Lineare Optimierung

Dantzig 1947

Lineare Optimierungs-Aufgaben lassen sich mit Maple direkt lösen:

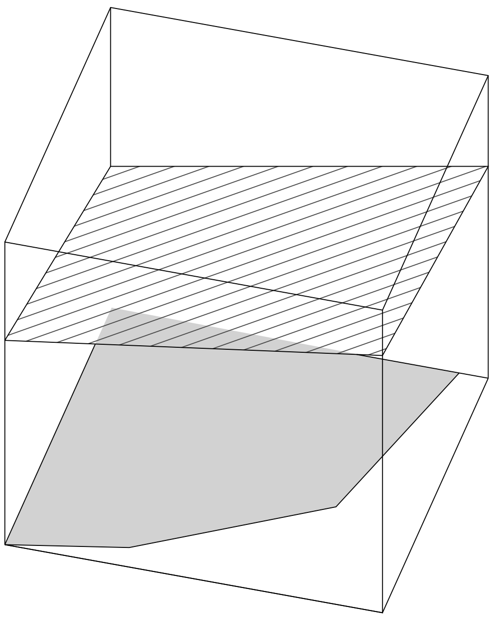
```
with(simplex):
    g1:=   4*x1  +    x2  <=  26:
    g2:=     x1  +  4*x2  <=  24:
    g3:=   3*x1  +  2*x2  <=  22:
ziel:= 1/3*x1 + 2/3*x2 + 3:
L:= maximize(ziel, {g1, g2, g3}, NONNEGATIVE);
subs(L, ziel);
```

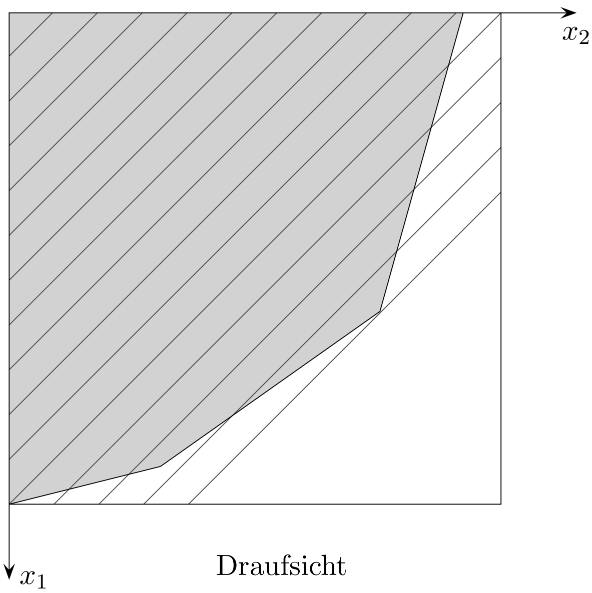
liefert die Ausgabe: L:= {x1 = 4, x2 = 5}

$$\frac{23}{3}$$

Für ein Minimum-Problem wären >= und minimize(ziel, ...) zu verwenden.

Ein anderes Vorgehen gewährt einen Einblick in das Lösungsverfahren.
Zunächst sollen jedoch einige Zusammenhänge anschaulich begründet werden (uns geht es hier um Einsicht und nicht um exakte Beweise).





Draufsicht

1. Die Punkte $P(x_1 \mid x_2)$, deren Koordinaten (wir betrachten nur nichtnegative) die Ungleichungen erfüllen, bilden eine konvexe Menge (den zulässigen Bereich), d. h. mit je zwei Punkten gehören auch die Punkte der Verbindungslinie zu dieser Menge. *(Tipp: Betrachte die Ränder.)*

2. Die Niveau- oder Höhenlinien (einige wurden gezeichnet), die von jeweils gleichen Funktionswerten gebildet werden, sind parallele Geraden. Das Maximum der Zielfunktion (dreidimensional bildet sie eine Ebene) wird in einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen.

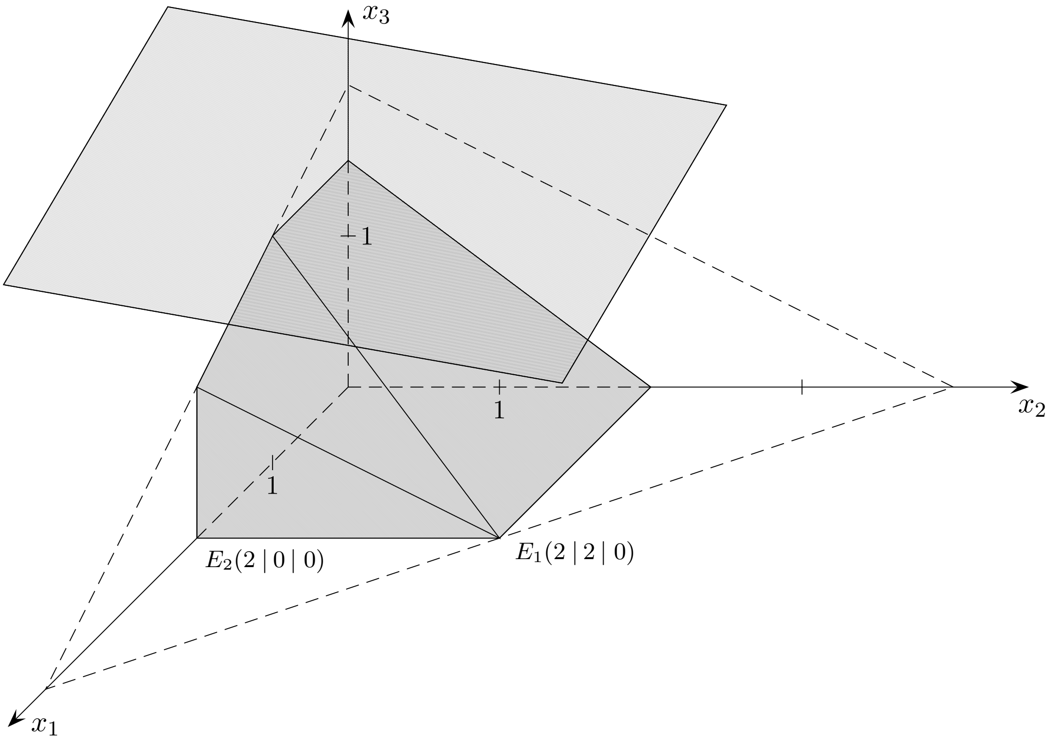
3. Das Maximum kann auch auf allen Punkten einer Kante des zulässigen Bereichs angenommen werden. Nicht jedes lineare Optimierungsproblem ist lösbar.

Lineare Optimierung mit drei Variablen, Veranschaulichung

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & & & \leq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 4 \\ & & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & \leq & 6 \end{array}$$

$$Z = x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \quad \longrightarrow \quad Max$$



1. Der zulässige Bereich wird durch Ebenen begrenzt.

2. Die Niveauflächen (sie entsprechen den Niveaulinien), die von jeweils gleichen Funktionswerten gebildet werden, sind parallele Ebenen. Das Maximum der Zielfunktion wird in einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen.

3. Der zulässige konvexe Bereich (Simplex) kann durch ein Gleichungssystem beschrieben werden, indem sogenannte Schlupfvariablen y_1, y_2, y_3 (nichtnegativ) eingeführt werden, sie bedeuten ökonomisch, um wie viel vorhandene Kapazitäten nicht genutzt werden.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & y_1 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & y_2 & = & 4 \\ & & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & y_3 & = & 6 \end{array}$$

Jede Ecke ist der Schnittpunkt von drei Ebenen. Die Ebenengleichungen ergeben sich, indem von den sechs Variablen jeweils drei null gesetzt werden. Setzen wir $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, so erhalten wir die Ecke $E_1(2\,|\,2\,|\,0)$, $y_1 = x_2 = x_3 = 0$ ergibt $E_2(2\,|\,0\,|\,0)$, beachte: $x_2 = 0$ ist die x_1-x_3-Ebene.

Variablentausch

Alle nichtnegativen Lösungen $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ des Gleichungssystems ergeben den zulässigen Bereich.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & y_1 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & y_2 & = & 4 \\ & & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & y_3 & = & 6 \end{array}$$

Die Werte von drei Variablen können vorgegeben werden, die übrigen sind dann eindeutig festgelegt. Bei der Vorgabe ist jedoch zu beachten, dass die restlichen Variablenwerte auch nichtnegativ sind.

Wird nun das Gleichungssystem nach drei Variablen aufgelöst, z. B. nach x_1, x_3 und y_1, und beziehen wir die Zielfunktionsgleichung mit in die Auflösung ein, so erhalten wir eine Zielfunktion, die von den übrigen Variablen abhängt.

```
g1:=  x1                      +  y1    =  2:
g2:=  x1  +    x2  +  2*x3    +  y2    =  4:
g3:=         3*x2  +  4*x3    +  y3    =  6:

g4:=           x1  +  2*x2    +  4*x3  =  Z:
```

L:= solve({g1, g2, g3, g4}, {x1, x3, y1, Z});

Maple liefert:

$$Z = 7 - \frac{1}{2}\,y3 - \frac{1}{2}\,x2 - y2$$

Wir erkennen nun, dass das Maximum der Zielfunktion 7 sein muss, wobei die Variablen $y3$, $x2$, $y2$ null sind. Da diese Variablenwerte subtrahiert werden, ergäbe sich ein kleinerer Wert, falls sie positive Werte annähmen. Mit

y3:=0: x2:=0: y2:=0:   L[1]; L[2]; L[3]; L[4];

gibt Maple die weiteren Werte aus:

$$y1 = 1$$
$$Z = 7$$
$$x3 = \frac{3}{2}$$
$$x1 = 1$$

Bei einem Minimum-Problem hätte die Zielfunktion, die die Lösung angibt, z. B. die Form

$$Z = 7 + \frac{1}{2}\,y3 + \frac{1}{2}\,x2 + y2$$

und in den Restriktionsgleichungen stände vor den Schlupfvariablen ein Minus.

Es bleibt noch zu klären, nach welchen Variablen das Gleichungssystem aufgelöst werden muss. Da es viele Möglichkeiten geben kann, scheidet Probieren in der Regel aus.

Wir versuchen, uns so von Ecke zu Ecke zu hangeln, dass dabei der Zielfunktionswert vergrößert wird. Anfänglich kann das Gleichungssystem nach den Schlupfvariablen y_1, y_2 und y_3 aufgelöst werden. Dieser und alle folgenden Schritte sind auch ohne Maple durchführbar.

```
g1:= x1                     + y1  = 2:
g2:= x1 +   x2 + 2*x3 + y2  = 4:
g3:=      3*x2 + 4*x3 + y3  = 6:

g4:=        x1 + 2*x2 + 4*x3 = Z:
```

```
L:= solve({g1, g2, g3, g4}, {y1, y2, y3, Z}):
L[1]; L[2]; L[3]; L[4];
```

Die letzte Zeile dient nur der übersichtlicheren Darstellung der Lösung.

Maple liefert:

$$\begin{aligned} y1 &= -x1+2 \\ y2 &= -x1-x2-2\,x3+4 \\ y3 &= -3\,x2-4\,x3+6 \\ Z &= x1+2\,x2+4\,x3 \end{aligned}$$

Der Zielfunktionswert beträgt in dieser Ecke noch null. Er kann vermutlich stark vergrößert werden, indem z. B. $x3$ vergrößert wird. Daher tauschen wir $x3$ aus. Wenn $x3$ $y2$ verdrängt, ergibt sich:

```
L:= solve({g1, g2, g3, g4}, {y1, x3, y3, Z}):
```

$$\begin{aligned} y1 &= ... \\ x3 &= ... \\ y3 &= -x2+2\,x1+2\,y2-2 \\ Z &= -x1-2\,y2+8 \end{aligned}$$

Hierbei entsteht jedoch eine unzulässige Lösung, $y3$ wird beim Nullsetzen der Variablen $x2$, $x1$, $y2$ negativ. $x3$ muss daher $y3$ verdrängen. *Die Variablen, nach denen aufgelöst wird, heißen Basisvariablen.*

L:= solve({g1, g2, g3, g4}, {y1, y2, x3, Z}) liefert $Z = x1-x2-y3+6$

Die Ecke mit dem maximalen Zielfunktionswert $Z=7$ wird erreicht, indem noch $y2$ durch $x1$ ersetzt wird.

```
L:= solve({g1, g2, g3, g4}, {y1, x1, x3, Z}):
```

Um zu erkennen, wie unzulässige negative Lösungen vermieden werden können, tauschen wir x_1 durch x_2 aus:

$$x_1 = a-b\,x_2 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = \frac{a}{b}-\frac{1}{b}\,x_1$$

$$x_3 = c-d\,x_2 \quad\Longrightarrow\quad x_3 = \underbrace{c-\frac{a\,d}{b}}_{\geq 0}+\frac{d}{b}\,x_1 \qquad \text{(alle Variablen sollen positiv sein)}$$

$$\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{c}{d} \geq \frac{a}{b}$$

Im Fall $x_3 = c+d\,x_2$ tritt die Problematik nicht auf.
Falls die zu tauschende Variable wiederholt vorkommt, ist zuerst das Quotienten-Minimum zu suchen.

Dualität

v. Neumann

Zwei Nahrungsmittel sollen kostenminimal gemischt werden,
so dass Mindestmengen der Vitamine A, B und C vorhanden sind.

Ein typisches Beispiel lautet:

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 50 \\
2\,x_1 & + & x_2 & \geq & 100 \\
2\,x_1 & + & 4\,x_2 & \geq & 130
\end{array}
$$

$$Z \;=\; 10\,x_1 \;+\; 8\,x_2 \quad \longrightarrow \quad \mathit{Min}$$

```
g1:=      x1  +  2*x2  -  y1  =   50:
g2:=    2*x1  +    x2  -  y2  =  100:
g3:=    2*x1  +  4*x2  -  y2  =  130:

g4:=          10* x1  +  8*x2  =  Z:

L:= solve({g1, g2, g3, g4}, {x1, x2, y1, Z})
```

Ergebnis: $Z = 530 + 4\,y2 + y3$
$y1 = 15,\ x2 = 10,\ x1 = 45,\ Z = 530$

Erläuterungen:
Die Nahrungsmittelmengen sind x_1, x_2.
In einer Einheit des 1. Nahrungsmittels ist eine Einheit des Vitamins A,
in einer Einheit des 2. Nahrungsmittels sind zwei Einheiten des Vitamins A enthalten.
Die Mindestmenge des Vitamins A beträgt 50 Einheiten.
Die Kosten für das 1. Nahrungsmittel betragen 10 Währungs-Einheiten.

Die Koeffizienten vor den Variablen in $Z = 530 + 4\,y2 + y3$ erlauben eine ökonomische Interpretation. Wenn z.B. die Mindestmenge des Vitamins B um eine Einheit vergrößert (verkleinert) wird, so erhöhen (verringern) sich die Kosten um 4 Einheiten. Dieser Wert wird als Schattenpreis bezeichnet.
Eine Vergrößerung der Mindestmenge des Vitamins A hat keine Auswirkungen, solange die Variablen nichtnegativ bleiben (beachte: $y_1 = 15$).

Zu jedem Minimum-Problem gibt es ein Maximum-Problem mit demselben Zielfunktionswert.

Stellen wir uns vor, wir wären nur an den Vitaminen in den Nahrungsmitteln interessiert (realitätsnäher wäre eine Betrachtung von Medikamentenmengen und Wirkstoffen) und ein Händler würde uns die Lieferung der benötigten Mindestmengen der Vitamine A, B und C anbieten. Wir gingen auf das Angebot nur ein, wenn die Kosten für uns nicht größer wären als beim selber Mischen.
Welche Preise kann der Händler maximal für die Vitamine verlangen?

Der Händler wird daher ein duales Maximum-Problem für seinen Umsatz lösen. Mit Maple gelingt ihm das mühelos. Seine Zielfunktion beinhaltet die Preise u_1, u_2, u_3 für die Mengeneinheiten der Vitamine A, B und C und deren festgelegte Liefermengen.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
u_1 & + & 2\,u_2 & + & 2\,u_3 & \leq & 10 \\
2\,u_1 & + & u_2 & + & 4\,u_3 & \leq & 8
\end{array}
$$

$$Z \;= 50\,u_1 \;+\; 100\,u_2 \;+\; 130\,u_3 \quad \longrightarrow \; \mathit{Max}$$

Ergebnis: $Z = 530 - 15\,u1 - 10\,v2 - 45\,v1$
$u2 = 4,\ u3 = 1,\ Z = 530$

Die Zeilen des dualen Problems ergeben sich aus den Spalten des Minimum-Problems.
$u_1 + 2\,u_2 + 2\,u_3 \;\leq\; 10$ stellt sicher, dass der Gesamtpreis für die Vitaminmengen, die in einer Einheit des 1. Nahrungsmittels enthalten sind, den Preis für diese Einheit nicht übersteigt.

Roolfs

Literatur: J. Tietze, Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, Vieweg 1999

Dualität   Fortsetzung

Es mag erstaunlich erscheinen, dass das Vitamin A kostenlos $(u_1 = 0)$ abgegeben wird.
Wenn wir jedoch beim Mischen eine Einheit des 1. Nahrungsmittels weniger verwenden und dabei 10 Währungs-Einheiten einsparen, fehlen uns jeweils 2 Einheiten der Vitamine B und C, wo hingegen A reichlich vorhanden ist, d. h. es bildet keinen Engpass. Wenn wir die fehlenden Vitamine kaufen würden, hätten wir dafür 10 Einheiten zu bezahlen. Der Händler hat seine Preisgestaltung wahrlich maximiert.

Das vorige Beispiel zeigt die enge Verzahnung des ursprünglichen Problems mit seinem dualen.
An einem etwas allgemeiner gefassten Beispiel sind die Beziehungen erkennbar.

Die Ungleichungen (Restiktionen) eines Minimum-Problems seien

$$\begin{array}{lcccl} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & \geq & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & \geq & b_2 \end{array}$$

Mit Schlupfvariablen lautet das Minimum-Problem:

$$\begin{array}{lcccccl} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & - & y_1 & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & - & y_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$Z = p_1\,x_1 + p_2\,x_2 \longrightarrow \textit{Min}$$

Die Auflösung nach x_2 und y_1 ergibt z. B. eine Lösung, falls die Koeffizienten vor x_1 und y_2 positiv sind.

$$Z = \underbrace{\frac{b_2\,p_2}{a_{22}}}_{\textit{Minimum}} + \underbrace{\left(\frac{a_{22}\,p_1 - a_{21}\,p_2}{a_{22}}\right)}_{>0} x_1 + \underbrace{\frac{p_2}{a_{22}}}_{>0} y_2$$

Lösung:

$$x_1 = 0$$
$$y_2 = 0$$
$$y_1 = \frac{a_{12}\,b_2 - a_{22}\,b_1}{a_{22}}$$
$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

Die Restiktionen des dualen Maximum-Problems lauten:

$$\begin{array}{lcccl} a_{11}\,u_1 & + & a_{21}\,u_2 & \leq & p_1 \\ a_{12}\,u_1 & + & a_{22}\,u_2 & \leq & p_2 \end{array}$$

Mit Schlupfvariablen erhalten wir:

$$\begin{array}{lcccccl} a_{11}\,u_1 & + & a_{21}\,u_2 & + & v_1 & = & p_1 \\ a_{12}\,u_1 & + & a_{22}\,u_2 & + & v_2 & = & p_2 \end{array}$$

$$Z^* = b_1\,u_1 + b_2\,u_2 \longrightarrow \textit{Max}$$

Die Auflösung nach u_2 und v_1 ergibt eine Lösung.

$$Z^* = \underbrace{\frac{b_2\,p_2}{a_{22}}}_{\textit{Maximum}} - \underbrace{\left(\frac{a_{12}\,b_2 - a_{22}\,b_1}{a_{22}}\right)}_{>0} u_1 - \underbrace{\frac{b_2}{a_{22}}}_{>0} v_2$$

Lösung:

$$v_1 = \frac{a_{22}\,p_1 - a_{21}\,p_2}{a_{22}}$$
$$u_2 = \frac{p_2}{a_{22}}$$
$$u_1 = 0$$
$$v_2 = 0$$

Die Reihenfolge deckt den Zusammenhang zur obigen Lösung auf.