

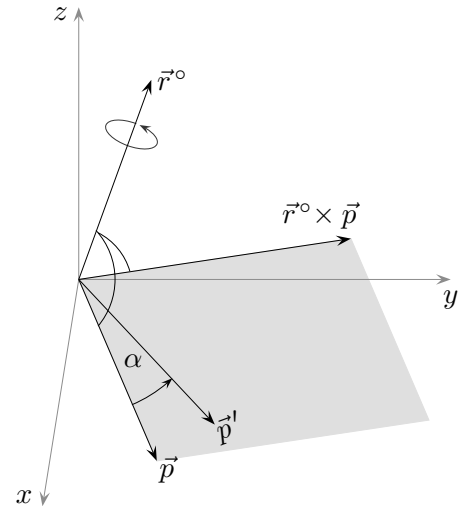
Quaternionen und Drehungen

Im Folgenden werden Drehungen im \mathbb{R}^3 mit Hilfe des Kreuzproduktes beschrieben und der Bezug zu den Quaternionen hergestellt.

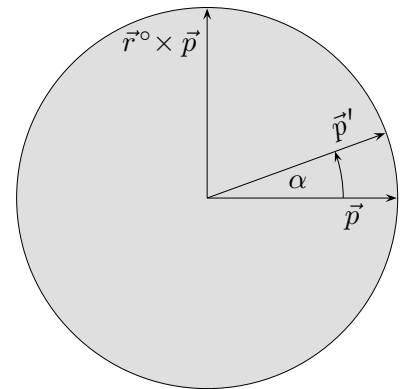
Der Zusammenhang von einer Verkettung von Drehungen und der Quaternionen-Multiplikation wird ersichtlich.

Die Drehachse möge durch den Ursprung verlaufen und durch einen Einheitsvektor \vec{r}° gegeben sein.

Die Länge 1 wird die Darstellung vereinfachen.



Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Vektor \vec{p} , der um den Winkel α gedreht werden soll, in der zu \vec{r}° senkrechten Ebene liegt. In dieser Ebene liegen auch die mit \vec{p} gleichlangen Vektoren \vec{p}' und $\vec{r}^\circ \times \vec{p}$,
 $|\vec{r}^\circ \times \vec{p}| = |\vec{r}^\circ| |\vec{p}| \sin 90^\circ = |\vec{p}|$.



Für \vec{p}' erhalten wir damit die Gleichung:

$$\vec{p}' = \cos \alpha \vec{p} + \sin \alpha \vec{r}^\circ \times \vec{p}$$

Im allgemeinen Fall ist ein Vektor $\vec{p} = \vec{q} + \lambda \vec{r}^\circ$ zu drehen, wobei \vec{q} in der zu \vec{r}° senkrechten Ebene liegt. Für \vec{q} gilt daher,

$$\vec{p}' - \lambda \vec{r}^\circ = \underbrace{\cos \alpha (\vec{p} - \lambda \vec{r}^\circ)}_{\cos \alpha \vec{p} - \cos \alpha \lambda \vec{r}^\circ} + \sin \alpha \underbrace{\vec{r}^\circ \times (\vec{p} - \lambda \vec{r}^\circ)}_{\vec{r}^\circ \times \vec{p}} \quad \text{beachte: } (\vec{p} - \lambda \vec{r}^\circ)' = \vec{p}' - \lambda \vec{r}^\circ$$

Aus der Lage von \vec{q} folgt $\vec{r}^\circ (\vec{p} - \lambda \vec{r}^\circ) = 0$, und damit $\lambda = \vec{r}^\circ \vec{p}$.

Einsetzen, Umstellen und Ausklammern liefert die Rodrigues-Formel (1840):

$$\vec{p}' = (\vec{r}^\circ \vec{p}) [1 - \cos \alpha] \vec{r}^\circ + \cos \alpha \vec{p} + \sin \alpha \vec{r}^\circ \times \vec{p}$$

Quaternionen und Drehungen

Die Quaternionen

$$\mathbb{A} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

wurden 1843 vom irischen Mathematiker W. Hamilton auf der vergeblichen Suche nach einer dreidimensionalen Erweiterung der komplexen Zahlen entdeckt. Hierfür war eine vierte Dimension unabdingbar. Die Multiplikation ist durch

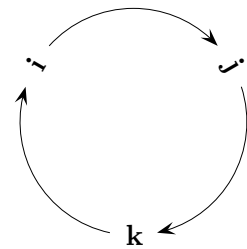
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (\text{entspricht dem Kreuzprodukt})$$

festgelegt. Die Kommutativität musste aufgegeben werden. Die übrigen Rechenregeln bleiben gültig.

Alternative Schreibweisen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb - zc - wd \\ xb + ya + zd - wc \\ xc - yd + za + wb \\ xd + yc - zb + wa \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [ab - \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

Durch die Aufteilung in einen skalaren und vektoriellen Teil wird der Bezug zum Skalar- und Vektorprodukt sichtbar.

Die Rodrigues-Formel kann in der Sprache der Quaternionen formuliert werden:

$$[0, \vec{p}'] = \mathbb{V} [0, \vec{p}] \mathbb{V}^*$$

\vec{p} ist dem Quaternion $[0, \vec{p}]$ zugeordnet.

Ein Stern* kennzeichnet den konjugierten Vektor $\mathbb{A}^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

In \mathbb{V} sind sowohl der Achsenvektor \vec{r}° als auch der Drehwinkel α enthalten.

Auch ist $|\mathbb{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$. Das Geheimnis soll gelüftet werden:

$$\mathbb{V} = [\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ]$$

$$\mathbb{V}^* = [\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ] \quad \text{Die Verwendung von } \frac{\alpha}{2} \text{ statt } \alpha \text{ wird gleich verständlich.}$$

$[0, \vec{p}'] = \mathbb{V} [0, \vec{p}] \mathbb{V}^*$ wird zunächst für $\vec{p} \perp \vec{r}^\circ$ durch (einfaches) Ausrechnen bestätigt.

$$[\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ] [0, \vec{p}] [\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ] = \dots = [0, \vec{p}']$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{[0, \cos \frac{\alpha}{2} \vec{p} - \sin \frac{\alpha}{2} (\vec{p} \times \vec{r}^\circ)]}$$

$$\text{Benutzt wird:} \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\vec{p} \times \vec{r}^\circ = -\vec{r}^\circ \times \vec{p}, \quad \vec{r}^\circ \times (\vec{p} \times \vec{r}^\circ) = \vec{p}$$

Quaternionen und Drehungen

Es verbleibt, $[0, \vec{p}' + \lambda \vec{r}^\circ] = \mathbb{V} [0, \vec{p} + \lambda \vec{r}^\circ] \mathbb{V}^*$ nachzuweisen.

Aufgrund der Distributivität ist das gleichbedeutend mit $[0, \vec{r}^\circ] = \mathbb{V} [0, \vec{r}^\circ] \mathbb{V}^*$.

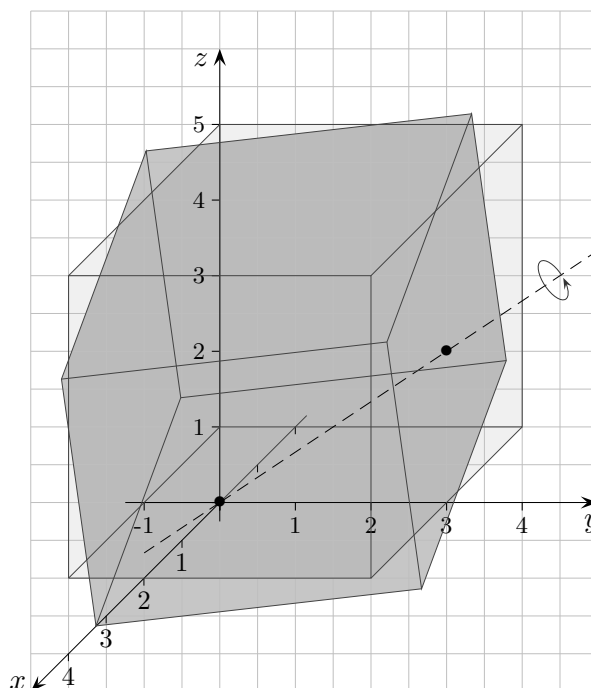
$$[\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ] \underbrace{[0, \vec{r}^\circ] [\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ]}_{[\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \vec{r}^\circ]} = \dots = [0, \vec{r}^\circ]$$

Benutzt wird: $(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + (\cos \frac{\alpha}{2})^2 = 1$

Beispiel

$$\vec{r}^\circ = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 20^\circ, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 0,9848, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = 0,1736$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_1' = \begin{pmatrix} 2,449 \\ 3,435 \\ 3,347 \end{pmatrix}$$



Zusammengesetzte Drehung

Die Hintereinanderausführung von 2 Drehungen kann durch eine Drehung ersetzt werden.

$$\vec{p} \longrightarrow \mathbb{V}[0, \vec{p}]\mathbb{V}^* \longrightarrow [0, \vec{p}'] = \mathbb{W}\mathbb{V}[0, \vec{p}]\mathbb{V}^*\mathbb{W}^*$$

Aufgrund von $\mathbb{V}^*\mathbb{W}^* = (\mathbb{W}\mathbb{V})^*$ können der Drehwinkel und die Achsenrichtung durch ein Quaternionenprodukt ermittelt werden.

Als Beispiel betrachten wir eine 90° -Drehung \mathbb{R}_x um die x -Achse gefolgt von einer 90° -Drehung \mathbb{R}_z um die z -Achse.

$$\mathbb{R}_x = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{i})$$

$$\mathbb{R}_z = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{k})$$

$$\mathbb{R}_z\mathbb{R}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{i}) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$\mathbb{R}_z\mathbb{R}_x$ entspricht einer Drehung um $\frac{2}{3}\pi$ oder 120° um $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quaternionenschiefkörper \mathbb{H}

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

$$|\mathbb{A}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Bemerkenswert: $|\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|$

Beweis:

$$|\mathbb{A}||\mathbb{B}| = (\mathbb{A}\mathbb{A}^*)(\mathbb{B}\mathbb{B}^*) = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{B}^*)\mathbb{A}^* = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{B}^*\mathbb{A}^*) = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = |\mathbb{A}\mathbb{B}|$$

$\mathbb{B}\mathbb{B}^* \in \mathbb{R}$, daher vertauschbar

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbb{A}\mathbb{A}^*} \mathbb{A}^*$$

Für $|\mathbb{A}| = 1$ (Einheitsquaternion) gilt damit $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^*$.

Vektoren können dividiert werden.

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \mathbb{A}^* &= -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbb{A}^{-1} &= \frac{1}{9}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} &= 1\end{aligned}$$

Die Division von Vektoren beschäftigte Hamilton viele Jahre.

“Well, Papa, can you multiply triplets?” “No, I can only add and subtract them.”

$$\mathbb{A} = [0, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [0, \vec{b}]$$

Die Frage war, wie muss das Produkt gewählt werden, damit bei gegebenem $\mathbb{A}\mathbb{B}$ und \mathbb{A} der Faktor \mathbb{B} eindeutig bestimmt ist, durch \mathbb{A} also geteilt werden kann?

Die Antwort lautet:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [-\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}]$$

Die Richtungsvektoren \vec{a}, \vec{b} legen eine Ursprungsebene fest.

Wenn \vec{a} gegeben ist, liegt \vec{b} also in der Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{a} \times \vec{b}$ und schließt mit \vec{a} einen bestimmten Winkel α ein. α ist in $\vec{a} \cdot \vec{b}$ verpackt. Somit sind 4-Tupel erforderlich.

Aus $[-\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}]$ ergeben sich die Rechenregeln für $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

$$[a, \vec{a}][1, \vec{0}] = [a, \vec{a}] \text{ legt die Verallgemeinerung}$$

$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [ab - \vec{a} \cdot \vec{b}, a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

nahe.