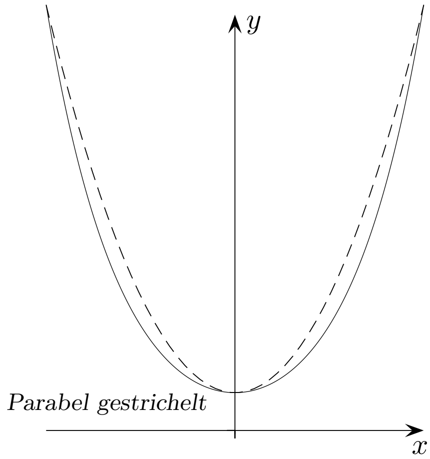
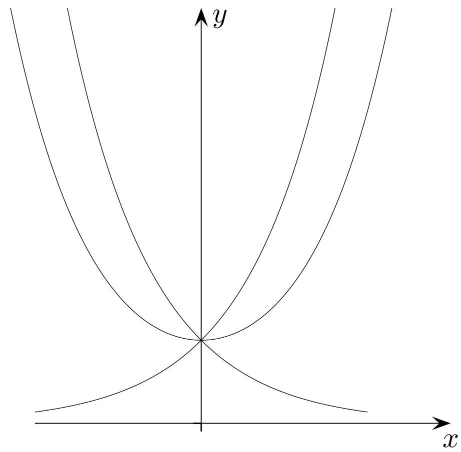
Kettenlinie



1690 lösten Johann Bernoulli, Huygens und Leibniz das Problem, die Gestalt einer dünnen, frei hängenden, nicht-ausdehnbaren Kette unter dem Einfluss der Schwerkraft zu bestimmen.

Zuvor konnte gezeigt werden, dass es sich nicht um eine Parabel handelt (siehe nächste Seite).



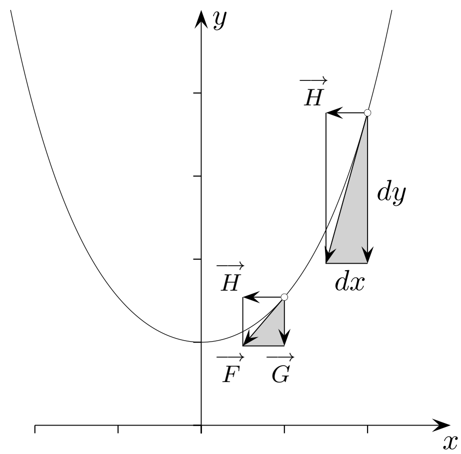
Eine weitere Vermutung kann durch die Betrachtung der Funktionen $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$ und $f(x) = e^x + e^{-x}$, bzw. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ aufgestellt werden.

Um die Differentialgleichung der Kettenlinie aufstellen zu können, sind einige plausible physikalische Überlegungen erforderlich.

An der Kette zerrt tangential die Kraft $\overrightarrow{F}$, die sich aus der Gewichtskraft $\overrightarrow{G}$ und der Horizontalspannung $\overrightarrow{H}$ der Kette ergibt.

Die Gewichtskraft ist proportional zur Länge $s(x)$ des Kurvenstücks vom Minimum bis zum Angriffspunkt. Die Horizontalspannung ist stets konstant, ansonsten gäbe es eine ausgleichende horizontale Verschiebung. Damit erhalten wir mit zusammengefassten Konstanten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s(x)}{d}$$



Mit der Differentialgleichung $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s(x)}{d}$ kann auf einfache Weise die Parabel als Lösungsfunktion ausgeschlossen werden.

Für eine Parabel gilt: $\dfrac{dy}{dx} = 2\,a\,x$

Stimmten die rechten Seiten überein, so würde $s(x)$ linear mit x anwachsen.
Dies kann nur für lineare Funktionen zutreffen.

Aus $\dfrac{s(x)}{d} = 2\,a\,x$ folgte $s'(x) = a^*$, und weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} &= a^* && \Longrightarrow \\
\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} &= a^* && \Longrightarrow \\
1+(\frac{dy}{dx})^2 &= (a^*)^2 && \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a^{**} \\
& && \Longrightarrow \quad f(x) = a^{**}\,x + b
\end{aligned}$$

Der Graph einer Lösungsfunktion kann auch iterativ erzeugt werden. Auf diese Weise wurde der erste Graph der vorigen Seite erzeugt.

$$\begin{aligned}
s_0 &= 0, \quad y_0 = 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{s}{d} \\
y_{n+1} - y_n &= \frac{s}{d} \cdot dx \\
y_{n+1} &= \frac{s}{d} \cdot dx + y_n \\
s_{n+1} &= s_n + \sqrt{dx^2+dy^2}, \qquad dx = y_{n+1} - y_n
\end{aligned}$$

Um nachprüfen zu können, dass $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ eine Lösung der DGL ist, kann die Bogenlänge s dieser Funktion ermittelt werden.

$$s = \int_0^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\;dx \qquad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^b \sqrt{1+\frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}\;dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^b \sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\;dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^b (e^x + e^{-x})\;dx \\
&= \frac{1}{2}\,(e^b - e^{-b})
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:

$$f(x) = \frac{a}{2}\,(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

Je kürzer die Kettenlinie im Vergleich zur Distanz der Aufhängepunkte ist, desto mehr ähnelt die Kurve einer Parabel. Dies wird durch die Taylorentwicklung verständlich (warum?).

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$$

Lösung der DGL

$$\begin{array}{lrcll}
 & a\sqrt{1+(f'(x))^2} & = & f''(x) & \mid (\ )^2 \\
\Longrightarrow & * \quad a^2(1+(f'(x))^2) & = & (f''(x))^2 & \mid (\ )' \\
\Longrightarrow & a^2 \cdot 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) & = & 2 \cdot f''(x) \cdot f'''(x) & \\
\Longleftrightarrow & a^2 \cdot f'(x) & = & f'''(x) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
 & \text{Ansatz} \quad f(x) & = & k_1 e^{ax} + k_2 e^{-ax} \\
 & f'(0) & = & 0 \\
\Longrightarrow & & & k_1 = k_2 = k \\
 & f(x) & = & k(e^{ax} + e^{-ax}) \\
 & f'(x) & = & ka(e^{ax} - e^{-ax}) \\
 & f''(x) & = & ka^2(e^{ax} + e^{-ax}) \\
 & f'''(x) & = & ka^3(e^{ax} - e^{-ax})
\end{array}$$

Einsetzen in $*$

$$\begin{array}{lrcll}
 & a^2 + a^2(f'(x))^2 & = & (f''(x))^2 & \\
 & a^2 + k^2a^4(e^{ax} - e^{-ax})^2 & = & k^2a^4(e^{ax} + e^{-ax})^2 & \\
 & a^2 - 2k^2a^4 & = & 2k^2a^4 & \text{Nur die mittleren Terme bleiben übrig.} \\
 & a^2 - 4k^2a^4 & = & 0 & \\
\Longrightarrow & k & = & \frac{1}{2a} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
 & \text{Abkürzung} \quad f(0) & = & \frac{1}{a} = b \\
\Longrightarrow & f(x) & = & b \cdot \frac{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}{2} \\
 & f(x) & = & b \cdot \cosh(\frac{x}{b})
\end{array}$$