# Kubische Splines

Früher wurde eine glatte Kurve durch vorgegebene Punkte mit einem biegsamen Lineal (engl. spline) gezeichnet. Eine dünne Holzlatte kann durch Fixierung an einzelnen Stellen verbogen werden (Schiffsbau), die Holzlatte minimiert dann durch ihre Form die Gesamtkrümmung.
Seien (zunächst) drei Punkte gegeben. Eine solche Kurve kann dadurch erhalten werden, dass jeweils auf dem rechten und linken Intervall zwei ganzrationale Funktionen bestimmt werden, die bestimmten Bedingungen genügen. Erläutere diese.

$$P(x_1 \mid y_1)$$
$$P(x_2 \mid y_2)$$
$$P(x_3 \mid y_3)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad [x_1, x_2] \\ g(x) &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \qquad [x_2, x_3] \end{aligned}$$

1. $f(x_1) = y_1$
2. $f''(x_1) = 0$
3. $f(x_2) = y_2$
4. $g(x_2) = y_2$
5. $f'(x_2) = g'(x_2)$
6. $f''(x_2) = g''(x_2)$
7. $g(x_3) = y_3$
8. $g''(x_3) = 0$

Für jeden weiteren Punkt ist eine Teilfunktion mit vier Bedingungen entsprechend 3. - 6. hinzuzufügen.

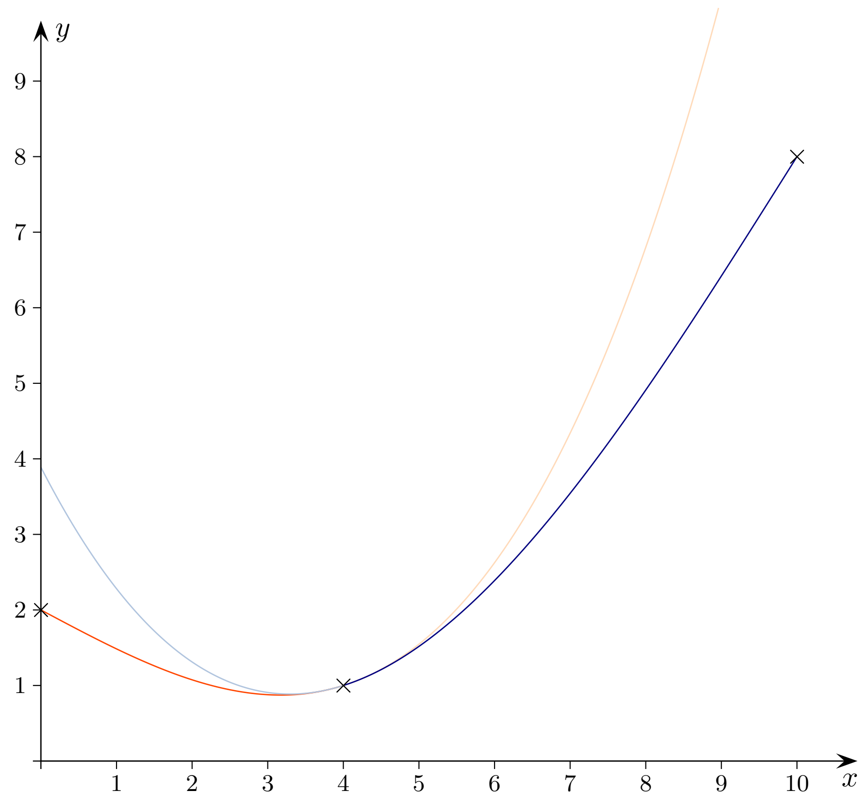
Beispiel

$$A(0 \mid 2)$$
$$B(4 \mid 1)$$
$$C(10 \mid 8)$$

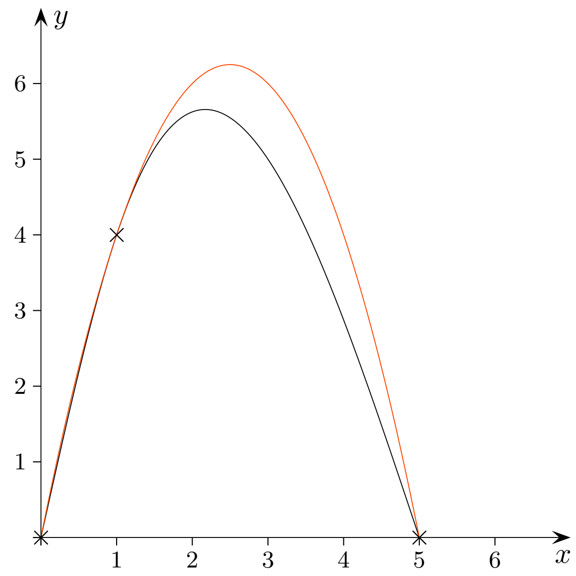
# Kubische Splines

$$
\begin{array}{rrcl}
1. & a_0 & = & 2 \\
2. & 2a_2 & = & 0 \\[4pt]
3. & 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 & = & 1 \\
4. & 64b_3 + 16b_2 + 4b_1 + b_0 & = & 1 \\
5. & 48a_3 + 8a_2 + a_1 & = & 48b_3 + 8b_2 + b_1 \\
6. & 24a_3 + 2a_2 & = & 24b_3 + 2b_2 \\[4pt]
7. & 1000b_3 + 100b_2 + 10b_1 + b_0 & = & 8 \\
8. & 60b_3 + 2b_2 & = & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \frac{17}{960}x^3 - \frac{8}{15}x + 2 & & [0,4] \\[6pt]
g(x) = -\frac{17}{1440}x^3 + \frac{17}{48}x^2 - \frac{39}{20}x + \frac{35}{9} & & [4,10]
\end{array}
$$



# Kubische Splines




Zeigen Sie, dass

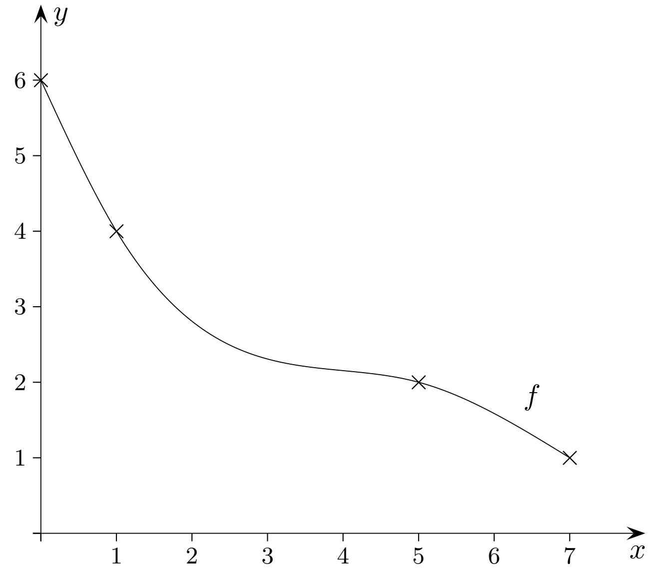
$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3 & x < 1 \\ -\frac{5}{8} + \frac{51}{8}x - \frac{15}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

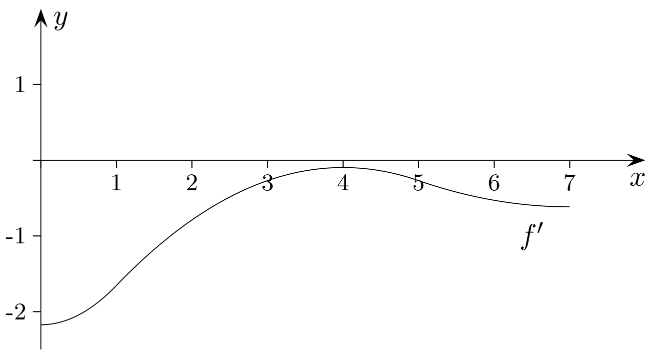
die Splinefunktion zu den Stützpunkten $A(0 \mid 0)$, $B(1 \mid 4)$ und $C(5 \mid 0)$ ist und $g(x) = -x^2 + 5x$ ein Interpolationspolynom.

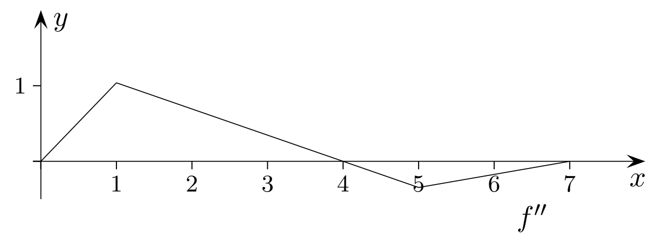
# Kubische Splines

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{113}{52}x + \frac{9}{52}x^3 & x < 1 \\ \frac{81}{13} - \frac{149}{52}x + \frac{9}{13}x^2 - \frac{3}{52}x^3 & 1 \leq x < 5 \\ -\frac{477}{104} + \frac{29}{8}x - \frac{63}{104}x^2 + \frac{3}{104}x^3 & 5 \leq x \end{cases}$$

$f$ ist die Splinefunktion zu den Stützpunkten
$A(0 \mid 6)$, $B(1 \mid 4)$, $C(5 \mid 2)$ und $D(7 \mid 1)$.
Erläutern Sie die Graphen.



# Kubische Splines

Je zwei benachbarte Punkte werden durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades knick- und krümmungsruckfrei verbunden.

Am Anfang und Ende ist der Graph ungekrümmt, $f''(a) = 0$, d. h. die Fortsetzung wäre geradlinig.

$f'$ ist aus quadratischen Funktionen (Parabelbögen) zusammengesetzt, $f''$ aus linearen Funktionen.

Die 2. Ableitung von $f$ ist stetig. Der Streckenzug beginnt und endet auf der $x$-Achse.