

Householder-Transformation 1958

Eine Matrix kann durch Multiplikation mit einer Matrix \mathbf{Q} in eine Dreiecksmatrix überführt werden.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}$$

Dies erfolgt durch wiederholte Spiegelungen.

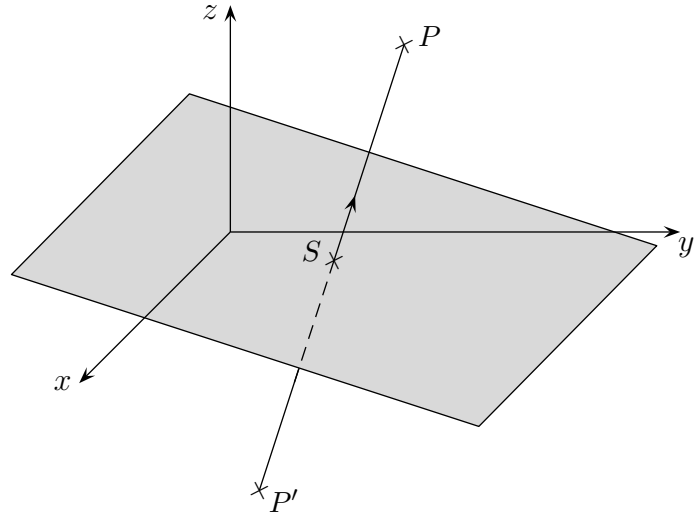
Zunächst wird eine Spiegelmatrix \mathbf{Q}_1 ermittelt, die Folgendes leistet:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

\mathbf{Q}_1 spiegelt die 1. Spalte (als Ortsvektor oder Punkt) von \mathbf{A} auf einen Punkt, der auf der x -Achse liegt.

Spiegelung

Ein (beliebiger) Punkt P wird an einer Ursprungsebene E gespiegelt, deren Normalenvektor gegeben ist. Für diese orthogonale Projektion ist die Abbildungsmatrix gesucht.



$$E: \quad \vec{n}^o \vec{x} = 0$$

$$g: \quad \vec{x} = \vec{OP} + \lambda \vec{n}^o$$

Schnitt:

$$\vec{n}^o (\vec{OP} + \lambda \vec{n}^o) = 0$$

$$\vec{n}^o \vec{OP} + \lambda = 0$$

$$\lambda = -\vec{n}^o \vec{OP} \quad \text{Abstand } d(P, E) = \lambda \text{ wegen } |\vec{n}^o| = 1$$

$$\implies \quad \vec{OP}' = \vec{OP} - 2(\vec{n}^o \vec{OP}) \vec{n}^o$$

Der Übergang zu Koordinaten ergibt für \vec{n} (durch leichtes Nachrechnen):

$$\vec{OP}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\vec{n}^2} \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 \end{bmatrix} \right) \vec{OP}$$

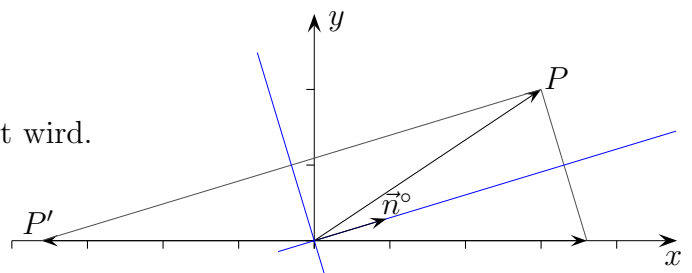
= $\vec{n} \vec{n}^T$ dyadisches Produkt, sym. (= $\vec{n} \otimes \vec{n}$)

$$\text{kurz: } \vec{OP}' = \mathbf{Q} \vec{OP}$$

beachte: $\vec{n}^T \vec{n} = \vec{n}^2$, Skalarprodukt

\mathbf{Q} heißt Householder-Matrix, wenn P in der angegebenen Weise auf die x -Achse gespiegelt wird.

Mit $|\vec{OP}| = |\vec{OP}'|$ ist die Spiegelachse (-ebene) festgelegt.



Householder-Transformation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$$

\mathbf{A} wird in eine Dreiecksmatrix (rechts oben) zerlegt. Wir beginnen mit der 1. Spalte.

$$1. \quad \mathbf{n} = \mathbf{a}_1 + \alpha |\mathbf{a}_1| \mathbf{e} \quad (\alpha \text{ Vorzeichen von } \mathbf{a}_{11}) \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\mathbf{n}^2} \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{24} \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Das Ganze noch einmal mit: $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$

$$1. \quad \mathbf{n} = \mathbf{a}_1 + \alpha |\mathbf{a}_1| \mathbf{e} \quad (\alpha \text{ Vorzeichen von } \mathbf{a}_{11}) \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\mathbf{n}^2} \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Betrachte } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und berücksichtige dann } \frac{1}{5}.$$

$$4. \quad \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -15 & -5 & 10 \\ 0 & 25 & -12 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

QR-Zerlegung

$$Q_2 Q_1 A = R \implies A = \underbrace{Q_1^T Q_2^T}_Q R$$

beachte $Q_i^{-1} = Q_i^T$,

wegen der Spiegelung gilt: $Q_i \cdot Q_i = I$

Gleichungssystem lösen

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

$$Rx = Q^T b$$

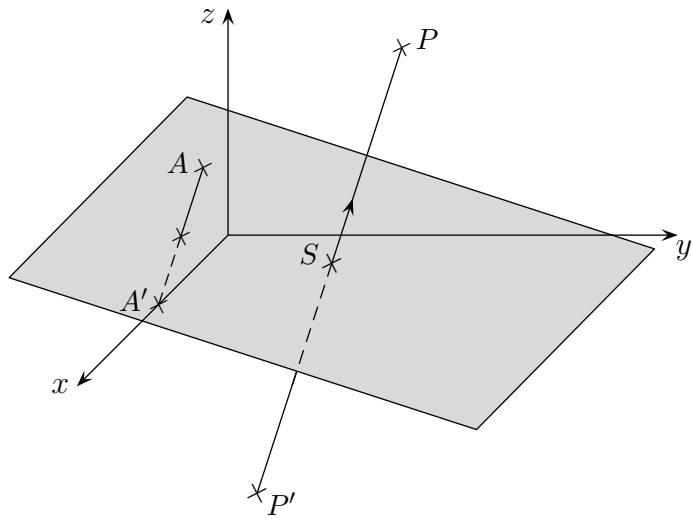
Auf der linken Seite kann von unten nach oben gerechnet werden.

Alternativ für händische Rechnung:

$$\begin{array}{l} Ax = b \quad | \quad Q_1 \\ Q_1 Ax = Q_1 b \quad | \quad Q_2 \\ Q_2 Q_1 Ax = Q_2 Q_1 b \\ \dots \end{array}$$

Wenn auf der linken Seite eine Dreiecksmatrix entstanden ist, kann von unten nach oben gerechnet werden.

Für verschiedene b 's auf der rechten Seite (z.B. Einheitsvektoren für inverse Matrix) können auf diese Weise mehrere Gleichungssysteme gleichzeitig bearbeitet werden.



Householder-Transformation

Bestimmen Sie eine QR -Zerlegung von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Householder-Transformation

Bestimmen Sie eine QR -Zerlegung von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{7}{15} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{26}{15} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$