Jacobi-Verfahren

$$\begin{aligned} 10x + y - z &= -2 \\ -x + 8y + z &= 1 \\ x - y - 20z &= 3 \end{aligned}$$

Wir wollen uns der Lösung schrittweise nähern.
Es fällt auf, dass die Diagonalelemente dominieren.
Wir formen nach den Variablen auf der Diagonale um und erhalten:

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{2}{10} - \tfrac{1}{10}y + \tfrac{1}{10}z \\ y &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{8}z \\ z &= -\tfrac{3}{20} + \tfrac{1}{20}x - \tfrac{1}{20}y \end{aligned}$$

Ein plausibler Startvektor lautet (die anderen Komponenten werden durch größere Zahlen geteilt):

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

Die erste Iteration ergibt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{1}{80} - \frac{3}{200} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{40} + \frac{3}{160} \\ -\frac{3}{20} - \frac{1}{100} + \frac{3}{400} \end{pmatrix} \qquad \text{usw.}$$

Das Verfahren konvergiert, falls für die Diagonalelemente $|a_{i,i}| > \sum_{i \neq k} |a_{i,k}|$ gilt.

Matrizenschreibweise ($\boldsymbol{A}$ wird in zwei Dreiecksmatrizen und eine Diagonalmatrix zerlegt):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}} \\ &= \boldsymbol{L} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{D} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= \vec{\boldsymbol{b}} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}} \\ \vec{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{b}} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}}\right) \end{aligned}$$

iterativer Algorithmus

$$\vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{b}} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}\right)$$

Gauß-Seidel-Iteration

Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) kann so abgeändert werden (Gauß-Seidel, Einzelschrittverfahren), dass in einem Iterationsschritt die neu berechnete x-Koordinate schon gleich zur Berechnung der y-Koordinate verwendet wird. Zur Bestimmung der z-Koordinate werden die schon neu ermittelte x- und die y-Koordinate herangezogen.

$$\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 12 \\ 3x + 8y - 2z &= -25 \\ x + y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Wir formen nach den Variablen auf der Diagonale um und erhalten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{12}{5} + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z \\ y &= -\frac{25}{8} - \frac{3}{8}x + \frac{2}{8}z \\ z &= \frac{6}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \end{aligned}$$

Startvektor sei: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ \frac{-25 - 3 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 0}{8} = -4{,}03 \\ \frac{6 - 2{,}4 + 4{,}03}{4} = 1{,}91 \end{pmatrix}$ usw.

Matrizenschreibweise ($\boldsymbol{A}$ wird wieder zerlegt):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &&= \vec{\boldsymbol{b}} \\ &= \boldsymbol{L} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &&= \vec{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{D} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= \vec{\boldsymbol{b}} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}} && \text{Das hatten wir schon.} \\ &= \vec{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{L} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

In jedem Iterationsschritt gilt dann (Rechnung genau ansehen):

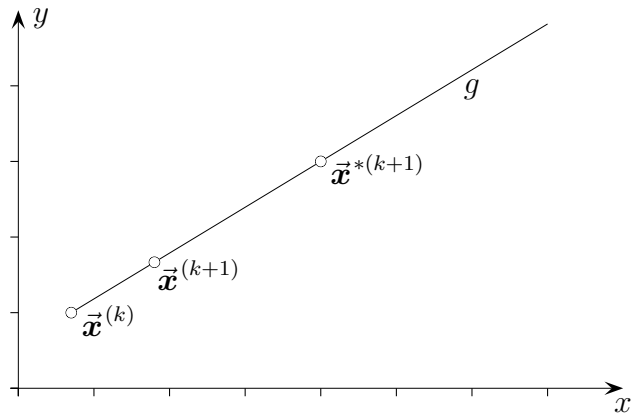
$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} &= \vec{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{L} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} - \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k)} \\ (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} &= \vec{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k)} \\ \vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} &= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}^{(k)} \end{aligned}$$

Das Verfahren konvergiert wieder bei Diagonaldominanz, falls $\boldsymbol{A}$ symmetrisch und positiv definit ist oder falls der Spektralradius (Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts) von $-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1} \cdot \boldsymbol{R}$ kleiner 1 ist. Der Startvektor ist beliebig.

Wird der Startvektor als Linearkombination von Eigenvektoren $\vec{\boldsymbol{d}}_i$ (Eigenwert λ_i) dargestellt, entstehen bei der $k$ten Iteration Terme wie $a_i\lambda_i^k\vec{\boldsymbol{d}}_i$. Für $|\lambda| < 1$ streben sie gegen null.

Relaxation für Iterationsalgorithmen (engl. Lockerung, Entspannung)

Die Schrittweite der Iteration können wir beeinflussen.
Nehmen wir an, es liegt $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ vor und wir führen den nächsten Iterationsschritt aus: $\vec{\boldsymbol{x}}^{*(k+1)}$
Das Ergebnis wurde umbenannt, weil es noch abgeändert werden soll.



Für das endgültige $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}$ wäre auch

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} &= \vec{\boldsymbol{x}}^{(k)} + \omega\big(\vec{\boldsymbol{x}}^{*(k+1)} - \vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}\big)\\ &= (1-\omega)\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)} + \omega\vec{\boldsymbol{x}}^{*(k+1)}\end{aligned}$$

mit einem geeignet gewählten $\omega \in \mathbb{R}$ möglich. Das entspricht einem Punkt auf der Geraden g.

In $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} = (1-\omega)\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)} + \omega\vec{\boldsymbol{x}}^{*(k+1)}$ wird für $\vec{\boldsymbol{x}}^{*(k+1)}$ die rechte Seite des Verfahrens von Jacobi bzw. Gauß-Seidel eingesetzt.

Für $\omega = 1$ bleibt das Iterationsverfahren unverändert.
Für z. B. $\omega = 0{,}3$ nähern wir uns verzögert (vielleicht monoton) der Lösung,
allgemein für $0 < \omega < 1$ (under-relaxation).
Das SOR-Verfahren (successive over-relaxation) verwendet ein ω mit $1 < \omega < 2$.
Das kann die Konvergenzgeschwindigkeit erhöhen.

Anhang

Jede Matrix lässt sich in eine untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$,
eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$ zerlegen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{L}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{R}}$$