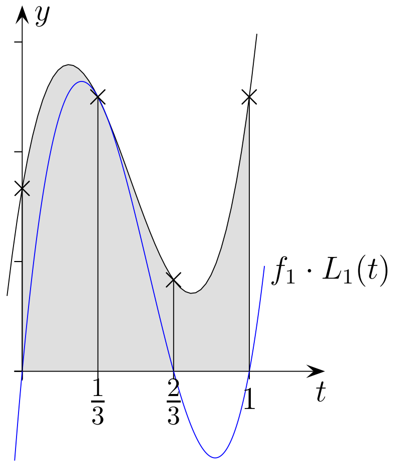
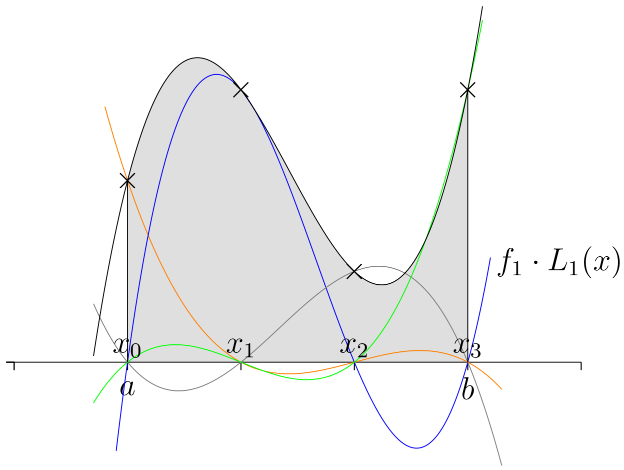
3/8-Regel





Die Regel hat die Form (4 Stützstellen):

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; (b-a)\big[\,w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3\,\big]$$

Um die Gewichte w_i zu ermitteln, approximieren wir f durch eine Summe von Lagrange-Polynomen.

$$f(x) \;\approx\; f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) + f_3 \cdot L_3(x)$$

mit $\quad L_0 \;=\; \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \quad L_1, \quad L_2, \quad L_3$

Das ergibt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \;&\approx\; \int_a^b \big[f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) + f_3 \cdot L_3(x)\big]\,dx \\ &=\; (b-a)\int_0^1 \big[f_0 \cdot L_0(t) + f_1 \cdot L_1(t) + f_2 \cdot L_2(t) + f_3 \cdot L_3(t)\big]\,dt\end{aligned}$$

(Substitution, d. h. Verschiebung, Streckung)

$$w_k \;=\; \int_0^1 L_k(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{j=3} \frac{3t-j}{k-j}\,dt$$

es wurde mit 3 erweitert

$$\begin{aligned}L_0 \;&=\; \frac{(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-\frac{3}{3})}{(0-\frac{1}{3})(0-\frac{2}{3})(0-\frac{3}{3})} \\ &=\; \frac{(3t-1)(3t-2)(3t-3)}{(-1)(-2)(-3)}, \qquad \int_0^1 L_0(t)\,dt = \ldots = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

3/8-Regel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\Big[f(a) + 3f\big(a+\frac{b-a}{3}\big) + 3f\big(a+2\frac{b-a}{3}\big) + f(b)\Big]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\Big[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\Big]$$

$$w_3 = \int_0^1 L_3(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 3}}^{j=3} \frac{3t-j}{3-j}\,dt = \int_0^1 \frac{3t\cdot(3t-1)\cdot(3t-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\,dt = \frac{1}{8}$$

$$w_2 = \int_0^1 L_2(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{j=3} \frac{3t-j}{2-j}\,dt = \int_0^1 \frac{3t\cdot(3t-1)\cdot(3t-3)}{2\cdot 1\cdot(-1)}\,dt = \frac{3}{8}$$

allgemein für Polynome vom Grad N $\quad (N+1$ Stützstellen)

$$w_k = \int_0^1 L_k(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{j=N} \frac{Nt-j}{k-j}\,dt$$

Grad $N=3$:

$$k=1, \quad L_1 = \frac{Nt\cancel{(Nt-1)}(Nt-2)(Nt-3)}{k\cancel{(k-1)}(k-2)(k-3)}$$

$$k=2, \quad L_2 = \frac{Nt(Nt-1)\cancel{(Nt-2)}(Nt-3)}{k(k-1)\cancel{(k-2)}(k-3)}$$

Nächste Newton-Cotes-Regel (5 Stützstellen), Milne-Regel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{90}\Big[7f(a) + 32f\big(a+\frac{b-a}{4}\big) + 12f\big(a+2\frac{b-a}{4}\big) + 32f\big(a+3\frac{b-a}{4}\big) + 7f(b)\Big]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{90}\Big[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\Big]$$

$$w_1 = \int_0^1 L_1(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{j=4} \frac{4t-j}{1-j}\,dt = \int_0^1 \frac{4t\cdot(4t-2)\cdot(4t-3)\cdot(4t-4)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}\,dt = \frac{32}{90}$$

Siehe auch: Numerische Integration
Lagrange-Interpolation
Startseite