Gram-Schmidt-Verfahren

Zu den Vektoren $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ des $\mathbb{R}^n$ wird eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k\}$ ($\boldsymbol{c}_i$ orthogonale Einheitsvektoren) des von den $\boldsymbol{b}_j$ aufgespannten Raumes konstruiert.

Schritt 1

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1^\circ \qquad (= \frac{1}{|\boldsymbol{b}_1|}\boldsymbol{b}_1)$$

Schritt 2

$$\boldsymbol{c}_2 = [\boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1]^\circ$$

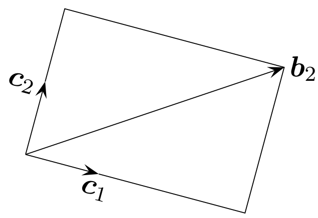
Schritt 3

$$\boldsymbol{c}_3 = [\boldsymbol{b}_3 - \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1 - \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{c}_2\rangle \cdot \boldsymbol{c}_2]^\circ$$

usw.

Für einen linear abhängigen Vektor $\boldsymbol{b}_j$ ist $\boldsymbol{c}_j$ der Nullvektor.

Die Behauptung folgt auf einfache Weise aus den Eigenschaften des Skalarprodukts.



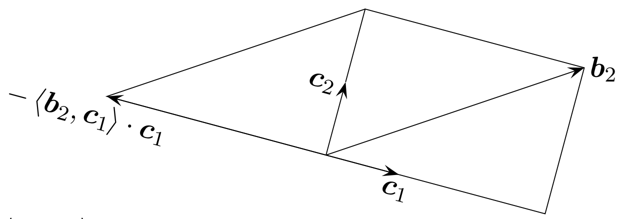
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_2 &= r\,\boldsymbol{c}_1 + s\,\boldsymbol{c}_2 \qquad | \cdot \boldsymbol{c}_1\\
\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1\rangle &= r\\
\boldsymbol{b}_2 &= r\,\boldsymbol{c}_1 + s\,\boldsymbol{c}_2 \qquad | \cdot \boldsymbol{c}_2\\
\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2\rangle &= s
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1 + \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2\rangle \cdot \boldsymbol{c}_2$$

$$\Longrightarrow$$

$$\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2\rangle \cdot \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1$$



$\boldsymbol{c}_2$ hat die Richtung von $\boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{c}_2 = [\boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1]^\circ$$

Für $\boldsymbol{b}_3$ gilt entsprechend die Linearkombination:

$$\boldsymbol{b}_3 = \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{c}_1\rangle \cdot \boldsymbol{c}_1 + \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{c}_2\rangle \cdot \boldsymbol{c}_2 + \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{c}_3\rangle \cdot \boldsymbol{c}_3, \quad \text{usw.}$$

In jedem Schritt ist $\boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{b}_k^\circ$ möglich.

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orthonormalbasis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes:

$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mache auch die Probe.

Für einen weiteren Vektor wäre

$$\boldsymbol{b}_4 = \langle \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{c}_1 \rangle \cdot \boldsymbol{c}_1 + \langle \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{c}_2 \rangle \cdot \boldsymbol{c}_2 + \langle \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{c}_3 \rangle \cdot \boldsymbol{c}_3$$

und damit

$$\boldsymbol{c}_4 = [\boldsymbol{b}_4 - \langle \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{c}_1 \rangle \cdot \boldsymbol{c}_1 - \langle \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{c}_2 \rangle \cdot \boldsymbol{c}_2 - \langle \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{c}_3 \rangle \cdot \boldsymbol{c}_3] = \mathbf{0}.$$

Startseite