Fourier-Reihen

Beispiele

Periodenintervall T

Quadratische Abweichung

Amplitudenspektrum

Weg zum Nichtperiodischen

Komplexe Schreibweise

Fourier-Transformation

Konvergenz einer Fourier-Reihe

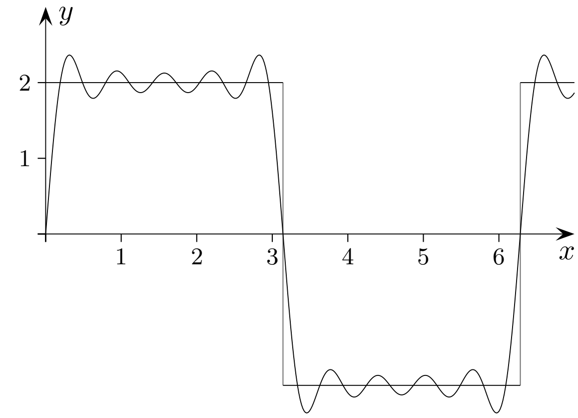
Dirichlet-Kerne

Lemma von Riemann

Satz von Dirichlet

Fejér-Kerne

Fourier-Reihen



$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{8}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x)$$

Fourier (1768 - 1830) bewies, dass periodische Funktionen (unter bestimmten Voraussetzungen) durch eine Summe einfacher trigonometrischer Funktionen approximiert werden können.
Die Güte der Näherung steigt mit der Anzahl der Summanden.

Für eine *ungerade* Funktion sei der Ansatz:

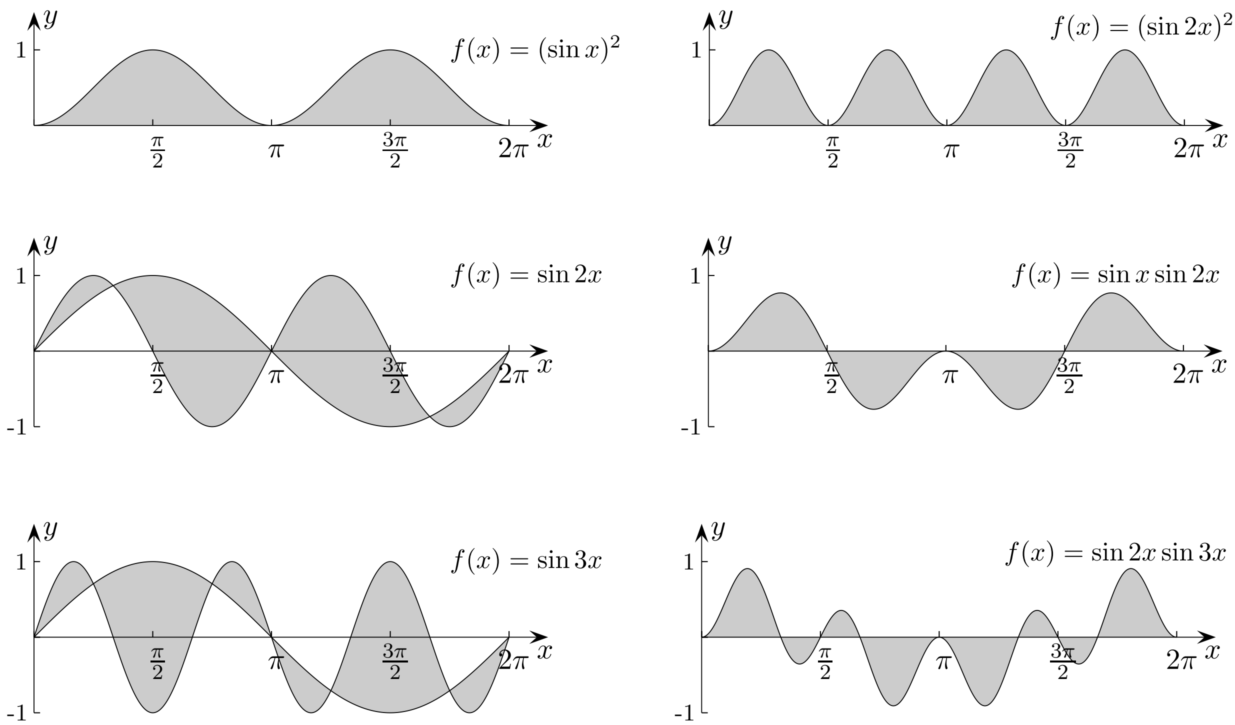
$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \dots \qquad | \cdot \sin x \quad | \cdot \sin 2x \quad | \cdot \sin 3x \quad | \dots$$

Um b_1 zu ermitteln, werden beide Seiten mit $\sin x$ multipliziert und integriert, für b_2 mit $\sin 2x$, usw.:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx = b_1 \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 + \underbrace{b_2 \int_0^{2\pi} \sin 2x \sin x + b_3 \int_0^{2\pi} \sin 3x \sin x + b_4 \int_0^{2\pi} \sin 4x \sin x + \dots}_{=0}$$

Die Sinusfunktionen haben eine erstaunliche Eigenschaft:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad \text{(kann vermutet werden, siehe Graphen)}$$



Fourier-Reihen

Die Koeffizienten der Sinus-Reihe werden daher mit

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

berechnet.

Für die Rechteckfunktion ist z. B.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\sin x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-2)\sin x\,dx = \ldots = \frac{8}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\sin 2x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-2)\sin 2x\,dx = \ldots = 0$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\sin 3x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-2)\sin 3x\,dx = \ldots = \frac{8}{3\pi}$$

Das Vorgehen kann verallgemeinert werden.
Für eine beliebige 2π-periodische Funktion erhalten wir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right]$$

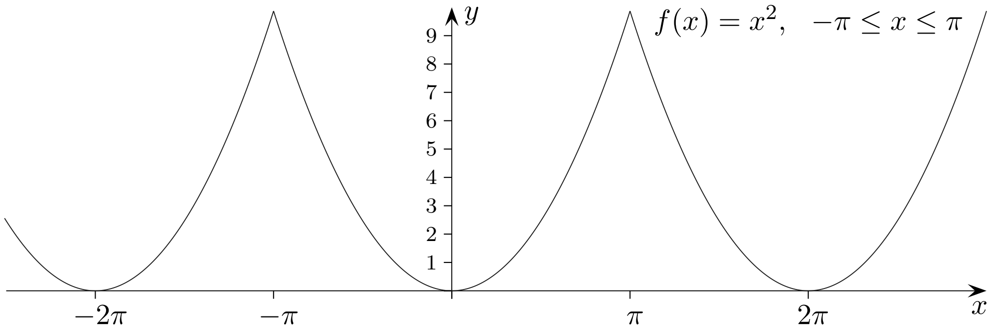
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad \text{für } n \geq 1$$

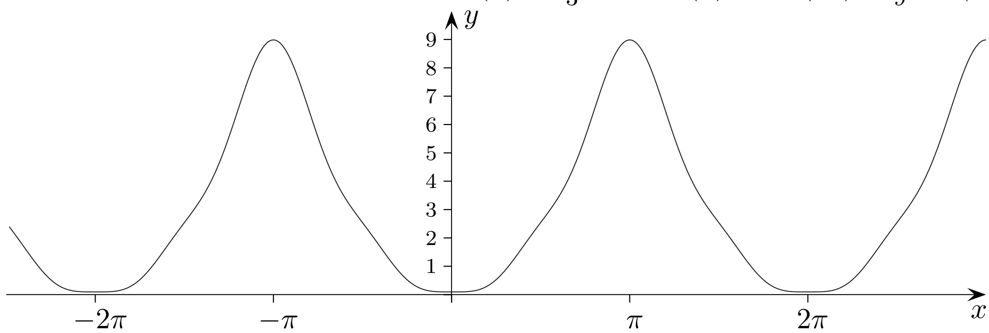
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

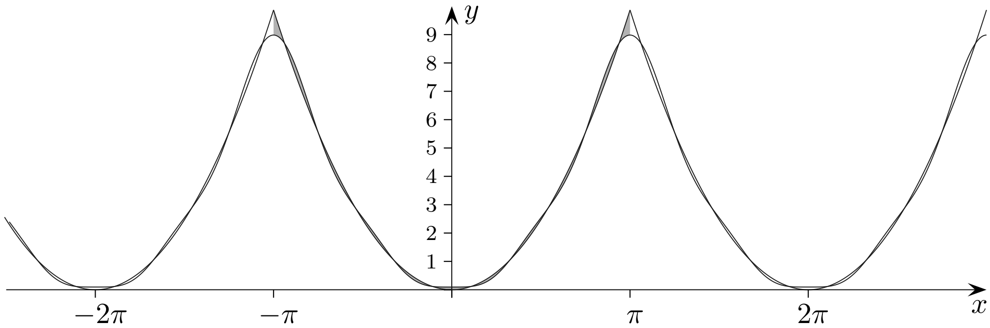
Für eine gerade Funktion (Graph zur y-Achse achsensymmetrisch) entfallen die Sinus-Terme.

Beispiel, periodische Fortsetzung



$g(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(4x)$





$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3} \qquad \text{und für } k \ge 1 \text{ gilt}$$

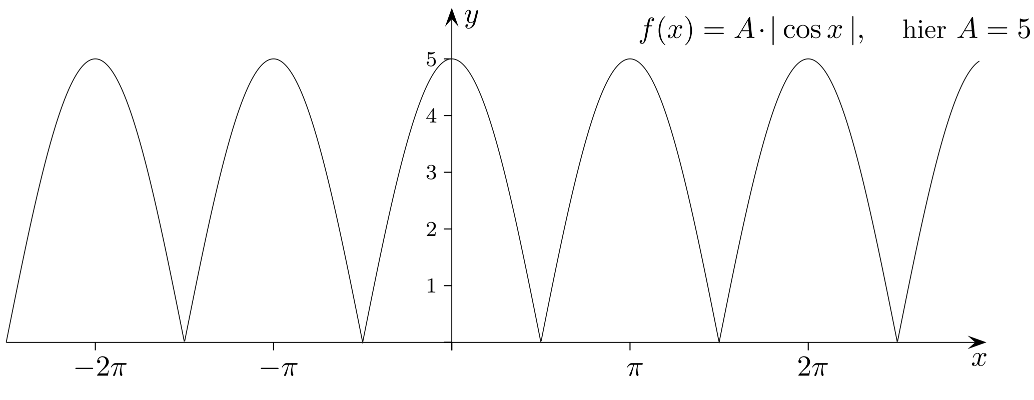
$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{\downarrow}{x^2}\, \underset{\uparrow}{\cos(kx)}\,dx = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{k}\,x^2\sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \underset{\downarrow}{x}\, \underset{\uparrow}{\sin(kx)}\,dx\Big)\\
&= 0 - \frac{4}{k\pi}\Big(-\frac{1}{k}\,x\cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\Big)\\
&= \frac{4(-1)^k}{k^2} + 0
\end{aligned}$$

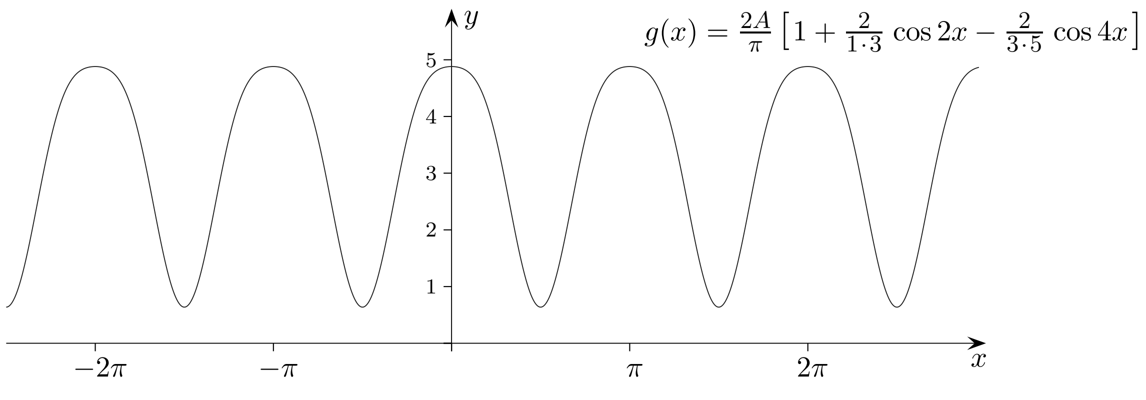
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

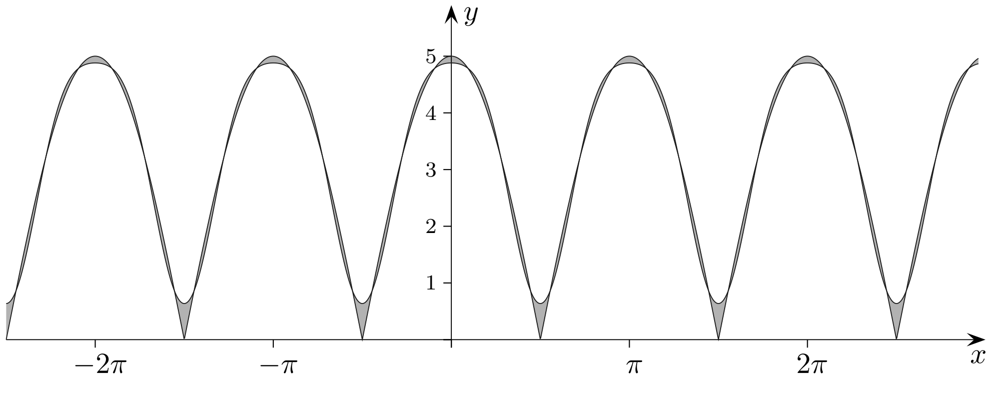
Für $x = \pi$ ergibt sich

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Beispiel, die umgeklappte Cosinus-Funktion



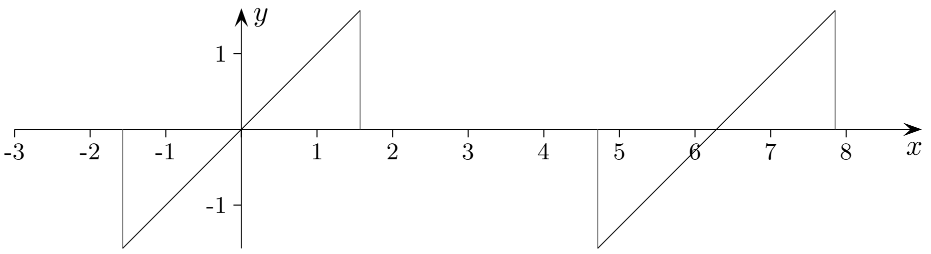




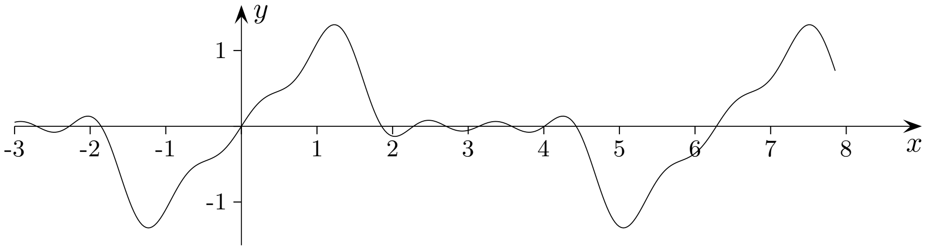
$$f(x) = \frac{2A}{\pi}\left[1 + \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{2}{5\cdot 7}\cos 6x - \ldots\right]$$

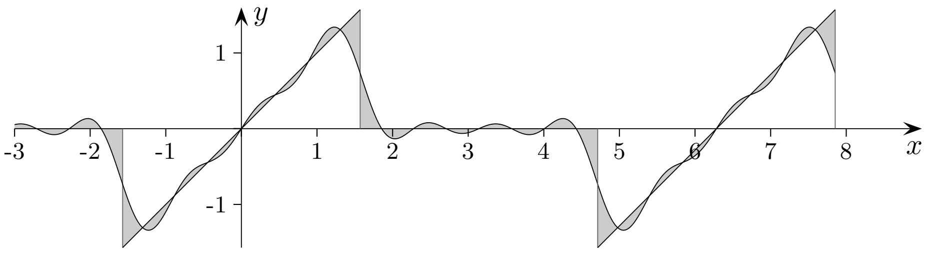
Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \;\; \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \qquad\qquad T = [-\pi, \pi]$$



$$g(x) = \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 6x$$





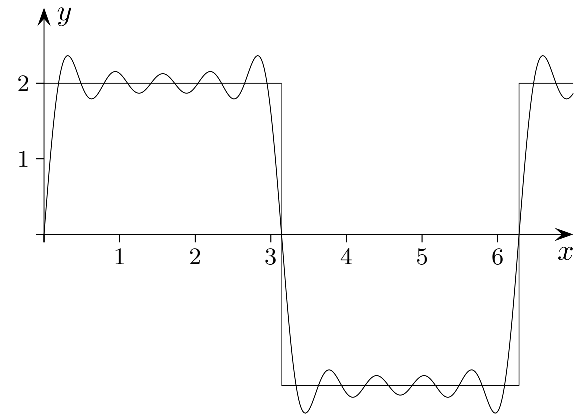
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 6x \; + \ldots$$

Periodenintervall T durch Strecken/Stauchen

$f(x+T) = f(x)$

$$[0,T] \xrightarrow{\frac{2\pi}{T}x} [0,2\pi] \xrightarrow{\sin} \sim$$

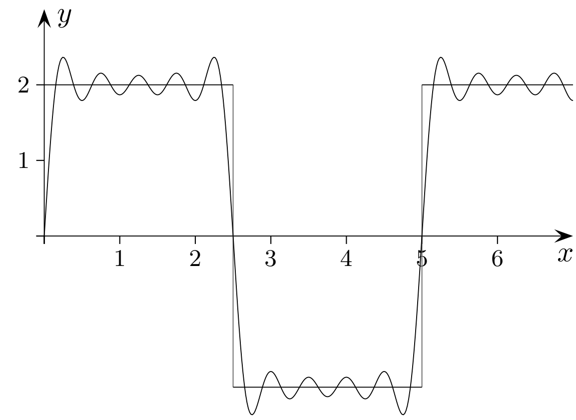
Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
ωx bildet das Intervall $[0,T]$ auf $[0,2\pi]$ ab.



$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{8}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x)$$

Sei $T = 5$.



$$g(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{5}{2} < x < 5 \end{cases}$$

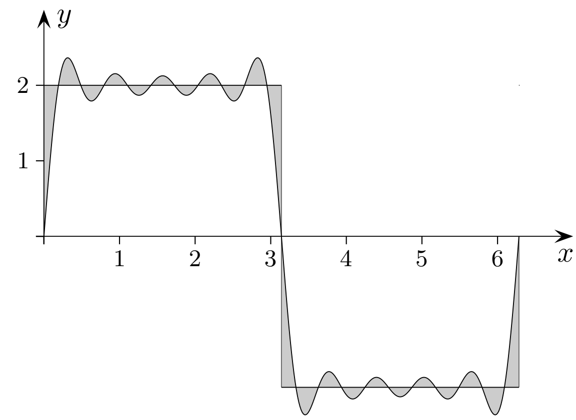
$$g(x) \approx \frac{8}{\pi}(\sin \omega x + \frac{1}{3}\sin 3\omega x + \frac{1}{5}\sin 5\omega x + \frac{1}{7}\sin 7\omega x + \frac{1}{9}\sin 9\omega x)$$

x wird in $f(x)$ lediglich durch ωx ersetzt.
Bei theoretischen Überlegungen kann man sich auf ein Periodenintervall der Länge 2π beschränken.

Quadratische Abweichung

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$g(x) \;=\; \frac{8}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x)$$



Als Maß für die Güte der Approximation eignet sich der Ausdruck:

$$F = \int_0^{2\pi} \big[f(x) - g(x)\big]^2\, dx$$

Mit dem Ansatz

$$g(x) \;=\; b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \ldots + b_8 \sin 8x + b_9 \sin 9x$$

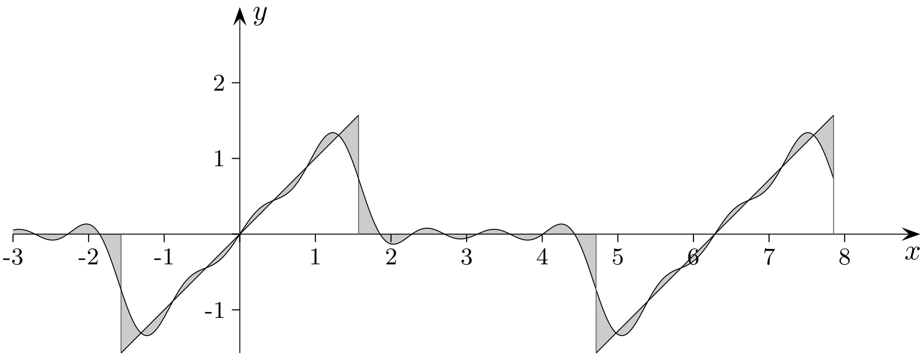
führt die Fragestellung

$$\int_0^{2\pi} \big[f(x) - g(x)\big]^2\, dx \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Minimum}$$

zu den bekannten Koeffizienten.

Hierbei sind die Klammern aufzulösen, die Sinus-Integrationsregeln anzuwenden, ein b_k als variabel zu betrachten, die partielle Ableitung zu bilden, usw.

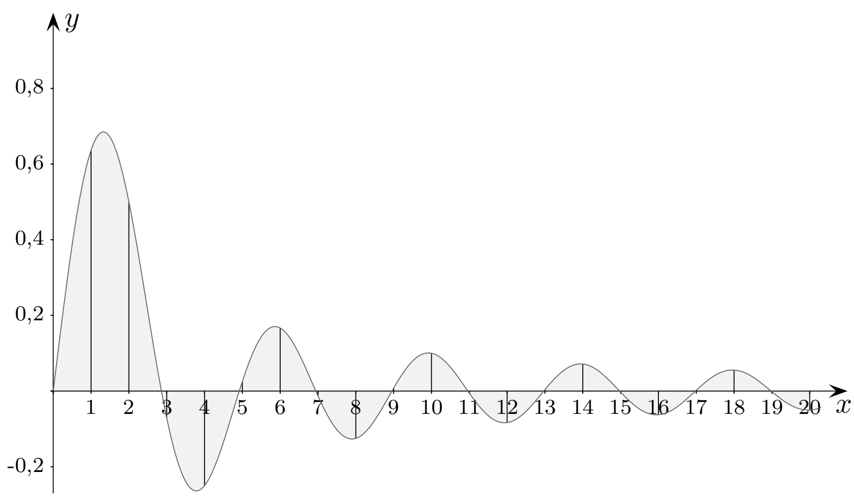
Amplitudenspektrum



$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \;\; \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \qquad T = [-\pi, \pi]$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 6x \; + \ldots$$

Einen sehr anschaulichen Einblick in die Approximation der Sägezahnfunktion gewinnt man aus dem Amplitudenspektrum. Hierbei werden die Amplituden (Koeffizienten) der einzelnen Schwingungen als Strecken dargestellt.



Zur Herkunft der Funktion beachte:

$$n \quad \longrightarrow \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2\sin\frac{\pi n}{2} - \pi n\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2\,\pi}$$

Periodenintervall T

$f(x+T) = f(x)$

$$[0,T] \xrightarrow{\frac{2\pi}{T}x} [0,2\pi] \xrightarrow{\sin} \sim$$

Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (Grundfrequenz), ωx bildet das Intervall $[0,T]$ auf $[0,2\pi]$ ab.

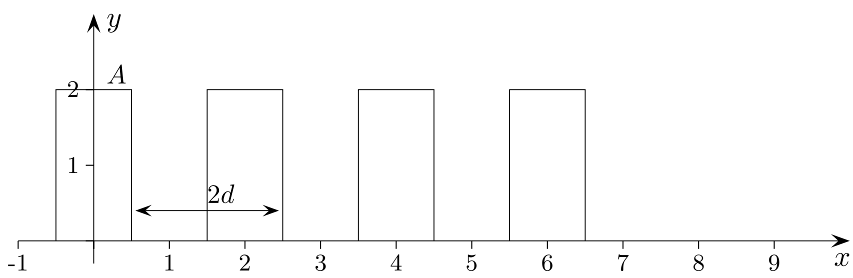
Die Herleitung der Fourier-Reihe kann verallgemeinert werden.
Für eine beliebige T-periodische Funktion erhalten wir (unter gewissen Voraussetzungen):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx \qquad \text{für } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$



Die Rechteck-Impulse haben die Breite (Dauer) d, T sei $2d$.

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos(\omega x) - \frac{2A}{3\pi}\cos(3\omega x) + \frac{2A}{5\pi}\cos(5\omega x) + \ldots$$

Für $n \geq 1$ ist:

$$n \quad \longrightarrow \quad a_n = \frac{2}{T}\, 2\int_0^{\frac{T}{4}} A\cos(n\omega x)\,dx = \ldots = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Amplitudenspektrum

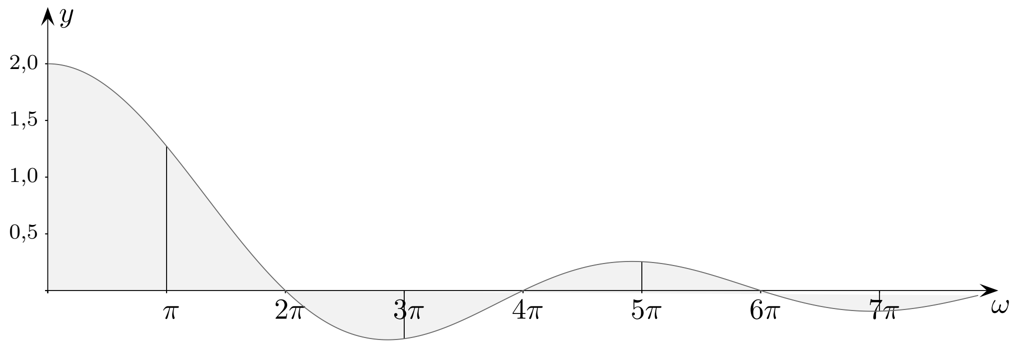
Um zu untersuchen, was passiert, wenn die Periodenlänge T vergrößert wird, und wir uns dann einer nichtperiodischen Funktion annähern, werden die Amplituden in Abhängigkeit von ω betrachtet.
Mit wachsendem T wird ω jedenfalls kleiner.

$$\begin{aligned} \omega &\longrightarrow a_1 \\ 2\omega &\longrightarrow a_2 \\ 3\omega &\longrightarrow a_3 \end{aligned}$$

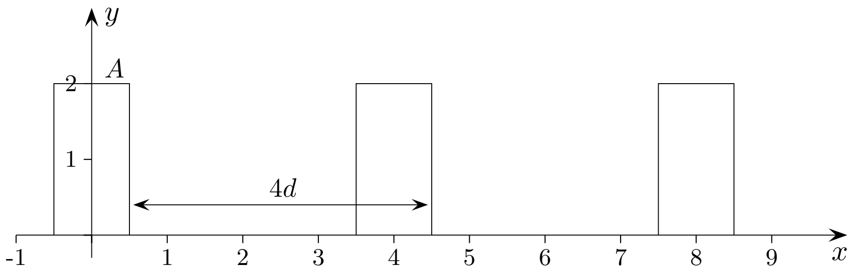
Für das vorige Beispiel ergibt sich:

$\omega = \pi$

$A(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin\frac{\omega}{2}$



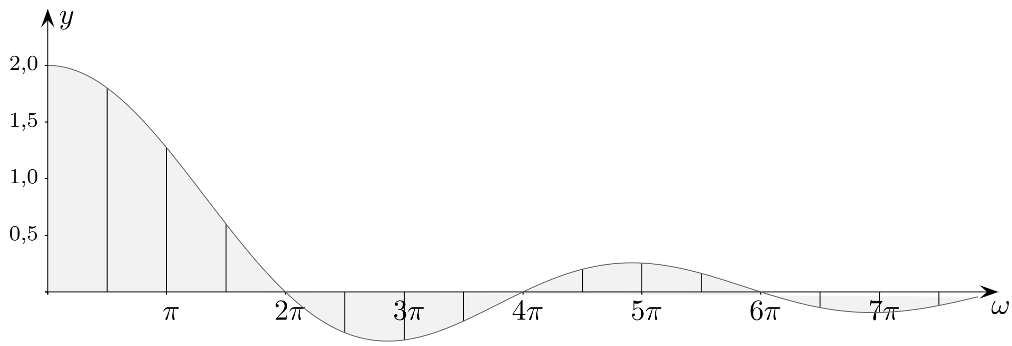
Sei nun $T = 4d$.



$\omega = \frac{\pi}{2}$

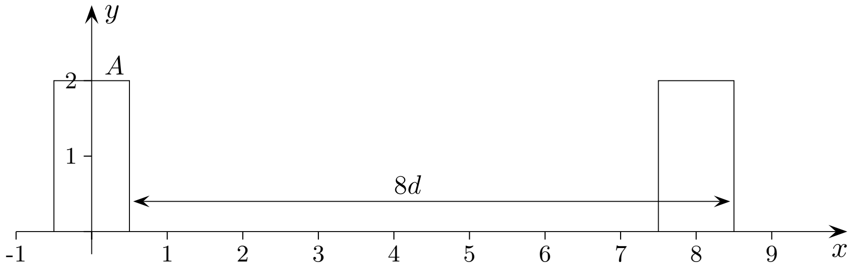
$n \quad \longrightarrow \quad a_n = \frac{8}{\pi n} \sin\frac{\pi n}{4}$

$A(\omega) = \frac{4}{\omega} \sin\frac{\omega}{2}$



Weg zum Nichtperiodischen

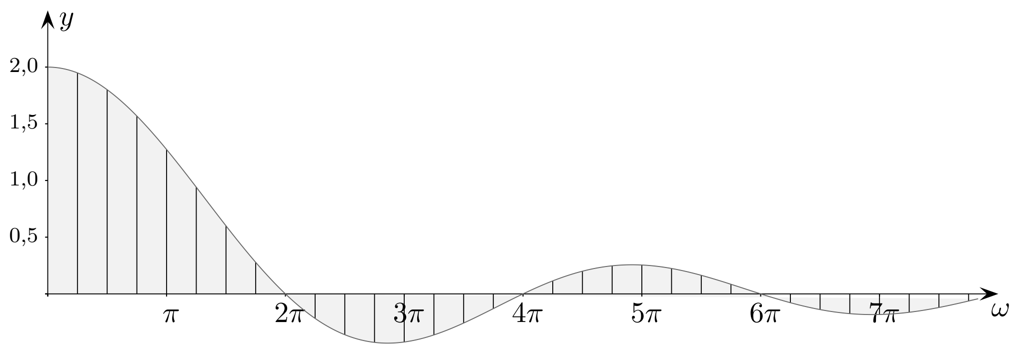
Sei nun $T = 8d$.



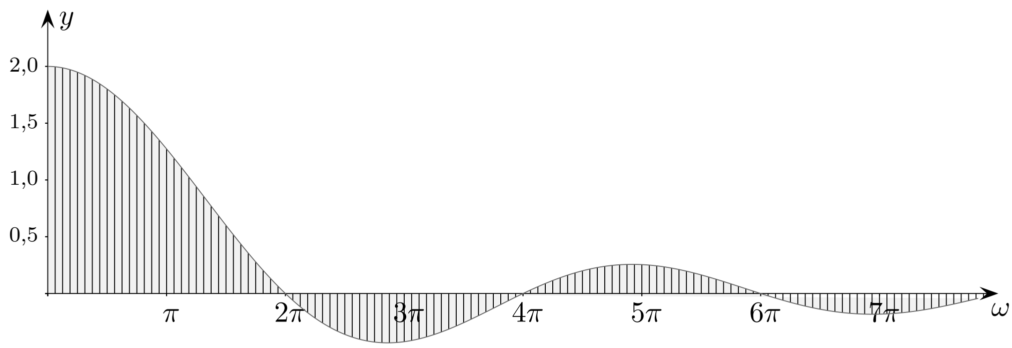
$\omega = \frac{\pi}{4}$

$n \quad \longrightarrow \quad a_n = \dfrac{16}{\pi n} \sin \dfrac{\pi n}{8}$

$A(\omega) = \dfrac{4}{\omega} \sin \dfrac{\omega}{2}$



$T = 32d$
$\omega = \frac{\pi}{16}$



Es ist offensichtlich, was für $T \longrightarrow \infty$ zu erwarten ist.
Diese Idee führt zur Fourier-Transformierten.

Komplexe Schreibweise

Die Fourier-Reihe (Periode 2π) kann mit Hilfe der komplexen Zahlen kompakt und weiterführend als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

formuliert werden.

Benötigt wird:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Umrechnung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \text{beachte:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx}$$

Damit ergibt sich:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$a_0 = 2c_0 \qquad a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

In der Funktion

$$g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-itx}\, dx$$

sind alle Koeffizienten der Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion enthalten,
wenn auch etwas versteckt.

Fourier-Transformation

Die komplexe Schreibweise für eine Fourier-Reihe mit der Periode T lautet:

$$* \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \qquad\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \ \text{(Grundfrequenz)}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

Mit c_n eingesetzt gelingt der Übergang $T \longrightarrow \infty$ in wenigen Zeilen.

Sei T groß, dann ist $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ klein (siehe Weg zum Nichtperiodischen).
$n\Delta\omega$, $n \in \mathbb{Z}$, unterteilt $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Delta\omega x}\Delta\omega \ \text{ approximiert ein Integral der Art } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega\,.$$

Das Einsetzen von

$$c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_T f(x)\, e^{-in\Delta\omega x}\, dx$$

in $*$ liefert das benötigte $\Delta\omega$. Durch Umstellen ist zu erkennen, dass

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\int_T f(x)\, e^{-in\Delta\omega x}\, dx\Big]\, e^{in\Delta\omega x}\Delta\omega$$

für $T \longrightarrow \infty$ gegen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\Big]\, e^{i\omega x}d\omega$$

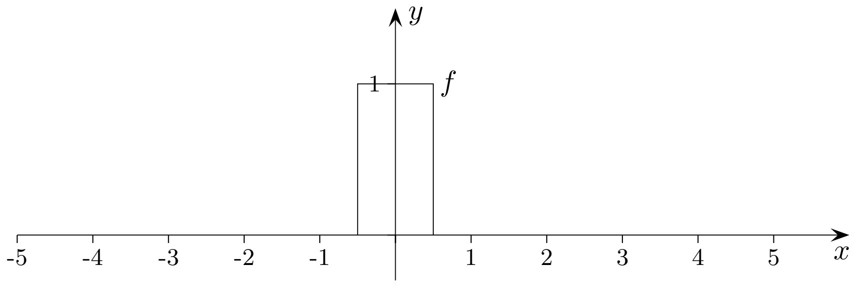
strebt.
Beachte: Die Variable ω nimmt die Werte $n\Delta\omega$ an.

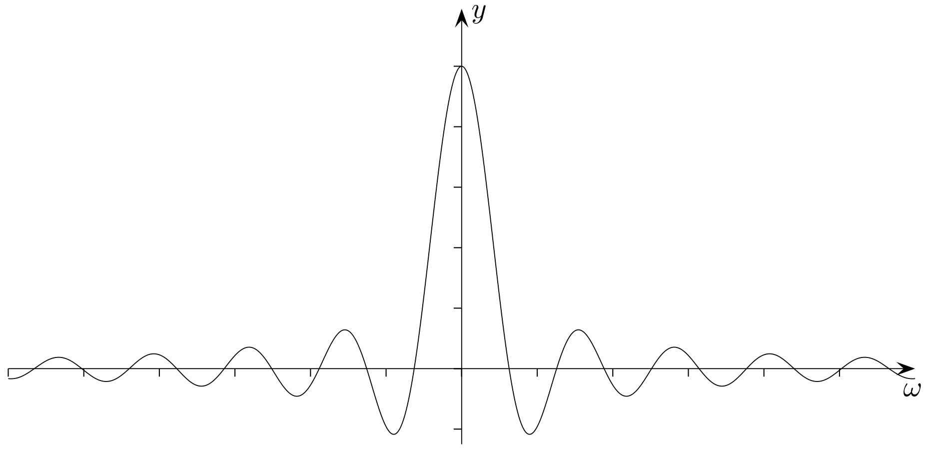
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

ist die Fourier-Tranformierte von f.
Die Rücktransformation erfolgt mit:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Fourier-Transformation





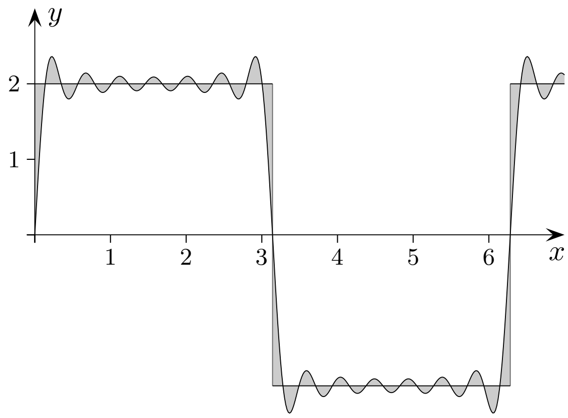
Konvergenz einer Fourier-Reihe

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \qquad \text{für } k \geq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt$$



Zu vermuten ist, dass die Teilsummen $s_n(x)$ gegen $f(x)$ (punktweise) konvergieren, genauer an den Nahtstellen gegen $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, dem Mittelwert des rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerts. Der Graph verläuft an den Nahtstellen mittig.

Zum Nachweis werden zunächst die Integralausdrücke von a_k und b_k in s_n eingesetzt und die Summe zu einem Integral zusammengefasst. Die Integrationsvariable wurde in t umbenannt, um nicht mit x in $s_n(x)$ zu kollidieren.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \big) \Big]\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \Big]}_{\frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}}}\, dt \qquad \text{Additionstheoreme} \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Formel $\quad \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \quad$ verwendet.

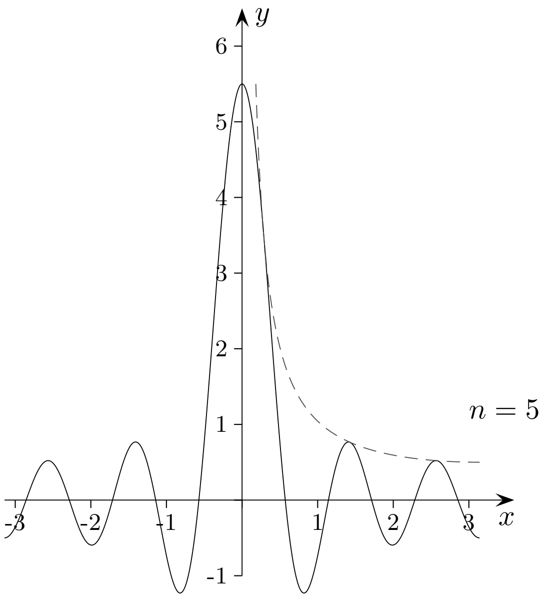
Den rechten Ausdruck kürzen wir mit $D_n(\alpha)$ ab und erhalten:

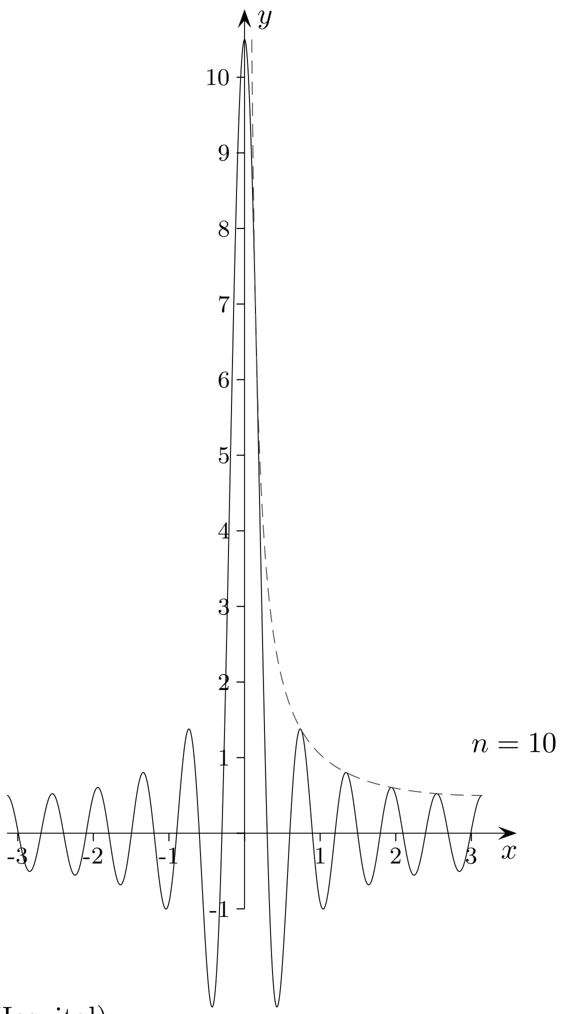
$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt$$

Die Funktion D_n heißt n-ter Dirichlet-Kern. Da f und D_n 2π-periodisch sind, ist

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)\, D_n(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, D_n(t)\, dt \qquad (\text{Substitution } u = t - x)$$

Dirichlet-Kerne





$D_n(0) := n + \frac{1}{2}$ (Grenzwert, l'Hospital)

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Beweis

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{aligned}$$

Der Übergang ins Komplexe enthüllt die dahinterliegende Struktur.

$$\frac{1}{2}\left[1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \ldots + 2\cos n\alpha\right] = \frac{1}{2}\left[1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha} + \ldots + e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}\right]$$

Das ist eine geometrische Reihe mit $2n+1$ Summanden, die von $e^{-in\alpha}$ bis $e^{in\alpha}$ läuft.
In ihr kommen Potenzen des Faktors $e^{i\alpha}$ vor.
Die Summe einer geometrischen Reihe kennen wir:

$$D_n(\alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-in\alpha}\left(1 - e^{i(2n+1)\alpha}\right)}{1 - e^{i\alpha}} \overset{\star}{=} \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(n+1/2)\alpha} - e^{-i(n+1/2)\alpha}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Beim Übergang $\star$ wurde mit $-e^{-i\alpha/2}$ erweitert.

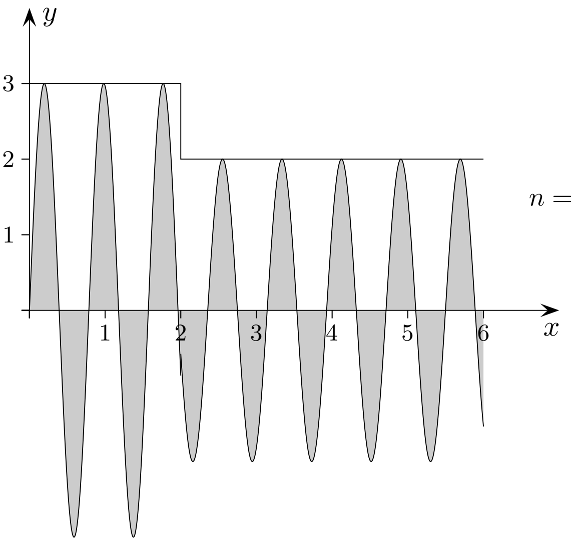
Lemma von Riemann

Für die Untersuchung der Konvergenz einer Fourier-Reihe ist der Grenzwert

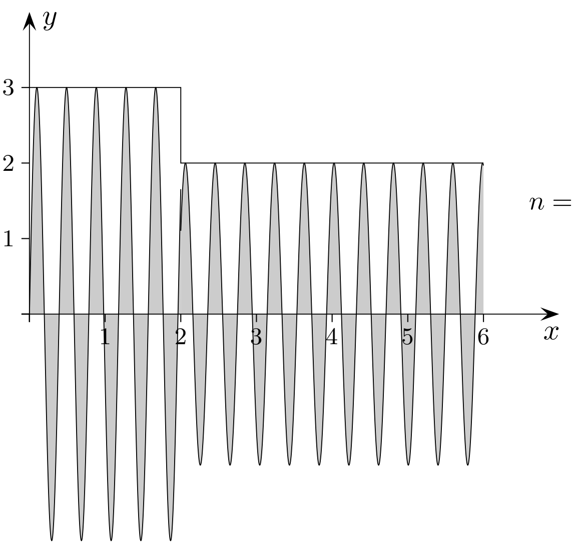
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b F(x)\,\sin(nx)\,dx = 0$$

von Bedeutung.

cos wäre auch möglich. Die Fourier-Koeffizienten bilden daher eine Nullfolge.
Der Sachverhalt soll hier für eine Treppenfunktion veranschaulicht werden.



$n = 8$



$n = 16$

Satz von Dirichlet

Eine Funktion f habe die Periode 2π. Ferner seien f und f' stückweise stetig, d. h.
weder f noch f' haben Polstellen und beide haben höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen.

Für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

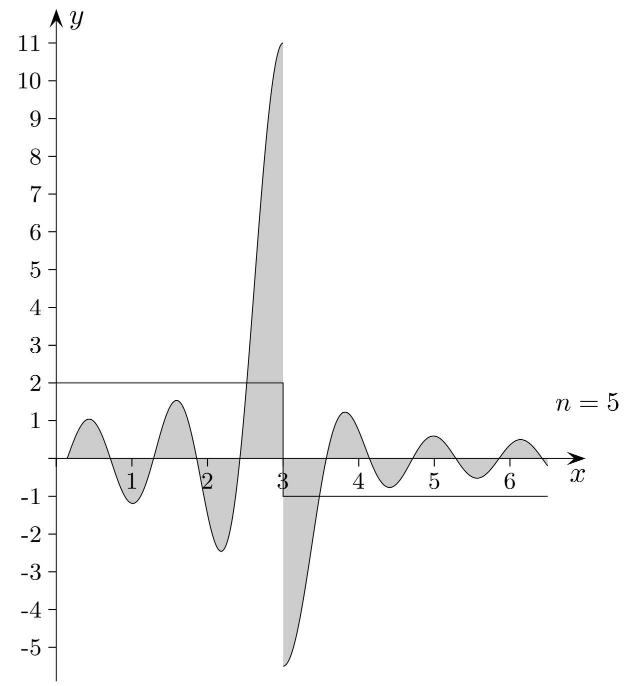
$$s_n(x) \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

An den Unstetigkeitsstellen (nur Sprünge sind zugelassen) ist also der Wert der Fourier-Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion f, sonst stimmt der Wert mit $f(x)$ überein.

Mit $\quad s_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt$

(D_n Dirichletscher Kern) und dem Lemma von Riemann gelingt der Beweis.

Die Beweisidee ist offensichtlich.
Für f wurde eine Treppenfunktion genommen.
Der Funktionswert von f an der Stelle $x = 3$ ist ohne Belang.



Die Situation erinnert an die Handhabung der Delta-Funktion.
Mit $D_n(t) = \dfrac{1}{2} + \underbrace{\cos t + \cos 2t \ldots}_{\text{Liefert beim Integrieren keinen Beitrag.}}$ ist für alle n unmittelbar ersichtlich: $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1$

Satz von Dirichlet

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt \quad\longrightarrow\quad \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

Beweis

Sei zunächst $x = 0$.
Wir teilen das Integrationsintervall und zeigen:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,dt \quad\longrightarrow\quad \frac{f(0^+)}{2} \qquad\text{und}\qquad \star\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(t)\,D_n(t)\,dt \quad\longrightarrow\quad \frac{f(0^-)}{2}$$

Hierzu wenden wir uns der Differenz zu:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,dt - \frac{f(0^+)}{2}$$

Mit $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(0^+)\,D_n(t)\,dt = \frac{f(0^+)}{2}$

kann $\displaystyle\frac{f(0^+)}{2}$ unter das Integralzeichen gezogen werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,dt - \frac{f(0^+)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(0^+)\,D_n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \big(f(t)-f(0^+)\big)\,D_n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \big(f(t)-f(0^+)\big)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \underbrace{\frac{f(t)-f(0^+)}{2\sin\frac{t}{2}}}_{F(t)}\,\sin\big((2n+1)\tfrac{t}{2}\big)\,dt \qquad\longrightarrow\qquad 0
\end{aligned}$$

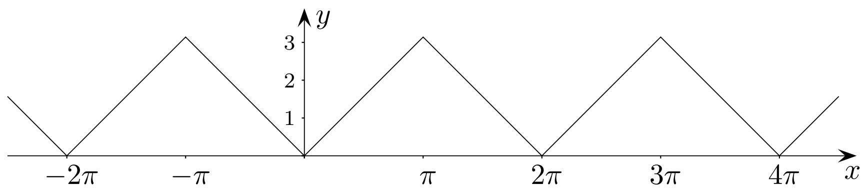
$F(t)$ wird an der Stelle $t = 0$ durch seinen Grenzwert ergänzt. Hier gehen die Eigenschaften von f ein.
Jetzt können wir das Riemannsche Lemma anwenden und erhalten das Gewünschte.
$\star$ wird analog gezeigt.

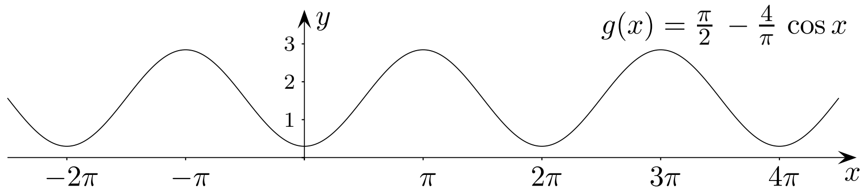
Die Aussage wird auf $x \neq 0$ mit

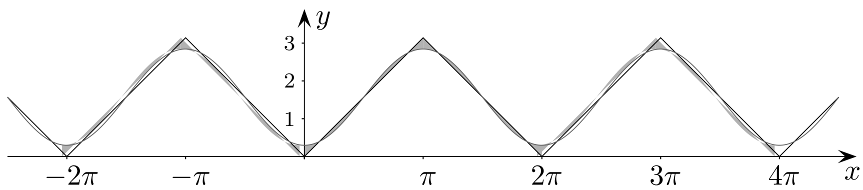
$$s_n(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,D_n(t)\,dt$$

erweitert. $f(t+x)$ wird als Funktion von t betrachtet.

Beispiel





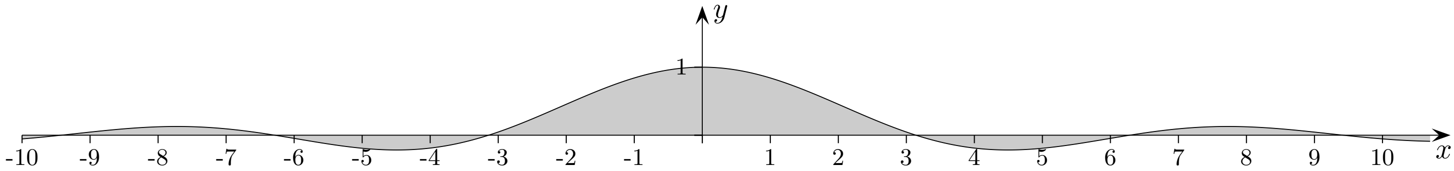


$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \Big)$$

Speziell für $x = 0$ folgt:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$$



$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t}\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}\; \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, f(t)\, dt
\end{aligned}$$

$f(0) := 1$ Grenzwert

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt \quad \longrightarrow \quad \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}$$

Aus dem Satz von Dirichlet (siehe rechts) folgt, dass das Integral gegen π strebt.

Fejér-Kern

Für eine stetige Funktion f muss die Fourier-Reihe nicht gegen f konvergieren, dies erfolgt nur fast überall (Carlson 1966).

Für eine Zahlenfolge $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} = a$$

Hiervon gilt nicht die Umkehrung.
Diese Überlegung kann auf die Partialsummenfolge einer Reihe angewendet werden.
Fejér übertrug sie auf Fourier-Reihen

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\, a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

und bewies, dass $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} \quad \longrightarrow \quad f(x)$$

gleichmäßig gegen f (stetig und 2π-periodisch vorausgesetzt) konvergiert.

$$s_k(x) \ = \ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, D_k(t)\, dt$$

$$\sigma_n(x) \ = \ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\ \underbrace{\frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1}}_{F_n(t)}\ dt$$

$$F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}$$ wird als Fejér-Kern bezeichnet.

$$D_k(t) = \frac{\sin(2k+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad k = 0 \ldots n$$

Es gilt

$$(2\sin\tfrac{t}{2})^2\, D_k(t) \ = \ 2\sin(2k+1)\tfrac{t}{2}\ \sin\tfrac{t}{2} \ = \ \cos kt - \cos(k+1)t$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\tfrac{y+x}{2}\ \sin\tfrac{y-x}{2}$$

Aufsummieren liefert

$$(2\sin\tfrac{t}{2})^2\, F_n(t) \ = \ \tfrac{1}{n+1}(1 - \cos(n+1)t\,) \ = \ \tfrac{2}{n+1}\sin^2(n+1)\tfrac{t}{2}$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Fejér-Kern

Die Herleitung von

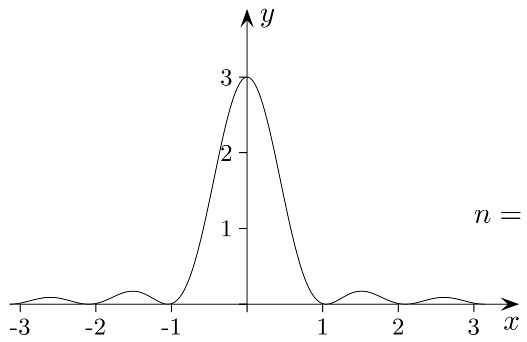
$$F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}$$

wird im Komplexen durchsichtiger:

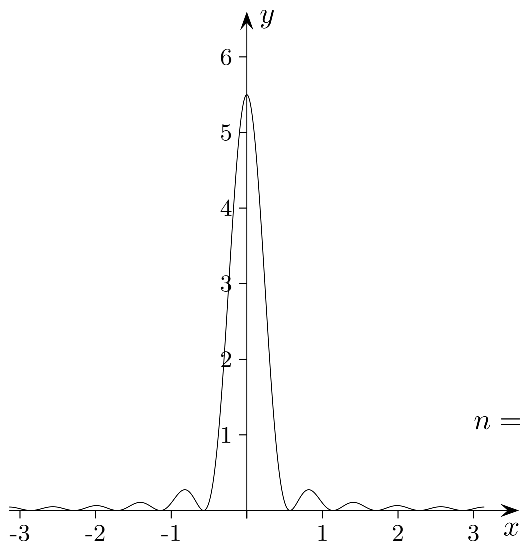
$$F_n(t) \;=\; \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}}\Big[\,\underbrace{\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)t}{2}}_{\frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}}\,\Big]$$

Zur Ermittlung der Summenformel ist das weitere Vorgehen (siehe Dirichlet-Kern) bekannt.

Fejér-Kerne



$n = 5$



$n = 10$

$D_n(0) := \frac{n+1}{2}$ (Grenzwert)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$$

Die Fejér-Kerne $F_n(t)$ bilden daher eine Delta-Funktionenfolge.

Um die (naheliegende) gleichmäßige Konvergenz von

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,F_n(t)\,dt \quad \longrightarrow \quad f(x)$$

$\varepsilon\, n_0$-mäßig nachzuweisen, sind mehrere Abschätzungen erforderlich.