Green-Funktion

Wir betrachten (z. B.) eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + y = r(x)$$

Die allgemeine Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ (Randwertaufgabe) setzt sich aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y'' + y = 0$ und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zusammen.
Für eine partikuläre Lösung wäre eine geschlossene Darstellung

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)\, r(t)\, dt$$

wünschenswert, die für alle Störfunktionen $r(t)$ gelten würde.
Die Funktion G ist nach George Green (1793-1841) benannt, der sie zur Lösung partieller Differentialgleichungen verwandte.

Das Beispiel $\quad -y'' = r(x) \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0, \quad 0 \le x \le 1$

führt durch zweimalige Integration zu einer Green-Funktion.

$$y'(x) = -\int_0^x r(t)\, dt + c_0$$

$$y(x) = -\int_0^x \Big(\int_0^t r(s)\, ds \Big) dt + c_0 x + c_1$$

Die Variablen wurden umbenannt, damit keine Kollision mit der rechten Grenze entsteht.

$$= -\int_0^x 1 \Big(\int_0^t \ \ldots \Big) dt + \ldots$$

Nun kann partiell integriert werden.
Die Idee führt hier zum Erfolg.

$$= -\left[t \int_0^t r(s)\, ds \right]_0^x + \int_0^x t \cdot r(t)\, dt + c_0 x + c_1$$

$$= \int_0^x (t - x)\, r(t)\, dt + c_0 x + c_1$$

Die Randbedingung $y(0) = 0$ liefert $c_1 = 0$.

$$= \int_0^x (t - x)\, r(t)\, dt + x \int_0^1 (1 - t)\, r(t)\, dt$$

Aus $y(1) = 0$ folgt $\displaystyle\int_0^1 (t-1)\, r(t)\, dt + c_0 = 0$

$-(t-1) = 1 - t$

$$= \int_0^x t(1 - x)\, r(t)\, dt + \int_x^1 x(1 - t)\, r(t)\, dt$$

$$\int_0^1 = \int_0^x + \int_x^1, \qquad (t - x) + x(1 - t) = t(1 - x)$$

$$= \int_0^1 G(x,t)\, r(t)\, dt$$

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x) & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

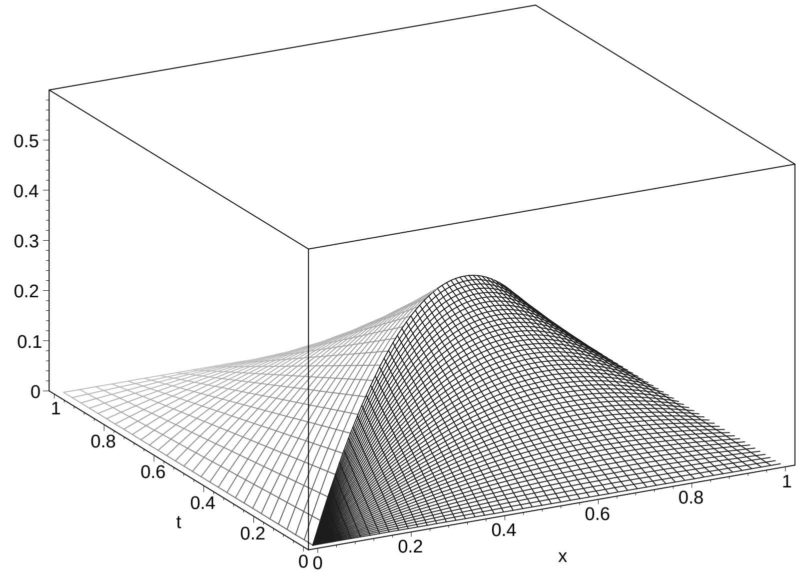
G ermöglicht eine Zusammenfassung.

Green-Funktion

$$-y'' = r(x) \quad y(0)=0,\ y(1)=0, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x) & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

Bemerkenswert: $\varphi(x) = x,\ \psi(x) = 1 - x$ bilden ein Fundamentalsystem.



G ist auf $[0,1] \times [0,1]$ stetig, in x und t symmetrisch und von der Form:

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) & (x,t) \in \Delta_1 \\ G_2(x,t) & (x,t) \in \Delta_2 \end{cases} \qquad \text{Dreieck}$$

Die Funktion $x \longrightarrow G(x,t)$ (t fest)

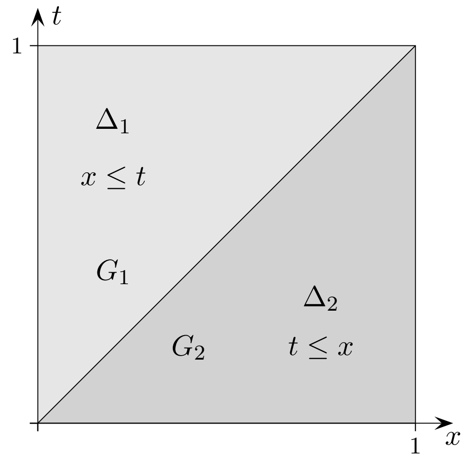
a) erfüllt die Randbedingungen,

b) ist für $x = t$ (Diagonale) nicht differenzierbar,

c) erfüllt eingeschränkt auf Δ_1 und Δ_2 die homogene DGL

d) und es gilt $\dfrac{\partial G_2(x,x)}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1(x,x)}{\partial x} = -1.$

Die Ableitung macht einen Sprung.



Green-Funktion

Um zu erkennen, aus welchen Eigenschaften der Green-Funktion

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) & (x,t) \in \Delta_1 \\ G_2(x,t) & (x,t) \in \Delta_2 \end{cases}$$

folgt, dass

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)r(t)\,dt$$

die DGL (z. B.) $\quad a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x) \quad$ Randbedingungen $\ldots, \quad a \leq x \leq b$
löst, leiten wir ab.

$$y(x) = \int_a^x G_2(x,t)r(t)\,dt + \int_x^b G_1(x,t)r(t)\,dt$$

$$y'(x) = \underbrace{\left[G_2(x,x) - G_1(x,x)\right]}_{=\,0,\text{ da } G \text{ stetig}} \cdot r(x) + \int_a^x \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\,t)r(t)\,dt$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\,t)r(t)\,dt$$

Die Ableitung erfolgt mit der Leibnizregel für Parameterintegrale.

$$= \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\,t)r(t)\,dt$$

Die 2. Ableitung wird in gleicher Weise gebildet.

$$y''(x) = \underbrace{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\,x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\,x)\right]}_{=\,\frac{1}{a_2(x)}} \cdot r(x) \;+\; \int_a^x \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x,\,t)r(t)\,dt \;+\; \int_x^b \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x,\,t)r(t)\,dt$$

Bei dieser Wahl fällt $r(t)$ später heraus.

$$= \frac{r(x)}{a_2(x)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\,t)r(t)\,dt$$

Diese Ausdrücke werden nun in die DGL eingesetzt.

$$r(x) + \int_a^b \underbrace{\left[a_2(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\,t) + a_1(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,\,t) + a_0(x)G(x,t)\right]}_{=\,0,\text{ wenn } G(x,.)\text{ die homogene DGL löst.}} r(t)dt = r(x)$$

Wenn $G(x,.)$ die homogenen Randbedingungen erfüllt, überträgt sich das auf $y(x)$, siehe Seite 9.

Green-Funktion Nachweis

$y'' + y = r(x), \quad y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$

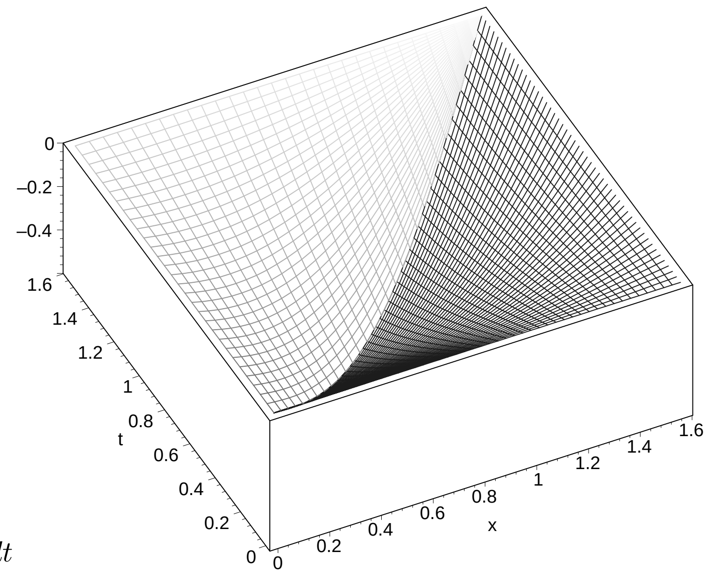
Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet: $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$
Die Funktionen $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \cos x$ bilden also ein Fundamentalsystem.

$$G(x,t) = \begin{cases} -\cos t \sin x & 0 \le x \le t \le \pi \\ -\cos x \sin t & 0 \le t \le x \le \pi \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind für G erfüllt:

$$G(0,t) = 0$$

$$G(\frac{\pi}{2}, t) = 0$$



Die Sprungbedingung

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\, x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\, x) = \frac{1}{a_2(x)}$$

bedeutet hier: $\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) r(t)\, dt$$

$$= \int_a^x G_2(x,t) r(t)\, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} G_1(x,t) r(t)\, dt$$

$$r(x) = 2x \qquad y(x) = 2x - \pi \sin x$$

$$r(x) = x^2 \qquad y(x) = (2 - \frac{\pi^2}{4}) \sin x + 2 \cos x + x^2 - 2$$

Zur Randwertaufgabe

$$y'' + y = r(x), \quad y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

gehört

$$G(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t & 0 \le x \le t \le \pi \\ \cos t \sin x & 0 \le t \le x \le \pi \end{cases}$$

Green-Funktion ermitteln

$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x)$ Randbedingungen ..., $a \le x \le b$

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) & (x,t) \in \Delta_1 \\ G_2(x,t) & (x,t) \in \Delta_2 \end{cases}$$

Fundamentalsystem $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

Naheliegender Ansatz für G, da $G(x,.)$ die homogene DGL erfüllen muss:

$$G_1(x,t) = \sum_{k=1}^{2} C_k(t)\varphi_k(x), \qquad G_2(x,t) = \sum_{k=1}^{2} D_k(t)\varphi_k(x),$$

Eine äquivalente geschickte Formulierung dieses Ansatzes ermöglicht eine schrittweise Berechnung.
B_1, B_2 ergeben sich dann aus der Stetigkeits- und aus der Sprungbedingung,
A_1, A_2 aus den beiden Randbedingungen.

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= \sum_{k=1}^{2} (A_k(t) + B_k(t))\,\varphi_k(x) \\ G_2(x,t) &= \sum_{k=1}^{2} (A_k(t) - B_k(t))\,\varphi_k(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2}(C_k + D_k) \\ B_k &= \frac{1}{2}(C_k - D_k) \end{aligned}$$

Die Stetigkeit auch auf der Diagonalen verlangt:

$$\sum_{k=1}^{2} (A_k(x) + B_k(x))\,\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{2} (A_k(x) - B_k(x))\,\varphi_k(x) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{2} B_k(x)\,\varphi_k(x) = 0$$

Die Sprungbedingung fordert:

$$\sum_{k=1}^{2} (A_k(x) - B_k(x))\,\varphi'_k(x) - \sum_{k=1}^{2} (A_k(x) + B_k(x))\,\varphi'_k(x) = \frac{1}{a_2(x)} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{2} B_k(x)\,\varphi'_k(x) = -\frac{1}{2a_2(x)}$$

Dies lässt sich in Matrizenschreibweise zusammenfassen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) \end{pmatrix}}_{\text{Wronski-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2a_2(x)} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist zu lösen, z. B. mit Determinanten (Cramersche Regel).
Die Randbedingungen führen zu einem Gleichungssystem der A_k, die B_k sind ja bekannt.

Green-Funktion Beispiel

$y'' + y = r(x), \quad y(0) - y(\pi) = 0, \;\; y'(0) - y'(\pi) = 0$

Die Funktionen $\varphi_1(x) = \cos x$ und $\varphi_2(x) = \sin x$ bilden ein Fundamentalsystem.

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= \sum_{k=1}^{2} (A_k(t) + B_k(t))\,\varphi_k(x) \\ G_2(x,t) &= \sum_{k=1}^{2} (A_k(t) - B_k(t))\,\varphi_k(x) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad B_1(x) = \tfrac{1}{2}\sin x, \quad B_2(x) = -\tfrac{1}{2}\cos x$$

Durch Auswerten der Randbedingungen

$$\begin{aligned} G(0,t) - G(\pi,t) &= 0 \qquad \text{d.h.} \quad G_1(0,t) - G_2(\pi,t) = 0 \\ G_x(0,t) - G_x(\pi,t) &= 0 \end{aligned}$$

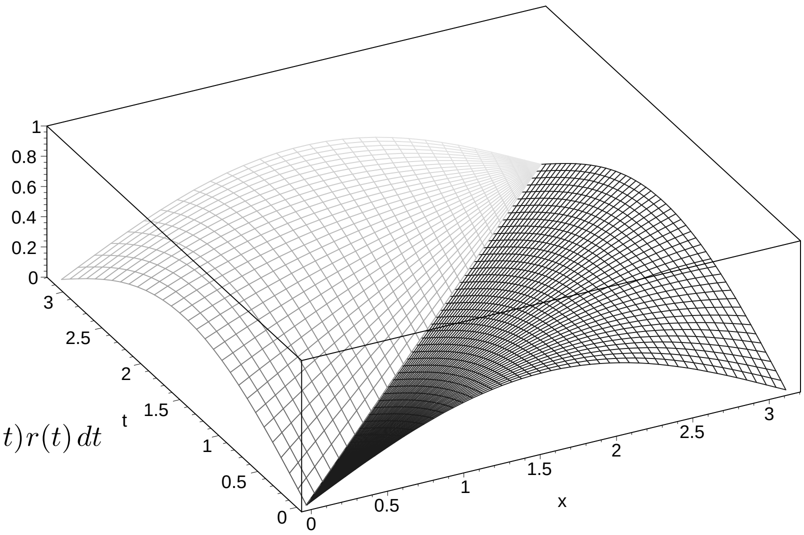
erhält man $A_1(x) = A_2(x) = 0$

Die Greensche Funktion lautet dann (Additionstheorem $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \sin t \cos x$):

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= -\tfrac{1}{2}\sin(x-t) \\ G_2(x,t) &= \tfrac{1}{2}\sin(x-t) \end{aligned}$$

Lösung der Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{\pi} G(x,t)\,r(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{x} G_2(x,t)r(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} G_1(x,t)r(t)\,dt \end{aligned}$$



Green-Funktion Beispiel

$y'' - y' = r(x), \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) - y'(1) = 0$

Fundamentalsystem: $\varphi_1(x) = 1$ und $\varphi_2(x) = e^x$

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= \sum_{k=1}^{2} (A_k(t) + B_k(t))\varphi_k(x) \\ G_2(x,t) &= \sum_{k=1}^{2} (A_k(t) - B_k(t))\varphi_k(x) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2a_2(x)} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad B_1(x) = \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= A_1(t) + \tfrac{1}{2} + (A_2(t) - \tfrac{1}{2}e^{-t})e^x \\ G_2(x,t) &= A_1(t) - \tfrac{1}{2} + (A_2(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t})e^x \end{aligned}$$

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1(t) + A_2(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\,t) = (A_2(t) - \tfrac{1}{2}e^{-t})e^x$$

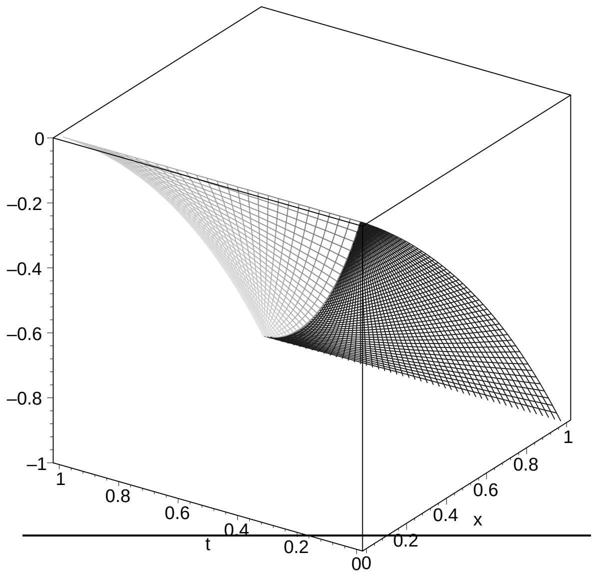
$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\,t) = (A_2(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t})e^x$$

$$y'(0) - y'(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_2(t) - \tfrac{1}{2}e^{-t} = (A_2(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t})e$$

$$\Longrightarrow \quad A_2(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}\,\tfrac{1+e}{1-e}, \qquad A_1(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-t}\,\tfrac{1+e}{1-e} = \ldots = \tfrac{e^{1-t}}{e-1} - \tfrac{1}{2}$$

Dies eingesetzt führt nach umfangreichen Umformungen zu:

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{1-e}(e^x - 1) & 0 \le x \le t \le 1 \\ \frac{e^{x-t} - e^{1-t}}{1-e} - 1 & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$



Bemerkenswert: $G_1(x,t) \neq G_2(t,x)$

Es geht auch einfacher

Die vorige Randwertaufgabe

$$y'' - y' = r(x), \quad R_1\colon\, y(0) = 0, \;\; R_2\colon\, y'(0) - y'(1) = 0$$

kann auf recht einfache Weise mit dem folgendem Ansatz gelöst werden.
(Das vertreibt auch die Zweifel an der Richtigkeit der Lösung.)

$$G(x,t) = \begin{cases} A u_1(x) + B u_2(x) & 0 \le x \le t \le 1 \\ u_t(x) + A u_1(x) + B u_2(x) & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^x - 1 \\ u_2(x) &= 1 && u_1 \text{ und } u_2 \text{ lösen die DGL } y'' - y' = 0 \text{ und erfüllen } R_1 \text{ bzw. } R_2. \\ u_t(x) &= e^{x-t} - 1 && u_t \text{ ist so zu wählen, dass gilt: } u_t(t) = 0 \text{ und } u_t'(t) = 1 \end{aligned}$$

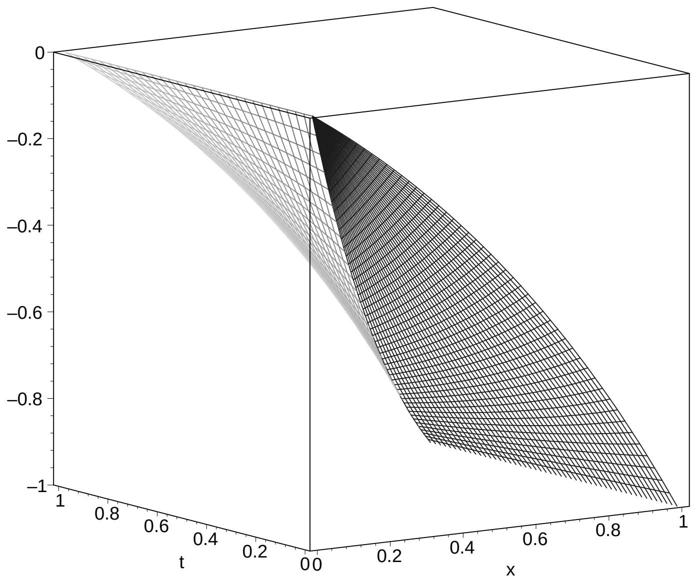
Der Ansatz genügt offensichtlich der Stetigkeits- und der Sprungbedingung $G_2'(x,x) = G_1'(x,x) + 1$.
A und B werden mit den Randbedingungen bestimmt.

$$R_1\colon\, y(0) = 0, \quad G_1(0,t) = 0, \quad A\underbrace{u_1(0)}_{=0} + B\underbrace{u_2(0)}_{=1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0$$

$$R_2\colon\, y'(0) - y'(1) = 0, \quad G_1'(0,t) = G_2'(1,t), \quad A\underbrace{u_1'(0)}_{=1} = \underbrace{u_t'(1)}_{=e^{1-t}} + A\underbrace{u_1'(1)}_{=e} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{e^{1-t}}{1-e}$$

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{1-e}(e^x - 1) & 0 \le x \le t \\ e^{x-t} - 1 + \frac{e^{1-t}}{1-e}(e^x - 1) & t \le x \le 1 \end{cases}$$

Dies stimmt mit der vorigen Lösung überein.



Randbedingungen

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\, r(t)\, dt$$

$$y'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\, t)\, r(t)\, dt$$

Homogene Randbedingungen (z. B.) für G:

$$G(0,t) - G(\pi,t) = 0 \qquad \text{d. h.} \quad G(0,t) = G(\pi,t)$$

$$\tfrac{\partial G}{\partial x}(0,t) - \tfrac{\partial G}{\partial x}(\pi,t) = 0 \qquad \text{d. h.} \quad \tfrac{\partial G}{\partial x}(0,t) = \tfrac{\partial G}{\partial x}(\pi,t)$$

Es ist ersichtlich, dass diese Randbedingungen dann auch für y gelten.

$$y(0) = y(\pi)$$

$$y'(0) = y'(\pi)$$

Spezialfall

Im Eingangsbeispiel $\quad -y'' = r(x) \quad y(0) = 0,\; y(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$

hatte die Green-Funktion eine erfreulich einfache Struktur:

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\varphi(x) = x,\; \psi(x) = 1 - x$ bilden ein Fundamentalsystem.

Hier ist also

$$G(x,t) = \begin{cases} \varphi(x)\psi(t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \varphi(t)\psi(x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Die Randbedingungen haben im Beispiel die einfache (separierte) Form:

$$\varphi(0) = 0,\;\; \psi(1) = 0$$

Damit für

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x) \qquad \varphi(a) = 0,\;\; \psi(b) = 0$$

die Green-Funktion die Struktur

$$G(x,t) = c\begin{cases} \varphi(x)\psi(t) & a \leq x \leq t \leq b \\ \varphi(t)\psi(x) & a \leq t \leq x \leq b \end{cases}$$

Auf die Reihenfolge ist zu achten.

haben kann, muss $c = \dfrac{1}{a_2(t)W(t)}$ gewählt werden.

Hierbei ist $W(t) = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)$ die Determinante der Wronski-Matrix.

Die Wahl von c folgt unmittelbar aus der Sprungbedingung:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\, x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\, x) = \frac{1}{a_2(x)} \qquad \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = c\begin{cases} \varphi'(x)\psi(t) \\ \varphi(t)\psi'(x) \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind für G mit $G_1(a,t) = 0$ und $G_2(b,t) = 0$ erfüllt,
die Stetigkeitsbedingung ohnehin. Somit liegt hier die Green-Funktion vor.

Zur Erinnerung:
Das Vorliegen der Sprungbedingung garantiert, dass wenn $G(x,.)$ die homogene DGL löst, $r(x)$ herausfällt und somit $y(x)$ die Randwertaufgabe löst.

Im Eingangsbeispiel gilt $a_2(x) = -1$ und $W(t) = -1$, das Produkt ist also 1.

Green-Funktion Beispiel für den Spezialfall

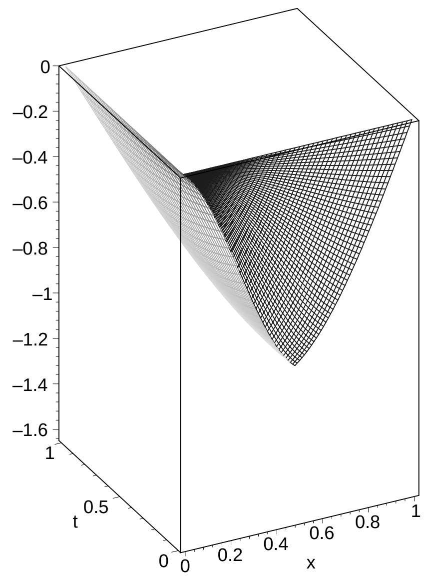
Randwertaufgabe
$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y'(1) = 0$

Fundamentalsystem: $y_1(x) = \sin x,\ y_2(x) = \cos x$
$y_1(x) = \sin x$ erfüllt $y(0) = 0,\ y_2(x) = \cos(x-1)$ erfüllt $y'(1) = 0.$

Die Wronski-Determinante beträgt $W(t) = -\cos 1$ (Additionstheorem).

Damit finden wir

$$G(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{\sin x \cos(t-1)}{\cos 1} & 0 \le x \le t \le 1 \\ -\dfrac{\sin t \cos(x-1)}{\cos 1} & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$



Heaviside-Funktion

Einfachstes Beispiel

$y'(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \; x \in [0, 1]$

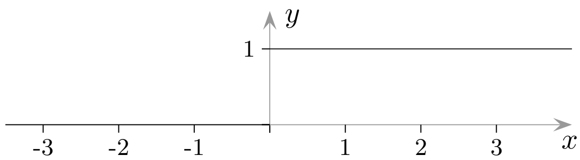
Die Lösung lautet:

$$y(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^1 G(x,t)\, f(t)\, dt$$

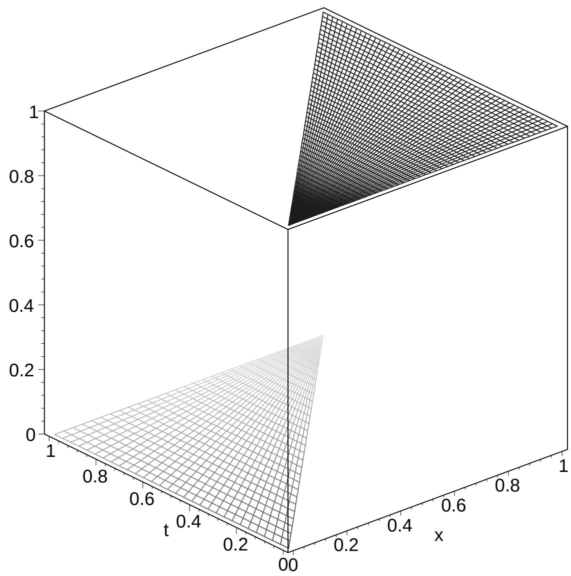
$$G(x,t) = \begin{cases} 0 & 0 < x < t \leq 1 \\ 1 & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Wir erkennen:

$$G(x,t) = H(x-t) \qquad \text{Heaviside-Funktion}$$



$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases}$$



Die Green-Funktion

$$G(x,t) = \frac{1}{a_2(t) W(t)} \begin{cases} \varphi(x)\,\psi(t) & x \leq t \\ \varphi(t)\,\psi(x) & t \leq x \end{cases}$$

kann damit auch einzeilig angegeben werden:

$$G(x,t) = \frac{1}{a_2(t) W(t)} \big(H(t-x)\,\varphi(x)\,\psi(t) + H(x-t)\,\varphi(t)\,\psi(x) \big)$$

Alternativer Weg zur Green-Funktion

Sei $y(x) = \int\limits_a^b G(x,t)\,r(t)\,dt$

eine Lösung der Randwertaufgabe

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = r(x) \quad \text{Randbedingungen } \ldots, \quad a \le x \le b$$

Wir setzen die Lösung in die DGL ein, vertauschen Integration und Differentiation und klammern aus:

$$\int\limits_a^b \underbrace{\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, G(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\, G(x,t) + G(x,t) \Big)}_{\delta(x-t)} r(t)\,dt = r(x)$$

$G(x,t)$ muss also

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, G(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\, G(x,t) + G(x,t) = \delta(x-t)$$

lösen.

Die Gleichung kann dem Auffinden von G dienen.

$\frac{\partial}{\partial x}\, G(x,t)$ hat dann einen Sprung bei $x = t$ und $G(x,t)$ an diesen Stellen einen Knick.

Beispiel

Betrachten wir noch einmal das Eingangsbeispiel:

$$-y'' = r(x) \qquad y(0) = 0,\;\; y(1) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

Wir suchen die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t) = -\delta(x-t)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x,t) = \begin{cases} C_1 & 0 \le x \le t \\ C_1 - 1 & t \le x \le 1 \end{cases}$$

Die 1. Ableitung muss eine Sprungfunktion sein.

$$G(x,t) = \begin{cases} C_1 x + C_2 & 0 \le x \le t \\ (C_1 - 1)\cdot x + C_3 & t \le x \le 1 \end{cases}$$

Integration

Beide Teilfunktionen müssen für $x = t$ übereinstimmen, d. h. es muss gelten:

$$C_1 t + C_2 = (C_1 - 1)t + C_3$$

Daraus folgt: $C_3 = C_2 + t$ und man erhält:

$$G(x,t) = \begin{cases} C_1 x + C_2 & 0 \le x \le t \\ (C_1 - 1)\cdot x + t + C_2 & t \le x \le 1 \end{cases}$$

$G(x,t)$ muss die Randbedingungen erfüllen, es muss gelten $G(0,t) = 0$ und $G(1,t) = 0$ bzw.

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 &= 0 \\ (C_1 - 1)\cdot 1 + t + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $C_2 = 0$ und $C_1 = 1 - t$.

Die Greensche Funktion lautet also:

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-t)x & 0 \le x \le t \\ t\,(1-x) & t \le x \le 1 \end{cases}$$

Einheitsimpuls

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = r(x) \qquad \text{Randbedingungen } \ldots, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) + G(x,t) = \delta(x-t)$$

erlaubt eine physikalische Interpretation.

Sie beschreibt durch $x \longrightarrow G(x,t)$ die Reaktion des Systems auf einen Einheitsimpuls an der Stelle $x = t$.

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t)r(t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x,t)r(t) + G(x,t)r(t) = r(t)\delta(x-t)$$

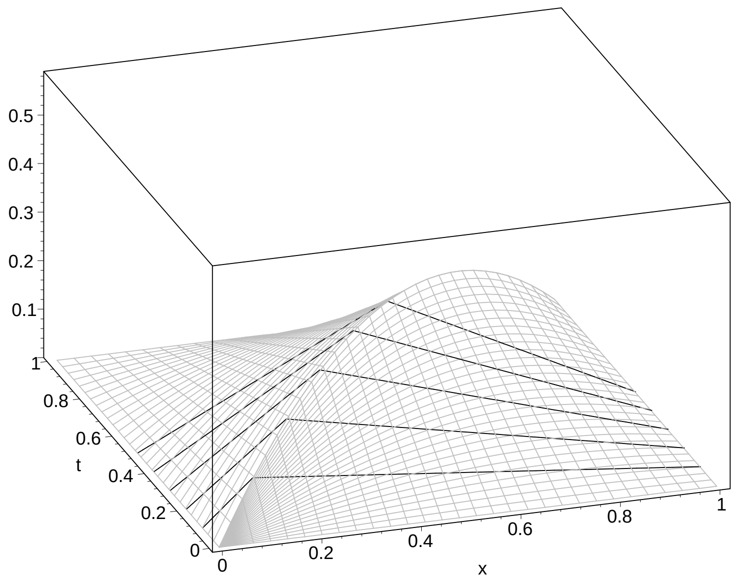
$$x \longrightarrow r(t)G(x,t)$$

ist die Lösung der Differentialgleichung für den Fall, dass nur ein Impuls $r(t)\delta(x-t)$ der Stärke $r(t)$ an der Stelle $x = t$ auftritt.

Die Summation der Impulse $r(t)\delta(x-t)$ für $t \in [0,1]$ führt zur Integration: $r(x) = \int\limits_0^1 r(t)\delta(x-t)\,dt$

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)\,r(t)\,dt$$

besagt nun, dass man die Lösung durch Summation/Integration der Beiträge der einzelnen Impulse erhält.

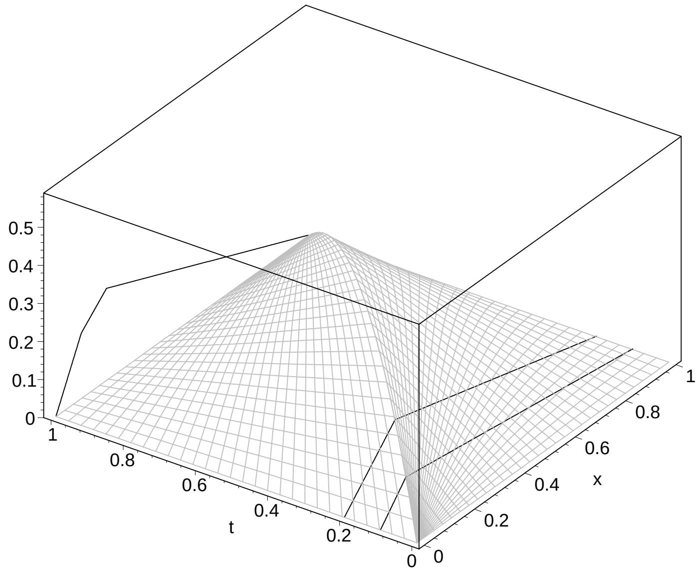


Hier werden die Reaktionskurven für das Eingangsbeispiel

$$-y'' = r(x) \qquad y(0) = 0, \;\; y(1) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

für verschiedene t sichtbar (Schrittweite 0,1).

Wirkung zweier Impulse



Die Wirkung der Einheitsimpulse an den Stellen $x_1 = 0{,}1$ und $x_2 = 0{,}2$ wird veranschaulicht.
An der Rückwand des Quaders ist die Gesamtwirkung zu sehen.

$$r(x) = 1_{[x_1-\varepsilon,\, x_1+\varepsilon]} + 1_{[x_2-\varepsilon,\, x_2+\varepsilon]}$$

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)\, r(t)\, dt$$

Die Summation/Integration in t-Richtung dürfte nun plausibel sein.

Symmetrie und Eindeutigkeit der Green-Funktion

$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = \ldots \qquad$ Randbedingungen $\ldots, \quad a \leq x \leq b$

Seien f und h beliebige stetige Störfunktionen.
Für das Randwertproblem mit der Green-Funktion $G(x,t)$ betrachten wir:

$$u_f(x) \;=\; \int\limits_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt, \qquad v_h(x) \;=\; \int\limits_a^b G(x,t)\, h(t)\, dt$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei L der zur DGL gehörige Differentialoperator:

$$L\colon\; y(x) \;\longrightarrow\; \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, y(x) + a\,\frac{\partial}{\partial x}\, y(x) + b\,y(x)$$

Weil u_f und v_h das jeweilige RWP lösen, gilt:

$$L[u_f(x)] = f(x)$$

$$L[v_h(x)] = h(x)$$

$G(x,t)$ ist symmetrisch in x und t, falls

$$\int\limits_a^b v(x) L[u(x)]\, dx = \int\limits_a^b u(x) L[v(x)]\, dx$$

für alle Funktionen u und v gilt, die die Randbedingungen erfüllen.
Das RWP wird als selbstadjungiert bezeichnet.

Begründung:

$$\int\limits_a^b\!\int\limits_a^b G(x,t)\, h(t)\, f(x)\, dt\, dx \;=\; \int\limits_a^b\!\int\limits_a^b G(x,t)\, f(t)\, h(x)\, dt\, dx \qquad u_f,\ v_h \text{ eingesetzt}$$

$$\;=\; \int\limits_a^b\!\int\limits_a^b G(t,x)\, f(x)\, h(t)\, dt\, dx \qquad x \text{ und } t \text{ vertauscht}$$

$$G(x,t) \;=\; G(t,x) \qquad \text{beachte: } f \text{ und } h \text{ beliebig}$$

$$\int\limits_a^b\!\int\limits_a^b \big[G(x,t) - G(t,x)\big] \ldots = 0$$

Der Ansatz mit G_1 und G_2 führt zur Eindeutigkeit.