Rekursive Folgen

Ermittle jeweils drei weitere Elemente.
Gegen welchen Wert könnte die Folge streben?

a) $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$

b) $\frac{1}{4}, \frac{9}{5}, \frac{19}{14}, \dots$

c) $\frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{14}{8}, \dots$

d) $\frac{1}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{7}, \dots$

e) $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{22}{10}, \dots$

Rekursive Folgen

Ermittle jeweils drei weitere Elemente.
Gegen welchen Wert könnte die Folge streben?

a) $\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots \qquad \xrightarrow{?} \sqrt{2}$

b) $\frac{1}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{19}{14},\ \frac{47}{33},\ \frac{113}{80},\ \frac{273}{193},\ \ldots \qquad \xrightarrow{?} \sqrt{2}$

c) $\frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{14}{8},\ \frac{38}{22},\ \frac{104}{60},\ \frac{284}{164},\ \ldots \qquad \xrightarrow{?} \sqrt{3}$

d) $\frac{1}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{7},\ \frac{41}{20},\ \frac{121}{61},\ \frac{365}{182},\ \ldots \qquad \xrightarrow{?} 2$

e) $\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{22}{10},\ \frac{72}{32},\ \frac{232}{104},\ \frac{752}{336},\ \ldots \qquad \xrightarrow{?} \sqrt{5}$

Bildungsgesetz

Den Folgen

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots \qquad \overset{?}{\longrightarrow}\ \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{19}{14},\ \frac{47}{33},\ \frac{113}{80},\ \frac{273}{193},\ \ldots \qquad \overset{?}{\longrightarrow}\ \sqrt{2}$$

liegt das Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 2N_n + Z_n \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

zugrunde,
Z Zähler, N Nenner.

Weiter gilt:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{14}{8},\ \frac{38}{22},\ \frac{104}{60},\ \frac{284}{164},\ \ldots \qquad \overset{?}{\longrightarrow}\ \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 3N_n + Z_n \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{7},\ \frac{41}{20},\ \frac{121}{61},\ \frac{365}{182},\ \ldots \qquad \overset{?}{\longrightarrow}\ 2$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 4N_n + Z_n \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{22}{10},\ \frac{72}{32},\ \frac{232}{104},\ \frac{752}{336},\ \ldots \qquad \overset{?}{\longrightarrow}\ \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 5N_n + Z_n \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ ist irrational

$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}, \frac{338}{239}, \frac{816}{577}, \ldots$

Wird eine Folge gemäß

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 2N_n + Z_n \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

gebildet,
so kann mit

$$\begin{aligned} Z_n &= 2N_{n+1} - Z_{n+1} \\ N_n &= Z_{n+1} - N_{n+1} \end{aligned}$$

zurückgerechnet werden.

Nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ als Bruch darstellbar wäre, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \\ p^2 - pq &= 2q^2 - pq \\ p \cdot (p - q) &= q \cdot (2q - p) \\ \frac{p}{q} &= \frac{2q - p}{p - q} \end{aligned}$$

Wir können $p > q$ annehmen, dann muss auch $2q - p > 0$ sein (siehe letzte Gleichung).
Für $\sqrt{2}$ ist $\frac{2q-p}{p-q}$ ein Bruch mit kleinerem Nenner, beachte $p - q < q$ wegen $2q - p > 0$.
Dieser Vorgang kann unbegrenzt wiederholt werden. Das ist jedoch nicht möglich,
da der Nenner eine natürliche Zahl ist. Die Voraussetzung muss falsch sein.

Für $\sqrt{4} = \frac{p}{q}$ bleibt $\frac{4q-p}{p-q}$ wegen $p = 2q$ konstant.

Grenzwert

Zum Nachweis

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots \qquad \longrightarrow \ \sqrt{2}$$

wird die Entwicklung der Zähler und Nenner in die Matrizenschreibweise übertragen.

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 2N_n + Z_n \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{n+1} \\ N_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n \\ N_n \end{pmatrix}$$

Die explizite Form mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren lautet dann:

$$\begin{pmatrix} Z_n \\ N_n \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})^n \cdot c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\sqrt{2})^n \cdot c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $n = 0$ ist das der Startvektor als Linearkombination der Eigenvektoren
und den Koeffizienten c_1, c_2. Der 2. Summand strebt wegen $1-\sqrt{2} \approx -0{,}41$ gegen null
und der Quotient $\frac{Z_n}{N_n}$ gegen $\sqrt{2}$. Bei der Quotientenbildung fällt $(1+\sqrt{2})^n \cdot c_1$ heraus.
Der Grenzwert ist unabhängig vom Startvektor.

Eigenvektoren und Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 1 \end{pmatrix}$, $1+\sqrt{a}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{a} \\ 1 \end{pmatrix}$, $1-\sqrt{a}$.

Rekursive Folgen können als Vorbereitung des Grenzwertbegriffs dienen, die Verwendung von Excel böte sich an. Die Matrizenrechnung wurde in Niedersachsen aus dem Lehrplan gestrichen.

Grenzwert, alternativ

Zum Nachweis der Konvergenz der Folgen $\frac{Z_n}{N_n}$ mit

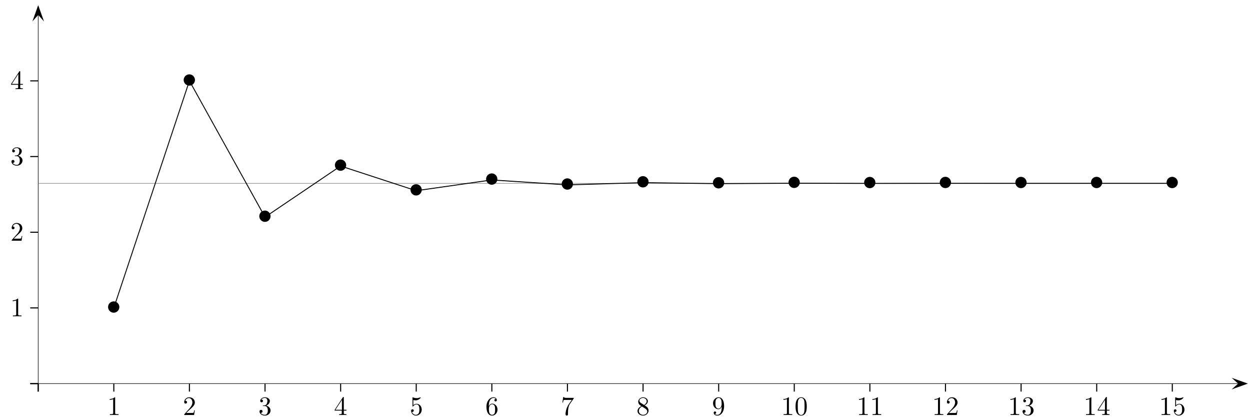
$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= aN_n + Z_n \qquad (a > 1) \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

wird die Beschränktheit gezeigt (Schreibweise ohne Indizes).

$$\begin{aligned} \frac{aN + Z}{N + Z} &< a \\ aN + Z &< aN + aZ \\ Z &< aZ \end{aligned}$$

Wenn es nur einen Häufungspunkt gäbe, dann würde gelten:

$$\begin{aligned} \frac{aN + Z}{N + Z} &= \frac{Z}{N} \\ aN^2 + NZ &= NZ + Z^2 \\ aN^2 &= Z^2 \\ \sqrt{a} &= \frac{Z}{N} \end{aligned}$$



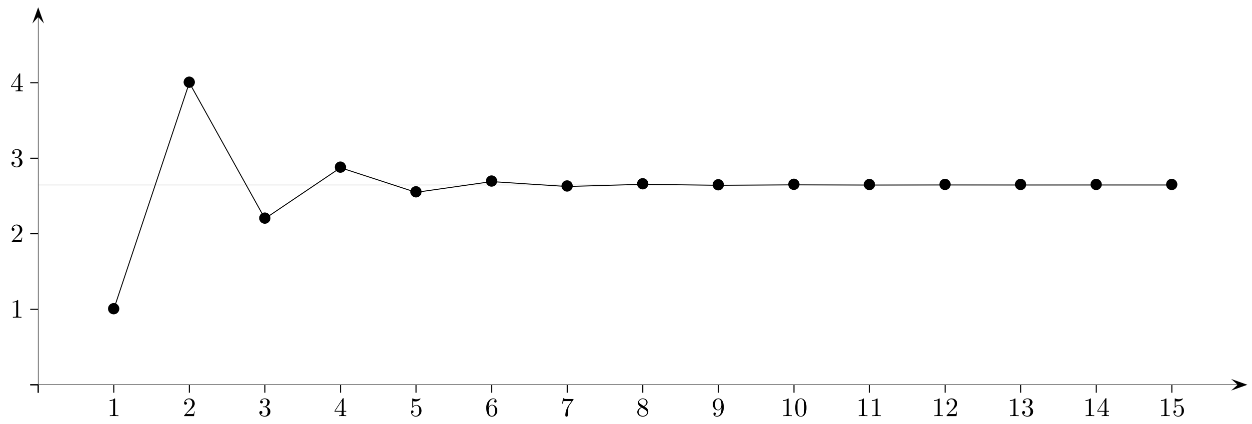
$$\frac{1}{1},\ \frac{8}{2},\ \frac{22}{10},\ \frac{92}{32},\ \frac{316}{124},\ \frac{1184}{440},\ \ldots \qquad \longrightarrow \quad \sqrt{7}$$

Es müsste die Existenz mehrerer Häufungspunkte ausgeschlossen werden. Wir zeigen:

1. Die Folge oszilliert um $\sqrt{a}$.
2. Der Abstand aufeinanderfolgender Elemente verkürzt sich mit den Faktor q, $q < 1$.

Aus 1. und 2. folgt die Konvergenz gegen $\sqrt{a}$.

Grenzwert, alternativ



Nachweis der Konvergenz der Folgen $\frac{Z_n}{N_n}$ gegen $\sqrt{a}$ mit

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= aN_n + Z_n \qquad (a > 1) \\ N_{n+1} &= N_n + Z_n \end{aligned}$$

1. Die Folge oszilliert um $\sqrt{a}$.

$$\frac{Z_n}{N_n} > \sqrt{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} < \sqrt{a}$$

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} < \sqrt{a} \quad \Longleftrightarrow \quad a - \sqrt{a} < \frac{Z_n}{N_n}(\sqrt{a} - 1)$$

Es gilt $\quad a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$

Mit der Voraussetzung folgt die Behauptung.

$\frac{Z_n}{N_n} < \sqrt{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} > \sqrt{a}$ ist nun auch zu sehen.

2. Der Abstand aufeinanderfolgender Elemente verkürzt sich mit den Faktor q, $q < 1$.

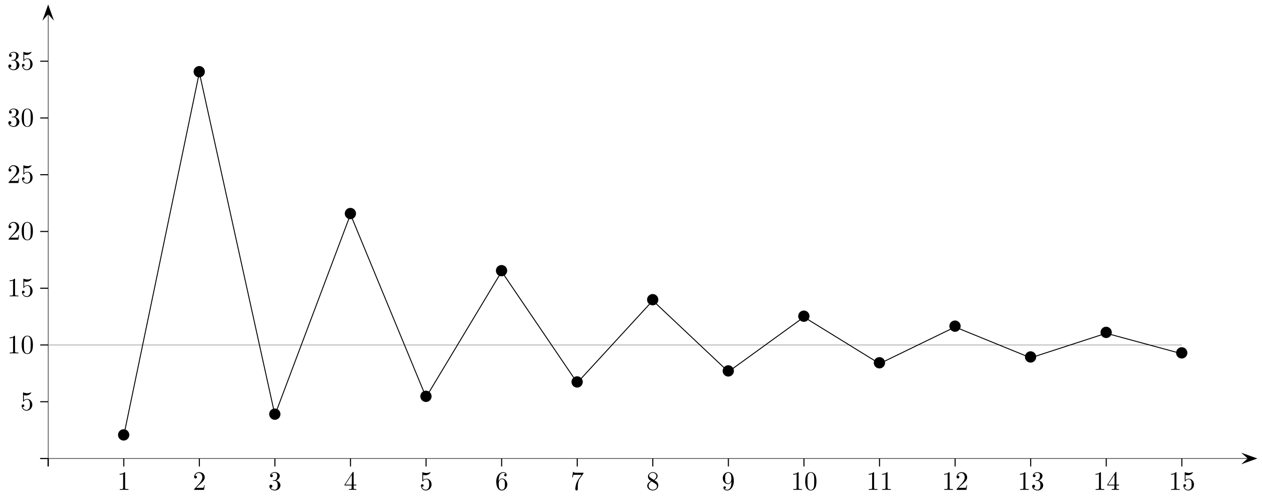
Annahme: $\frac{Z_n}{N_n} > \sqrt{a}$, d.h. $\frac{Z_n}{N_n} - \sqrt{a} = d$, $\frac{Z_n}{N_n} = d + \sqrt{a}$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{a} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{d(\sqrt{a}-1)}{1+d+\sqrt{a}} < q \cdot d \quad \text{mit} \quad q < 1$$

wähle q mit $\quad \sqrt{a} - 1 = q \cdot \sqrt{a}$

Der (sperrige) Fall $\frac{Z_n}{N_n} < \sqrt{a}$ führt mit $\sqrt{a} - \frac{Z_n}{N_n} = d,\ \frac{Z_n}{N_n} = \sqrt{a} - d$ zu

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \sqrt{a} = \frac{d(\sqrt{a}-1)}{1-d+\sqrt{a}} = \frac{dq\sqrt{a}}{1-d+\sqrt{a}} \leq q \cdot d \quad \text{mit } q < 1 \text{ und } 1-d \geq 0, \text{ d.h. } d \leq 1$$



$$\frac{2}{1},\ \frac{102}{3},\ \frac{402}{105},\ \frac{10902}{507},\ \frac{61602}{11409},\ \frac{1202502}{73011},\ \ldots \qquad \longrightarrow \quad \sqrt{100}$$

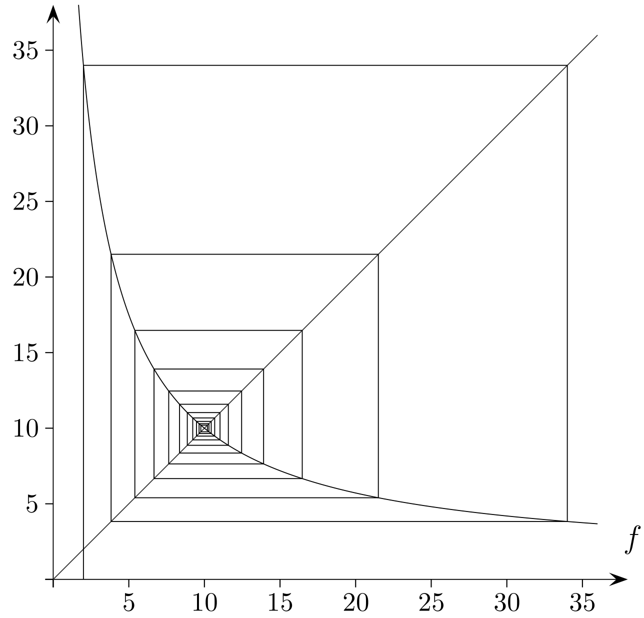
Das Beispiel zeigt, dass die Abstände zur Wurzel auch größer werden können.
Nur wenn man dem Grenzwert nahe genug kommt, $d \leq 1$, ist gesichert, dass die Abstände monoton abnehmen. Der Fall $d > 1$ ist noch offen.
Daher beschreiten wir einen anderen Weg.

Aus der Umformung

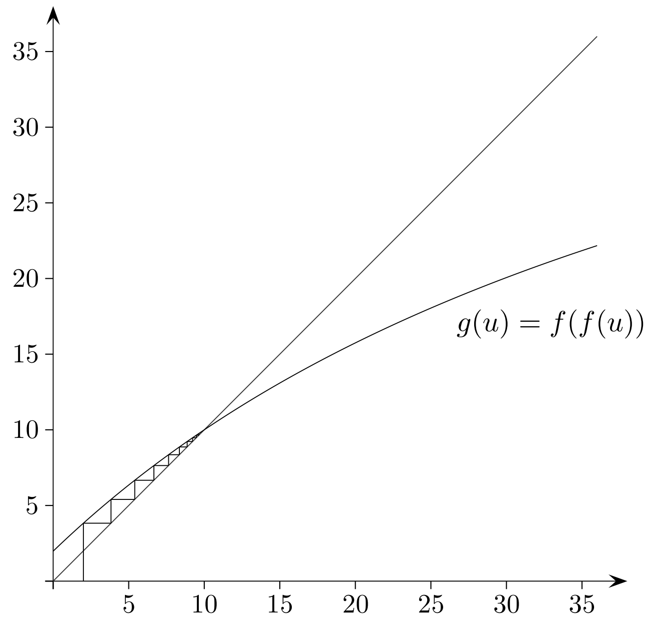
$$\frac{aN+Z}{N+Z} = \frac{a+\frac{Z}{N}}{1+\frac{Z}{N}}$$

ist zu erkennen, dass die rekursive Folge auch durch iterierte Funktionswertbildung mit $f(u) = \frac{a+u}{1+u}$ entsteht.

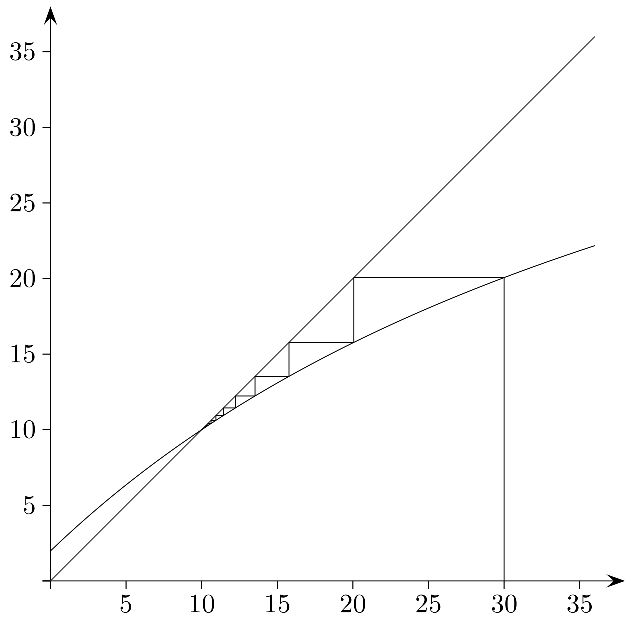
$$u,\ f(u),\ f(f(u)),\ f(f(f(u))),\ \ldots$$



$f(u) = \frac{a+u}{1+u}, \quad a = 100,$ Startwert $u = 2$



Startwert $u = 2$



Startwert $u = 30$

$$g'(u) = \frac{(a-1)^2}{(1+2u+a)^2}$$

$$g''(u) = -\frac{4(a-1)^2}{(1+2u+a)^3}$$

Der Graph von g ist somit rechtsgekrümmt.

g beschreibt die Folge mit der Schrittweite 2.

Hiermit haben wir eine Begründung für die Grafik auf der vorigen Seite.

Fibonacci-Folge

Das im Jahre l202 von Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci) veröffentlichte Mathematikbuch enthielt folgende Frage zur Entwicklung einer Kaninchenpopulation:
Jeden Monat wirft jedes Paar erwachsener Kaninchen 1 Paar Junge. Die Jungen werden im zweiten Monat erwachsen und werfen von da an ebenso in jedem Monat 1 Paar Junge. Wie viele erwachsene Kaninchenpaare gibt es zu Beginn eines jeden Monats, wenn zum Beginn des 0. Monats genau ein eben geworfenes Kaninchenpaar vorhanden ist und wenn keine Kaninchen verenden?
Schematische Darstellung der Entwicklung der Population:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccccccc}
\text{Monat} & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & \\
\text{Jungtiere} & 1 & & & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 13 & & 21 & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow \\
\text{erwachsene Paare} & 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 13 & \longrightarrow & 21 & \longrightarrow & 34 & \longrightarrow
\end{array}$$

$\searrow$ erwachsen werden

$\nearrow$ zeugen

Sei y_i die Zahl der erwachsenen Paare zu Beginn des i-ten Monats, dann gilt:

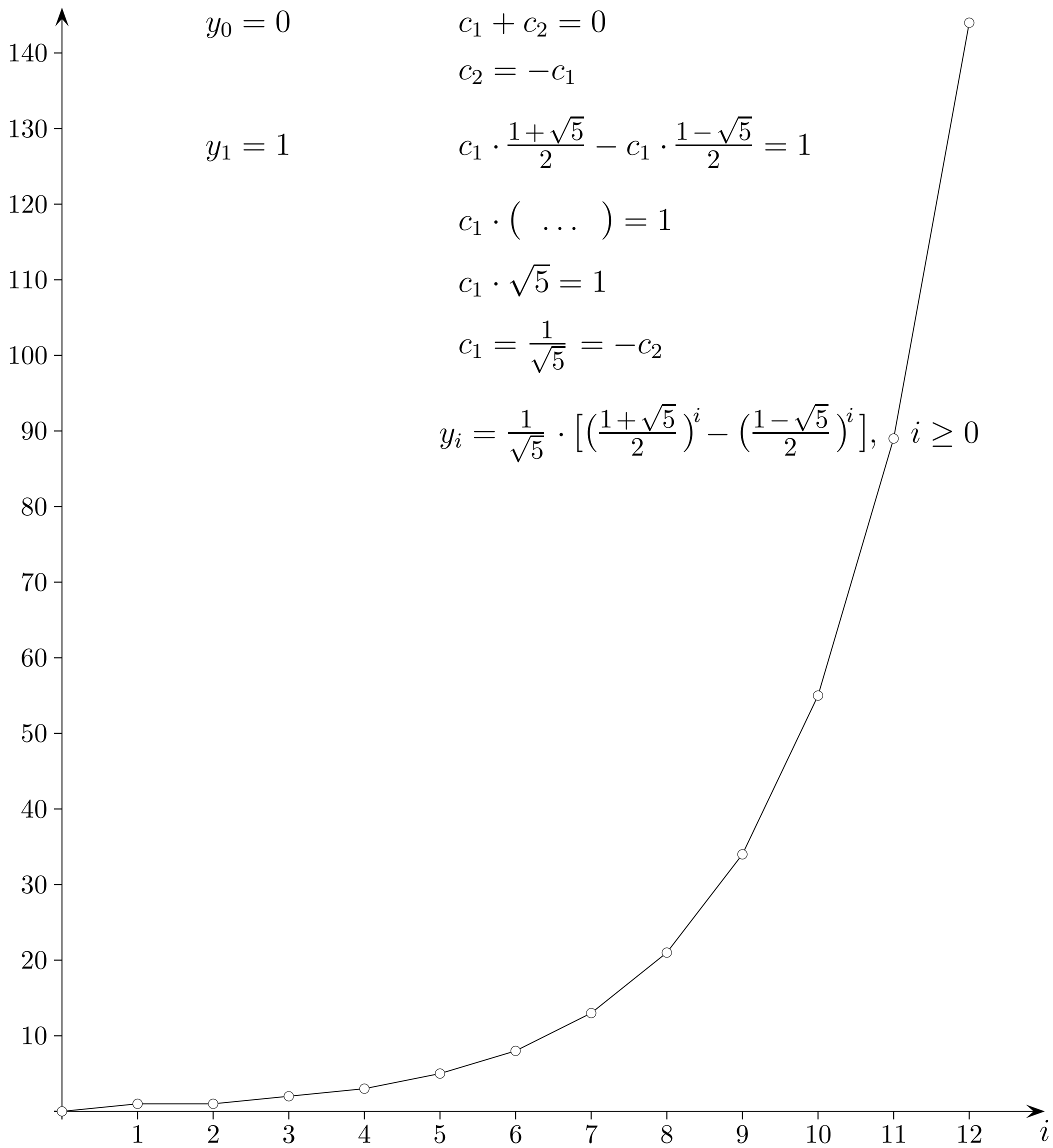
$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_{i+2} = y_i + y_{i+1},\ i \geq 0$$

Fibonacci-Folge

$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_{i+2} = y_i + y_{i+1},\ i \geq 0$

Ansatz:	$y_i = k^i$
eingesetzt:	$k^{i+2} = k^{i+1} + k^i$
vereinfacht:	$k^2 - k - 1 = 0$
	$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
allgemeine Lösung:	$y_i = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i$
$y_0 = 0$	$c_1 + c_2 = 0$
	$c_2 = -c_1$
$y_1 = 1$	$c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - c_1 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$
	$c_1 \cdot (\ \ldots\ ) = 1$
	$c_1 \cdot \sqrt{5} = 1$
	$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = -c_2$

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right], \quad i \geq 0$$



Weitere Folgen

Der Folge

$$\frac{2}{1},\ \frac{17}{10},\ \frac{1520}{889},\ \frac{12059285}{7052326},\ \ldots \qquad \longrightarrow \quad \sqrt[3]{5}$$

liegt das Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 5N_n^2 + 6N_nZ_n \\ N_{n+1} &= 6N_n^2 + Z_n^2 \end{aligned}$$

zugrunde.
Der 4. Bruch liefert 5 gültige Nachkommastellen (ohne zu runden).

Allgemein:

Eine Folge mit dem Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= aN_n^2 + (a+1)N_nZ_n \\ N_{n+1} &= (a+1)N_n^2 + Z_n^2 \end{aligned}$$

konvergiert gegen $\sqrt[3]{a}$.

Für Excel eignet sich die Folge:

$$a_{n+1} = \frac{a + (a+1)a_n}{(a+1) + a_n^2}$$