Quotienten- und Wurzelkriterium

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n > 0$ konvergiert, falls für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \longrightarrow \quad q < 1 \qquad \text{(divergiert für } q > 1\text{)}$$

oder

$$\sqrt[n]{a_n} \quad \longrightarrow \quad q < 1 \qquad \text{(divergiert für } q > 1\text{)}$$

Zum (naheliegenden) Beweis wird der Bezug zur geometrischen Reihe hergestellt.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{e} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} < 1$$

Nützliches:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+1)! \cdot (2n+2)$$

$$(2n+2)! = (2n+1)! \cdot (2n+2) = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Konvergenzradius $r = \frac{1}{c}$

Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$ konvergiert im Bereich $|\,x\,| < r$, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = c$$

symbolisch: $\quad \frac{1}{\infty} = 0\,, \quad \frac{1}{0} = \infty$

Die Konvergenz in den Randpunkten müsste gesondert untersucht werden.
Die Begründung für den Konvergenzradius folgt aus dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium, angewandt auf Potenzreihen. Dem offenen Intervall entspricht im Komplexen ein offener Kreis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!\,n!\,n!}{(n+1)\,!(n+1)!\,2n!} = \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)\,(n+1)} \longrightarrow 4 \quad \text{Konvergenzradius } \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{Die Reihe konvergiert für alle } x.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

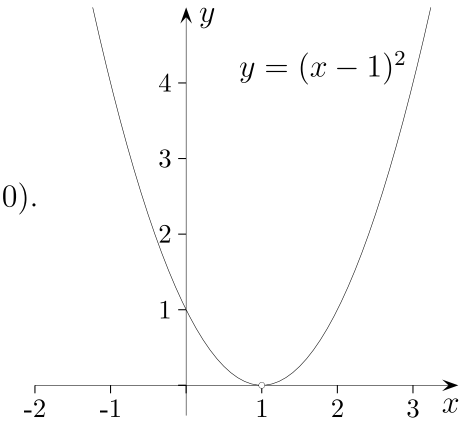
Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konvergiert im Bereich $a - r < x < a + r$, d.h. $|\,x - a\,| < r$,

falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ im Bereich $-r < x < r$ konvergiert.

Zur Erinnerung:

$y = (x-1)^2$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4



Die Parabel $y = (x-1)^2$ ist gegenüber der Parabel $y = x^2$ um eine Einheit nach rechts verschoben, der Scheitel ist $S(1\,|\,0)$.