfest wurden aus einem 152 *l*-Fass 198 Maß gezapft.
Wieviel Prozent fehlte an jedem Maß?

Finanzmathematik

31. Ein Student hebt von seinem 12000 € großen Vermögen am Anfang jeden Jahres 2000 € ab. Wie groß ist sein Vermögen am Ende seines l0-semestrigen Studiums? ($p = 5\,\%$) 3710

32. Eine Frau hat zur Unterstützung ihres Bruders 30000 € am Anfang des Jahres angelegt, damit er 10 Jahre etwas davon hat. Welcher Betrag kann ihm jährlich am Ende des Jahres bei $p = 4\,\%$ ausgezahlt werden? 3557

33. Ein Bäckermeister setzt sich mit 200000 € Vermögen zur Ruhe. Für den Lebensunterhalt hebt er 4000 € am Anfang jeden Jahres ab. Wie groß ist sein Vermögen nach 10 Jahren? ($p = 4\,\%$) 246100

34. Es soll eine 20-jahrelang andauernde nachschüssige Rente von 1500 € und $p = 4\,\%$ p.a. wegen Umstellung auf geänderte Anlagemöglichkeiten in eine nachschüssige 15jährige Rente zu 4,5 % verwandelt werden. Wie groß ist die Rente? 1897

35. Ein Hofbesitzer hat seine Feldfrüchte gegen Feuer und Hagel auf 5 Jahre versichert. Er will die Zahlungen einmalig ablösen. Wieviel muss er bezahlen, wenn die jährliche Prämie 28 € betragen soll? ($p = 4\%$) 129,50

36. Beim Münchner Oktoberfest wurden aus einem 152 l-Fass 198 Maß gezapft. Wieviel Prozent fehlte an jedem Maß? 23 %

Summenformel für arithmetische Reihen

Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis n?

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & ... & + & 2 & + & 1 \end{array}\right\}+$$

Idee: Reihe umkehren

$$s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Diese Überlegung lässt sich auf beliebige arithmetische Reihen verallgemeinern:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & + & (a_1+d) & + & (a_1+2d) & + & ... & + & (a_n-d) & + & a_n \\ a_n & + & (a_n-d) & + & (a_n-2d) & + & ... & + & (a_1+d) & + & a_1 \end{array}\right\}+$$

$$s_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

$$\begin{aligned} &a_1 \\ &a_2 = a_1 + d \\ &a_3 = a_1 + 2\,d \\ &\quad\vdots \\ &a_n = a_1 + (n-1)\,d \end{aligned}$$

Summenformel für geometrische Reihen

Zunächst wieder ein Beispiel:

$$\left.\begin{array}{rcl} s_8 &=& 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \qquad \mid \cdot 2 \\ s_8\cdot 2 &=& \phantom{1 +{}} 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 \end{array}\right\}-$$

$$\begin{aligned} s_8 - s_8\cdot 2 &= 1-256 \\ s_8\,(1-2) &= 1-256 \\ s_8 &= 255 \end{aligned}$$

Nun der allgemeine Fall:

$$\left.\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + a_1\,q + a_1\,q^2 + ... + a_1\,q^{n-2} + a_1\,q^{n-1} \qquad \mid \cdot q \\ s_n\cdot q &=& \phantom{a_1 +{}} a_1\,q + a_1\,q^2 + ... + a_1\,q^{n-2} + a_1\,q^{n-1} + a_1\,q^n \end{array}\right\}-$$

$$\begin{aligned} s_n - s_n\cdot q &= a_1 - a_1\,q^n \\ s_n\,(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ s_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_1 \\ &a_2 = a_1\,q \\ &a_3 = a_1\,q^2 \\ &\quad\vdots \\ &a_n = a_1\,q^{n-1} \end{aligned}$$

beachte: n ist die Anzahl der Summanden

Finanzmathematik

Ein reicher Mann ist oft ein armer
Mann mit sehr viel Geld.
Aristoteles Onassis

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

n ist die Anzahl der Summanden

In der Finanzmathematik ist es erforderlich, Summen der Art

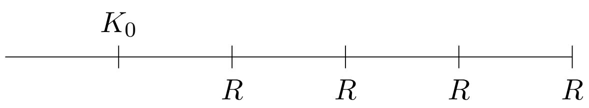
$$* \qquad K = R + Rq + Rq^2 + Rq^3 + \ldots + Rq^n$$
$$** \qquad K = Rq + Rq^2 + Rq^3 + \ldots + Rq^n$$

zusammenzufassen.

Hierbei handelt es sich stets um geometrische Reihen.
Es sind nur a_1 und die Anzahl der Summanden abzulesen und in die Summenformel einzusetzen.

$*$ $\quad a_1 = R \quad$ Anzahl der Summanden: $n+1$

$**$ $\quad a_1 = Rq \quad$ Anzahl der Summanden: n



$n = 4$
nachschüssig (am Ende des Jahres)

$$K_n = R + Rq + Rq^2 + Rq^3 + \ldots + Rq^{n-1}$$

Sparkassenformel für den Kapitalaufbau

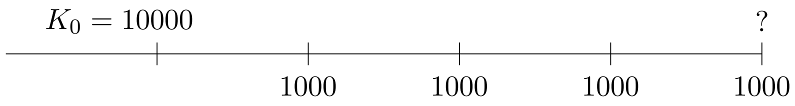
Wird K_0, dem Anfangskapital, über n Jahre jährlich die Rate R (nach- bzw. vorschüssig) hinzugefügt, so gilt für den Kontostand nach n Jahren:

nachschüssig: $\quad K_n = K_0q^n + \dfrac{R(q^n-1)}{q-1}$ $\qquad$ vorschüssig: $\quad K_n = K_0q^n + \dfrac{Rq(q^n-1)}{q-1}$

Auszahlungen und Barwerte

Der sicherste Reichtum ist die
Armut an Bedürfnissen.
Franz Werfel

a) Frau M. hat 10000 € auf ihrem Sparkonto, $p = 5\,\%$. Jeweils nach einem Jahr hebt sie 1000 € ab, und zwar 4mal. Wie hoch ist der Kontostand nach der letzten Abhebung?



Kontostand nach dem	1. Jahr	(nach erfolgter Abhebung)	:	$10000q - 1000$
	2. Jahr		:	$(10000q - 1000)q - 1000$
		oder	:	$(K_0q - R)q - R$
	3. Jahr		:	$((K_0q - R)q - R)q - R$
	4. Jahr		:	$(((K_0q - R)q - R)q - R)q - R$
			$=$	$((K_0q^2 - Rq - R)q - R)q - R$
			$=$	$(K_0q^3 - Rq^2 - Rq - R)q - R$
		$*$	$=$	$K_0q^4 - Rq^3 - Rq^2 - Rq - R$
			$=$	$K_0q^4 - (Rq^3 + Rq^2 + Rq + R)$
			$=$	$K_0q^4 - \dfrac{R(q^4-1)}{q-1} = 7844{,}94$ [€]

Mit einer einfachen Überlegung gelangen wir sofort zur $*$-Zeile.
Falls Frau M. nichts abheben würde, beliefe sich das Endkapital auf K_0q^4.
Da sie nach einem Jahr eine Rate R abhebt, die Zinseszinsen für R aber in K_0q^4 enthalten sind, beträgt das Restkapital $K_0q^4 - Rq^3$.
Die weiteren Abhebungen sind entsprechend zu berücksichtigen.

Sparkassenformel für den Kapitalabbau

Werden die (nach- bzw. vorschüssigen) Raten vom Guthaben K_0 abgehoben, so wird das aufgezinste Anfangskapital um den Rentenendwert nach n Jahren vermindert:

nachschüssig: $K_n = K_0q^n - \dfrac{R(q^n-1)}{q-1}$ vorschüssig: $K_n = K_0q^n - \dfrac{Rq(q^n-1)}{q-1}$

Auszahlungen und Barwerte

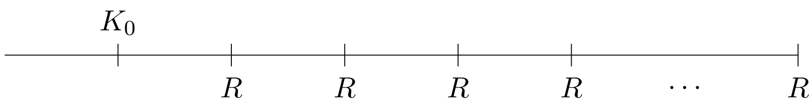
b) Welchen Betrag (Barwert) müsste Frau M. auf ihrem Sparkonto haben, damit sie 15mal 1000 € abheben kann?

1. Lösung: Eine Verallgemeinerung der obigen Überlegung führt zum Ansatz:

$$K_0 q^{15} - \frac{R(q^{15}-1)}{q-1} \;=\; 0$$

umgestellt:
$$K_0 \;=\; \frac{R}{q^{15}} \cdot \frac{q^{15}-1}{q-1} \;=\; 10379{,}66$$

2. Lösung:



Damit Frau M. nach einem Jahr die Rate R abheben kann, muss

$$K_0 = \frac{R}{q} \qquad \text{betragen.}$$

Damit sie überdies am Ende der 2. Jahres die Rate R abheben kann, muss

$$K_0 = \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} \qquad \text{betragen.}$$

Damit sie 15mal die Rate R abheben kann, muss

$$K_0 = \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \frac{R}{q^3} + \ldots + \frac{R}{q^{15}} \qquad \text{sein.}$$

Wir fassen zusammen:
$$K_0 = \frac{R}{q} \cdot \frac{\frac{1}{q^{15}} - 1}{\frac{1}{q} - 1} \;=\; 10379{,}66$$

Barwerte

Sparkassenformel für den Kapitalabbau

Werden die (nach- bzw. vorschüssigen) Raten vom Guthaben K_0 abgehoben, so wird das aufgezinste Anfangskapital um den Rentenendwert nach n Jahren vermindert:

nachschüssig: $K_n = K_0 q^n - \dfrac{R(q^n - 1)}{q - 1}$ vorschüssig: $K_n = K_0 q^n - \dfrac{Rq(q^n - 1)}{q - 1}$

Für den Barwert wird in der Sparkassenformel $K_n = 0$ gesetzt und nach K_0 umgestellt:

Die Berechnung des Rentenbarwertes K_0 erfolgt mit den Formeln:

nachschüssig: $K_0 = \dfrac{R}{q^n} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ vorschüssig: $K_0 = \dfrac{R}{q^{n-1}} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Ist der Barwert einer nachschüssigen Rente gegeben,
so folgt aus der Barwertformel durch Umstellung nach n:

$$n = -\frac{\lg\left(1 - \frac{K_0}{R}(q - 1)\right)}{\lg q}$$

Beachte beim Umformen: $\dfrac{R}{q^n} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = \dfrac{R}{q - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$ und $\lg(q^{-n}) = -n \lg q$

Tilgungsrechnen

Das Wesen einer Anleihe (eines Darlehens) besteht darin, dass der Entleiher entsprechend den Vereinbarungen des Anleihevertrages Zinsen zahlen und die Schuldsumme tilgen muss.

1. Gleiche Tilgungsraten

   Zum Wiederaufbau eines Wohnhauses benötigt B ein Darlehen von 30000 €.
   Er bekommt es zu folgenden Bedingungen:
   Das Darlehen ist in 5 gleichgroßen Tilgungsraten in 5 Jahren bei 5 % Zinsen zurückzuzahlen.

$$\text{Tilgungsrate:} \quad \frac{\text{Darlehenssumme}}{\text{Anzahl der Tilgungsraten}} = \frac{30000}{5} = 6000 \ [€]$$

$$\begin{aligned} \text{Zinsen:} \quad 1.\quad & \frac{30000 \cdot 5}{100} = 1500 \ [€] \\ 2.\quad & \frac{24000 \cdot 5}{100} = 1200 \ [€] \\ & \text{usw.} \end{aligned}$$

Tilgungsplan (Annuität = Tilgungs- + Zinsrate):

Jahre	Zinsen [€]	Tilgung [€]	Annuität [€]	Restschuld [€]
1	1500	6000	7500	24000
2	1200	6000	7200	18000
3	900	6000	6900	12000
4	600	6000	6600	6000
5	300	6000	6300	–
	4500	30000	34500	–

Dieser Tilgungsplan hat den Nachteil, dass die in arithmetischer Reihe fallenden Annuitäten (jährliche Zahlungen) den Schuldner in den ersten Jahren stark belasten. In der Praxis geschieht die Tilgung meistens so, dass die Gesamtschuld (Tilgung + Zinsen) gleichmäßig auf die einzelnen Rückzahlungstermine verteilt wird.

2. Gleiche Annuitäten

Die Annuitäten A können als nachschüssige Rente betrachtet werden, deren Barwert K_0 ist.
Mit einer Zahlung von A z. B. nach 10 Jahren wird die Schuld (lediglich) um $\frac{A}{q^{10}}$ verringert.
Die Differenz besteht aus den zu zahlenden Zinsen.

$$K_0 = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Alternativ kann von der Überlegung der Auszahlungen (hier Einzahlungen A) ausgegangen werden.

$$\begin{array}{llll}
\text{Restschuld nach dem} & \text{1. Jahr} & \text{(nach erfolgter Einzahlung)} & : K_0q - A \\
& \text{2. Jahr} & & : (K_0q - A)q - A \\
& \text{3. Jahr} & & : ((K_0q - A)q - A)q - A \\
& \text{4. Jahr} & & : (((K_0q - A)q - A)q - A)q - A \\
& & & = K_0q^4 - \dfrac{A(q^4 - 1)}{q - 1}
\end{array}$$

$$K_0q^n - \frac{A(q^n - 1)}{q - 1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = K_0q^n \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

Die anfängliche Schuld K_0 wird durch n gleiche Annuitäten getilgt (verzehrt).

Um einen Vergleich beider Tilgungsarten zu erhalten, soll von dem Beispiel gleicher Tilgungsraten ausgegangen werden. Das Darlehen beträgt 30000 €.
Es ist ebenfalls in 5 Jahren bei 5 % Zinsen zurückzuzahlen.

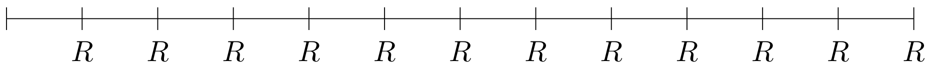
$$A = \frac{30000}{4{,}32948} = 6929{,}10 \; [€]$$

Tilgungsplan:

Jahre	Zinsen [€]	Tilgung [€]	Annuität [€]	Restschuld [€]
1	1500,00	5429,10	6929,10	24570,90
2	1228,54	5700,56	6929,10	18870,34
3	943,52	5985,58	6929,10	12884,76
4	644,24	6284,86	6929,10	6599,90
5	330,00	6599,11	6929,10	–
	4646,30	29999,21	34645,50	–

Jahresersatzrate R_E

Rentenzahlungen werden häufig unterjährig (meist monatlich, vierteljährlich oder halbjährlich) geleistet. Für diese Zahlungen wird eine gleichwertige Jahresersatzrate (stets nachschüssig) errechnet, die dann in die Formeln für Auszahlungen und Barwerte eingeht.



Herr L. zahlt auf ein Konto monatlich am Monatsletzten (also nachschüssig) jeweils 800 € ein.
Es werden ihm 3 % Zinsen geboten. Wie hoch ist der Kontostand am Ende des ersten Jahres, nachdem er zwölf Zahlungen geleistet hat?

Die erste Einzahlung (Rentenrate) wird elf Monate verzinst, die zweite zehn Monate usw.
Die letzte Einzahlung am Jahresende bringt keinen Zinsertrag. Da innerhalb eines Jahres mit einfachen Zinsen gerechnet wird, gilt für die am Jahresende gezahlten Zinsen:

$$\begin{aligned}
Z &= 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{11}{12} + 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{10}{12} + 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{9}{12} + \ldots + 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{0}{12} \\
&= 800 \cdot 0{,}03 \cdot \left(\frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \ldots + \frac{0}{12}\right) \\
&= 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12} \cdot \underbrace{\left(11 + 10 + 9 + \ldots + 0\right)}_{\text{arithm. Reihe}} \\
&= 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} \\
&= 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

$$11 + 10 + 9 + \ldots + 0 = \frac{(11+0) \cdot 12}{2} = \frac{11 \cdot 12}{2}$$

Insgesamt befindet sich daher am Jahresende die folgende Summe auf dem Konto von L.

$$\begin{aligned}
K &= 12 \cdot 800 + 800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{11}{12} \\
&= 800\left[12 + \frac{0{,}03}{2}(12-1)\right] =
\end{aligned}$$

Die Jahresersatzrate für m unterjährige Raten R lautet daher:

nachschüssig: $R_E = R\left[m + \frac{p}{2}(m-1)\right]$ vorschüssig: $\overline{R_E} = R\left[m + \frac{p}{2}(m+1)\right]$

Um von jährlichen auf unterjährliche Raten umzurechnen,
sind die Formeln nach R umzustellen.

nachschüssig: $R = \dfrac{2R_E}{2m + p(m-1)}$ vorschüssig: $R = \dfrac{2\overline{R_E}}{2m + p(m+1)}$

Frau H. zahlt 20 Jahre lang an eine Lebensversicherung monatlich nachschüssig 200 €.
Über welche Summe kann sie bei einer Verzinsung von $p = 3\,\%$ p.a. nach Beendigung der Sparphase verfügen?

Frau H. zahlt 20 Jahre lang an eine Lebensversicherung monatlich nachschüssig 200 €.
Über welche Summe kann sie bei einer Verzinsung von $p = 3\,\%$ p.a. nach Beendigung der Sparphase verfügen?

Zunächst rechnen wir mit der Formel

nachschüssig: $R_E = R\big[m + \frac{p}{2}(m-1)\big]$

aus, welcher Betrag jährlich (nachschüssig) zu der monatlichen Rate äquivalent ist:

$$R_E = 200\big[12 + \tfrac{0{,}03}{2}(12-1)\big] = 2433 \text{ [€]}$$

Nun kann der Rentenendwert der über 20 Jahre nachschüssig gezahlten Rente R_E berechnet werden:

$$\begin{aligned} K &= R + Rq + Rq^2 + \ldots + Rq^{19} && \text{20 Summanden} \\ &= \frac{R_E(1{,}03^{20} - 1)}{1{,}03 - 1} \\ &= 65375{,}62 \text{ [€]} \end{aligned}$$

Ein Student benötigt einen Kredit. Aufgrund einer Nebenbeschäftigung glaubt er, 3 Jahre lang monatlich nachschüssig 150 € zurückzahlen zu können. Er hat von der Bank ein Angebot mit einer Verzinsung von 6 % p.a. Welchen Kreditbetrag kann er aufnehmen?

Ein Student benötigt einen Kredit. Aufgrund einer Nebenbeschäftigung glaubt er, 3 Jahre lang monatlich nachschüssig 150 € zurückzahlen zu können. Er hat von der Bank ein Angebot mit einer Verzinsung von 6 % p.a. Welchen Kreditbetrag kann er aufnehmen?

Die Aufgabenstellung entspricht der Bestimmung des Barwertes einer nachschüssigen Rente. Zunächst ist die äquivalente Jahresersatzrate zu ermitteln.

nachschüssig: $R_E = R\big[m + \frac{p}{2}(m-1)\big]$

$$R_E = 150\big[12 + \frac{0{,}06}{2}(12-1)\big] = 1849{,}50 \ [€]$$

Nun kann der Barwert der nachschüssigen Rente R_E bestimmt werden:

$$\begin{aligned} B &= \frac{R_E}{q^3} \cdot \frac{q^3-1}{q-1} \\ &= \frac{R_E}{1{,}06^3} \cdot \frac{1{,}06^3-1}{1{,}06-1} \\ &= 4943{,}74 \, [€] \end{aligned}$$

Folien Finanzmathematik Mohr
umfangreiches Übungsmaterial
Startseite