

Finite-Elemente-Methode (FEM)

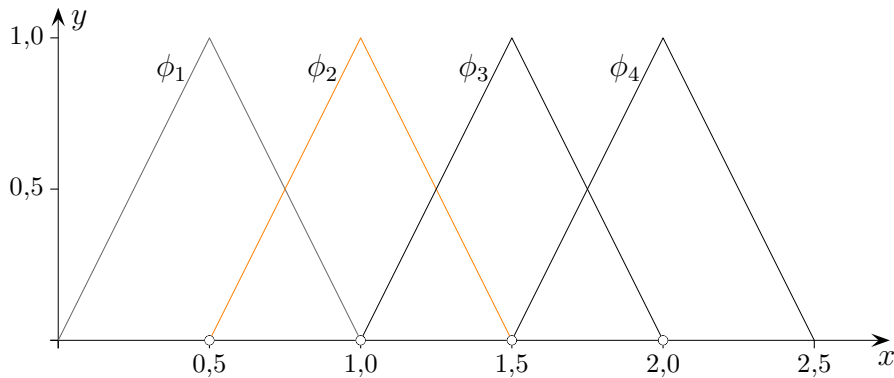
Das einführende Beispiel enthält die zugrunde liegende Idee dieser Methode.
Die algorithmische Handhabung verwendet einen anspruchsvollen Gedanken:
Die Ermittlung der quadratischen Form

$$\iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}$$

für allgemeine Ansätze erspart viele Einzelberechnungen.

DGL 2. Ordnung mit Hutfunktionen

Die DGL $y''(x) = -x$, $y(0) = 0$, $y(2,5) = 0$ ist zu lösen.



$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung.

Wir wenden die Methode von Galerkin mit einem linearen Ansatz (Hutfunktionen) an und multiplizieren die DGL mit ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 und ϕ_4 .

Das Einsetzen in die DGL erfolgt erst nach einer partiellen Integration (Ordnung wird verringert).

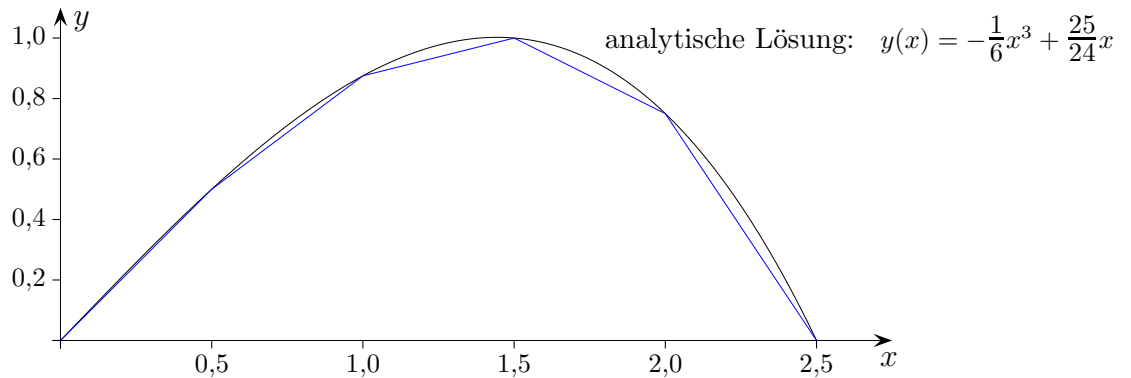
$$\begin{aligned}
 y''(x) &= -x && | \cdot \phi_1(x) \\
 y''(x)\phi_1(x) &= -x\phi_1(x) && | \int_0^{2,5} \\
 \underbrace{y'(x)\phi_1(x) \Big|_0^{2,5} - \int_0^{2,5} y'(x)\phi_1'(x) dx}_{= 0, \phi_1 \text{ erfüllt die Randbedingungen}} &= - \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx \\
 - \int_0^{2,5} \phi_1'(x)\phi_1'(x) dx &= - \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx \quad | \cdot (-1) \\
 \int_0^{2,5} [a_1\phi_1'(x) + a_2\phi_2'(x) + a_3\phi_3'(x) + a_4\phi_4'(x)] \phi_1'(x) dx &= \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx \\
 \int_0^{2,5} [a_1\phi_1'(x)\phi_1'(x) + a_2\phi_2'(x)\phi_1'(x) + \underbrace{a_3\phi_3'(x)\phi_1'(x) + a_4\phi_4'(x)\phi_1'(x)}_{= 0}] dx &= \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx
 \end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt z.B. mit $N_1(x) = 2x$ und $N_2(x) = 1 - 2x$ (die sogenannten Formfunktionen N_1 und N_2 werden geeignet verschoben):

$$\int_0^{2,5} x\phi_2(x) dx = \int_{0,5}^1 xN_1(x - 0,5) dx + \int_1^{1,5} xN_2(x - 1) dx = \frac{5}{24} + \frac{7}{24} = \frac{1}{2}$$

Steifigkeitsmatrix

$$y''(x) = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(2,5) = 0$$



$$\begin{array}{rcl}
 4a_1 - 2a_2 & = & \frac{1}{4} \\
 -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 & = & \frac{1}{2} \\
 -2a_2 + 4a_3 + 2a_4 & = & \frac{3}{4} \\
 -2a_3 + 4a_4 & = & 1
 \end{array}
 \quad \text{rechte Seite} \quad
 \begin{array}{l}
 \int_I x \phi_1 dx \\
 \int_I x \phi_2 dx \\
 \int_I x \phi_3 dx \\
 \int_I x \phi_4 dx
 \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{7}{8}$, $a_3 = 1$ und $a_4 = \frac{3}{4}$

Es gilt z. B. (im Kopf)

$$\int_I \phi_1' \phi_1' dx = 2^2 \cdot 0,5 + (-2)^2 \cdot 0,5 = 4 \quad \phi_1'(0) = 2, \phi_1'(1) = -2,$$

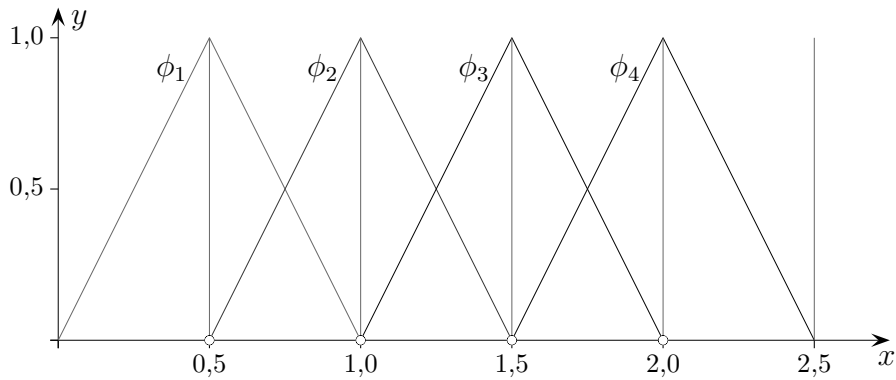
$$\int_I \phi_1' \phi_2' dx = 2 \cdot (-2) \cdot 0,5 = -2.$$

Die Ergebnisse werden in einer sogenannten Steifigkeitsmatrix (symmetrisch) festgehalten.

$$(\mathbf{A})_{i,j} = \int_I \phi_i' \phi_j' dx = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

In Matrixform: $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ mit $(\mathbf{b})_i = \int_I x \phi_i dx$

Elementsteifigkeitsmatrizen



$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A})_{i,j} = \int_I \phi'_i \phi'_j dx &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Für eine Programmierung kann die Steifigkeitsmatrix als Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen erhalten werden. Diese ergeben sich, wenn der Integrationsbereich auf die Elemente (hier jeweils Intervalle der Länge 0,5) eingeschränkt wird.

Dirichlet-Randbedingung

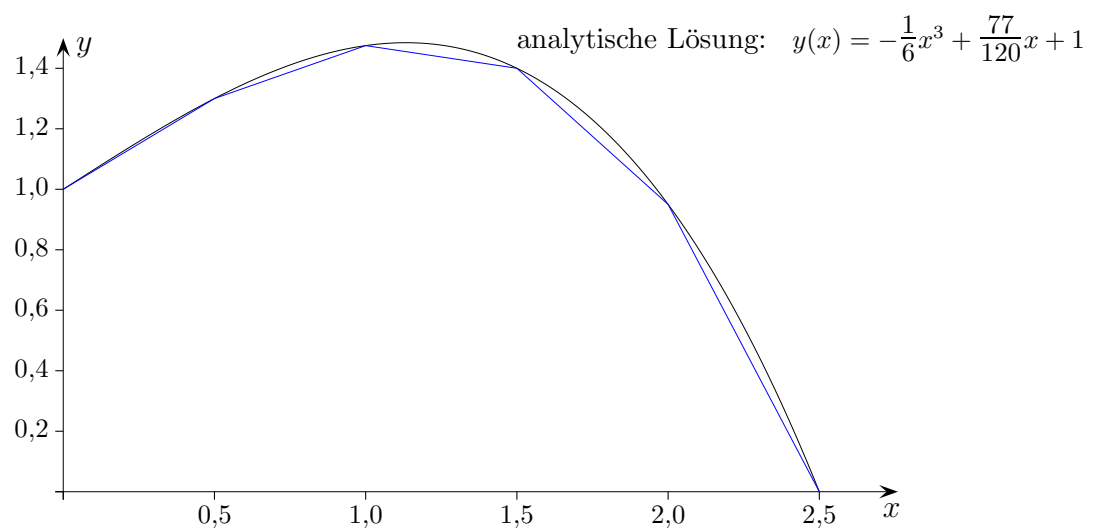
$$y''(x) = -x, \quad y(0) = 1, \quad y(2,5) = 0$$

Ein möglicher Ansatz wäre

$$\phi(x) = \phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x)$$

mit einer Funktion ϕ_0 , für die $\phi_0(0) = 1$ gilt.

Vor ϕ_0 steht kein Koeffizient, damit die Anfangsbedingung erhalten bleibt.



$$\begin{aligned} 4a_1 - 2a_2 &= \frac{1}{4} + 2 && \text{beachte: auf der linken Seite nun zusätzlich: } \int_I \phi'_0 \phi'_1 dx = -2 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 &= \frac{1}{2} \\ -2a_2 + 4a_3 - 2a_4 &= \frac{3}{4} \\ -2a_3 + 4a_4 &= 1 \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix für die Knoten 1 bis 4 bleibt unverändert.

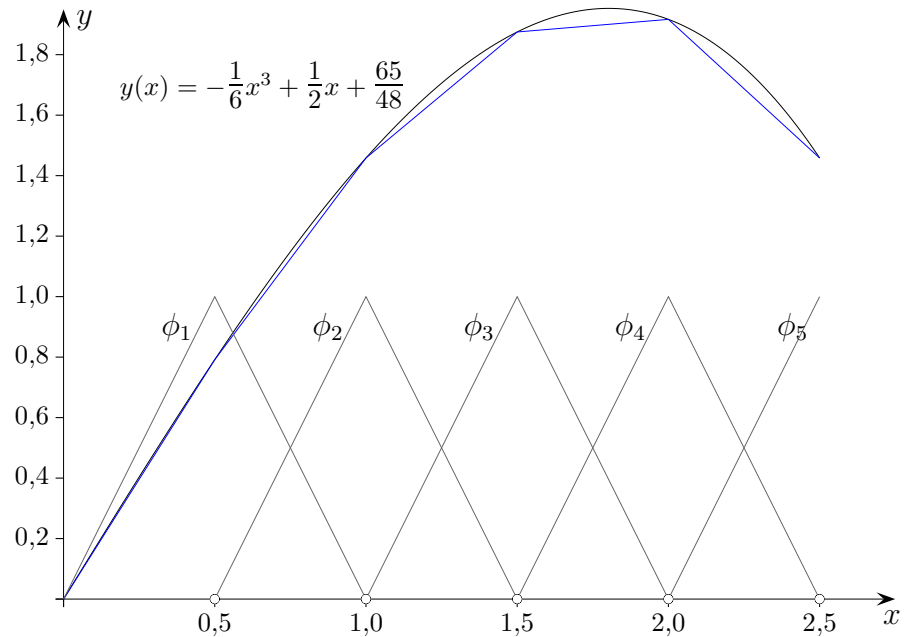
$$\int_I \phi'_i \phi'_j dx = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Neumann-Randbedingung

$$y''(x) = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(2,5) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Ansatz: } \phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x) + a_5\phi_5(x)$$

Der rechte Randpunkt ist im Gegensatz zur Dirichlet-Randbedingung ein Variablenknoten.



$$\begin{aligned} 4a_1 - 2a_2 &= \frac{1}{4} & \text{rechte Seite } \int_I x \phi_1 dx \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 &= \frac{1}{2} & \int_I x \phi_2 dx \\ -2a_2 + 4a_3 - 2a_4 &= \frac{3}{4} & \int_I x \phi_3 dx \\ -2a_3 + 4a_4 - 2a_5 &= 1 & \int_I x \phi_4 dx \\ -2a_4 + 2a_5 &= -\frac{11}{12} & \int_I x \phi_5 dx - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

beachte: $-\frac{3}{2} = y'(x)\phi_5(x) \Big|_0^{2,5}$

Steifigkeitsmatrix

$$\int_I \phi'_i \phi'_j dx = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Poisson Gleichung

Wir betrachten die Poisson Gleichung

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)}_{\Delta u(x, y)} = -q(x, y) \quad \text{auf einem Gebiet } A. \text{ Sei } u(x, y) = 0 \text{ auf dem Rand } \partial A.$$

Nach der Multiplikation mit einer Testfunktion ψ

$$\int_A \psi \Delta u(x, y) dA = - \int_A \psi q(x, y) dA \quad *$$

bietet sich auf der linken Seite eine partielle Integration an, die die Ordnung reduziert.

Einschub (einige Ergebnisse der Vektoranalysis werden benötigt):
Aus der Produktregel

$$\operatorname{div}(\psi \vec{F}) = \psi \cdot \operatorname{div} \vec{F} + \underbrace{\operatorname{grad} \psi}_{\nabla \psi} \cdot \vec{F}$$

folgt wie im Eindimensionalen die Regel für die partielle Integration, die mit dem Satz von Gauss umgeschrieben werden kann.

$$\int_A \psi \cdot \operatorname{div} \vec{F} dA = \underbrace{\int_A \operatorname{div}(\psi \vec{F}) dA}_{\text{Gauss } \int_{\partial A} \psi \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ ds} - \int_A \operatorname{grad} \psi \cdot \vec{F} dA$$

Mit $\vec{F} = \operatorname{grad} u(x, y)$ folgt:

$$\int_A \psi \cdot \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad} u(x, y)}_{\Delta u(x, y)} dA = \underbrace{\int_{\partial A} \psi \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ ds}_0 \text{ siehe Randbedingung} - \underbrace{\int_A \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} u(x, y) dA}_{\int_A \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA}$$

* vereinfacht sich zu:

$$\int_A \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA = \int_A \psi q(x, y) dA$$

Die FEM verwendet diese Integralgleichung (schwache Form des Randwertproblems).

Randbedingungen

Bei Differentialgleichungen können Anfangswerte wie $y(0) = 1$ oder $y'(0) = 0$ vorgegeben werden. Entsprechend können bei partiellen Differentialgleichungen Bedingungen für den Rand gefordert werden.

Dirichlet-Randbedingung

Auf dem Rand ∂A des Gebiets soll die Lösungsfunktion bestimmte Werte annehmen, möglicherweise null (Vorgabe der Dichte, Temperaturbelegung).

Neumann-Randbedingung

Auf dem Rand des Gebiets soll die Ableitung $\text{grad } u(x, y) \vec{n}^\circ$ der Lösungsfunktion in Normalenrichtung, also senkrecht zum Rand, bestimmte Werte f_N annehmen. (Vorgabe des Massenabflusses).

Ist der Rand Symmetrielinie, liegen also links und rechts davon gleiche Wert vor, so ist diese Ableitung null.

Auf Teilstücken des Randes können unterschiedliche Randbedingungen gefordert werden.

Galerkin-Methode

$$\int_A \underbrace{\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]}_{\nabla \psi \nabla u} dA = \int_A \psi q(x, y) dA \quad \text{Neumann} + \int_{\partial A} \psi f_N ds$$

Ansatzfunktion:

$$\phi(x, y) = a_1 \phi_1(x, y) + a_2 \phi_2(x, y) + a_3 \phi_3(x, y), \quad \text{Testfunktionen } \phi_i$$

Durch Einsetzen von ϕ für u und ϕ_i für ψ entsteht ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sum_j a_j \int \nabla \phi_1 \nabla \phi_j dA &= \int_A \phi_1 q(x, y) dA \quad \text{Neumann} + \int_{\partial A} \phi_1 f_N ds \\ \sum_j a_j \int \nabla \phi_2 \nabla \phi_j dA &= \int_A \phi_2 q(x, y) dA \quad \text{Neumann} + \int_{\partial A} \phi_2 f_N ds \\ \sum_j a_j \int \nabla \phi_3 \nabla \phi_j dA &= \int_A \phi_3 q(x, y) dA \quad \text{Neumann} + \int_{\partial A} \phi_3 f_N ds \end{aligned}$$

In Matrixform umgeschrieben:

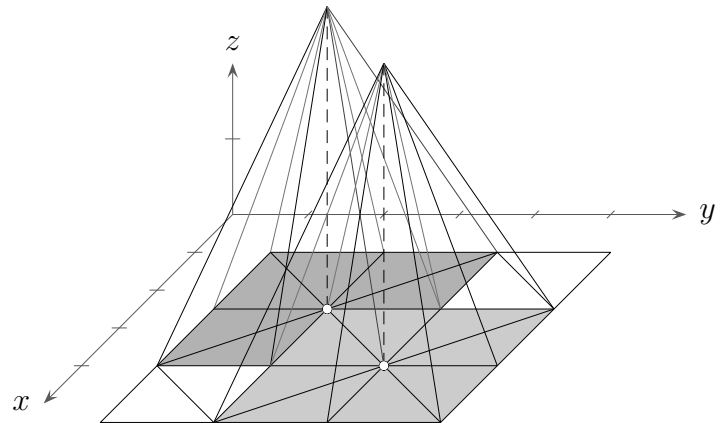
$$\begin{aligned} (\mathbf{A})_{i,j} &:= \int \nabla \phi_i \nabla \phi_j dA && \text{Steifigkeitsmatrix} \\ (\mathbf{b})_i &= \int_A \phi_i q(x, y) dA \quad \text{Neumann} + \int_{\partial A} \phi_i f_N ds && \text{Lastvektor} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$$

Triangulation

Das Gebiet wird in nicht überlappende Dreiecke aufgeteilt.

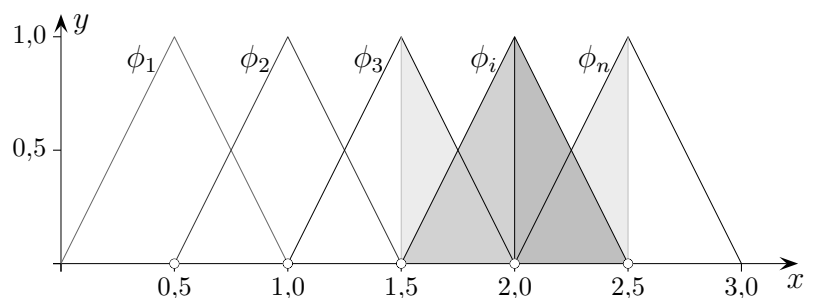
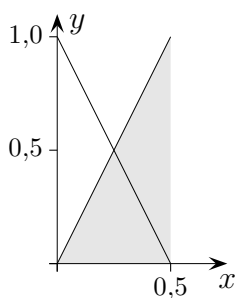
Falls zwei Dreiecke sich schneiden, dann haben sie entweder eine gemeinsamen Ecke oder eine gemeinsame ganze Kante. Eine Kante auf dem Rand des Gebietes gehört entweder ganz zu einer Dirichlet- oder einer Neumann-Randbedingung.



Der lineare Galerkin-Ansatz

$$\phi(x, y) = a_1\phi_1(x, y) + a_2\phi_2(x, y) + \dots + a_n\phi_n(x, y), \quad n \text{ Knoten,}$$

besteht aus einer Linearkombination von n sich überschneidenden Hut- bzw. Basisfunktionen. Zu jedem Knoten gehört eine Variable a_i , die den Funktionswert der Lösung am Knotenpunkt bestimmt. Die Einschränkung einer Hutfunktion auf ein einzelnes Dreieck heißt Formfunktion.

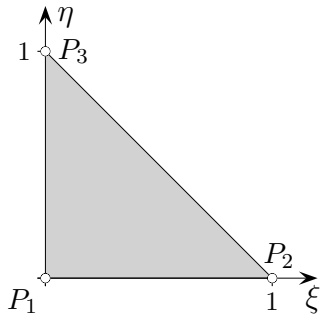


Eine eindimensionale Hutfunktion setzt sich aus 2 Formfunktionen zusammen.

Eine Formfunktion nimmt an ihren Intervallenden jeweils die Werte 1 und 0 an.

Bei der Integration $\int_I [a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)] \cdot \phi_i dx$ ist es vorteilhaft, dass der Träger (Intervall der Funktionswerte ungleich null) einer Basisfunktion ϕ_i sich nur mit sich selbst und den Trägern rechts und links (falls sie vorhanden sind) schneidet. Die von null verschiedenen Elemente der Steifigkeitsmatrix $\int_I \phi_i\phi_j$ bzw. $\int_I \phi'_i\phi'_j$ gruppieren sich daher um die Hauptdiagonale. Zur Berechnung werden Produkte von Formfunktionen, bzw. deren Ableitungen integriert.

Formfunktionen

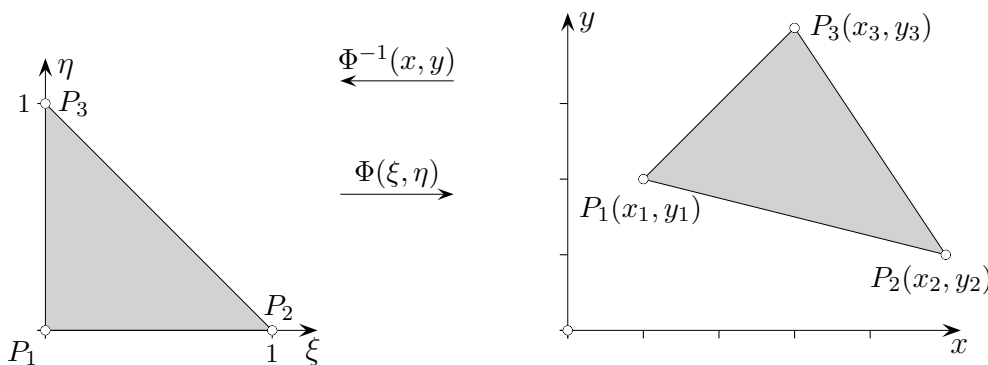


Für das Dreieck gibt es 3 lineare Formfunktionen \hat{N}_i .
Sie sind jeweils an der Ecke P_i 1 und an den beiden anderen 0.

$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$$



Um sich für beliebige Dreiecke auf die Formfunktionen des linken Dreiecks (Referenzdreieck) beziehen zu können, werden die Dreiecke durch die Transformation Φ ineinander übergeführt.

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

Die Jacobi-Determinante lautet:

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

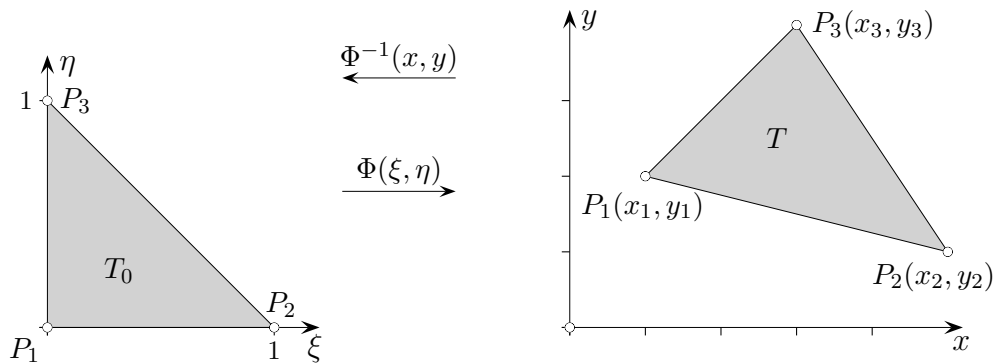
J ist der Inhalt des Parallelogramms (doppelte Dreiecksfläche), das von $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ aufgespannt wird.

Für die Rücktransformation $\Phi^{-1}(x, y)$ gilt:

$$\xi = \frac{1}{J} [(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)]$$

$$\eta = \frac{1}{J} [(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)]$$

Formfunktionen für beliebige Dreiecke



Die Formfunktionen werden vom Referenzdreieck T_0 auf das Dreieck T übertragen:

$$N_i(x, y) = \hat{N}_i(\Phi^{-1}(x, y)) = \hat{N}_i(\xi, \eta)$$

Die partiellen Ableitungen lauten (Kettenregel):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N_i(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{N}_i(\xi, \eta) \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{N}_i(\xi, \eta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} N_i(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{N}_i(\xi, \eta) \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{N}_i(\xi, \eta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Für die zu T gehörende Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} ist

$$\mathbf{S}_{i,j} = \int_T \nabla N_i \nabla N_j \, dA$$

durch Variablensubstitution (Referenzdreieck als Integrationsbereich) auszuwerten.

Beim linearen Ansatz (Hutfunktionen) ist jedoch $\nabla N_i \nabla N_j$ konstant.

Eine regelmäßige Triangulation reduziert den Aufwand.

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{y_3 - y_1}{J}, & \eta_x &= -\frac{y_2 - y_1}{J} \\ \xi_y &= -\frac{x_3 - x_1}{J}, & \eta_y &= \frac{x_2 - x_1}{J} \end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen (leicht zu ermitteln, siehe vorige Seite) sind nur von der Lage des Dreiecks abhängig. Die übrigen Ableitungen beziehen sich auf Formfunktionen des Referenzdreiecks. Später werden wir allerdings sehen, dass es nicht nötig ist, die Formfunktionen einzeln zu bestimmen.

Elementsteifigkeitsmatrix

Aus didaktischen Gründen wird die zu T gehörende Steifigkeitsmatrix ermittelt (auf einen Index für T wird verzichtet). Im Weiteren folgt ein eleganteres Verfahren und es wird gezeigt, wie die Elementsteifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{i,j} &= \iint_T \nabla N_i \nabla N_j \, dx dy \\
 &= \iint_T \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy && \text{beachte: } dx dy = J d\xi d\eta \\
 &= \iint_{T_0} \left[\left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \eta_x \right) \cdot \left(\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \eta_x \right) + \left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \eta_y \right) \cdot \left(\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \eta_y \right) \right] J d\xi d\eta \\
 &= (\xi_x^2 + \xi_y^2) \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} J d\xi d\eta + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \iint_{T_0} \left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \right) J d\xi d\eta \\
 &\quad + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} J d\xi d\eta \\
 &= a \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} d\xi d\eta + b \iint_{T_0} \left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + c \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

$$a = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] / J$$

$$b = -[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)] / J$$

$$c = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] / J$$

$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

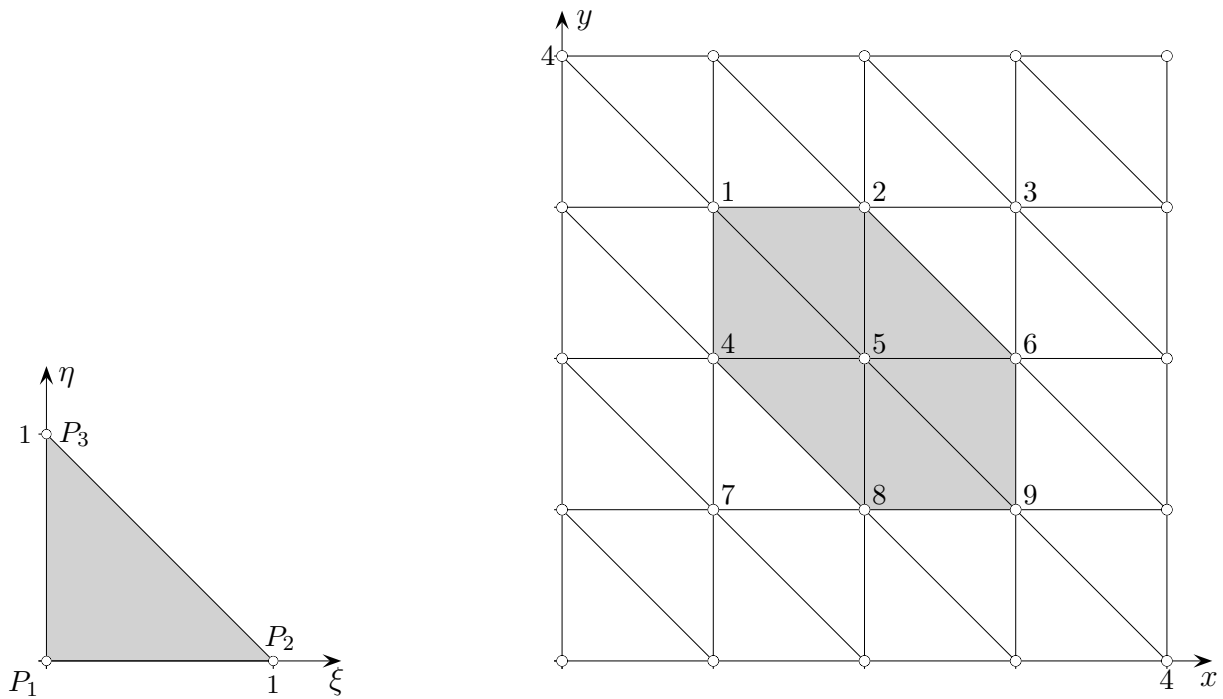
$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$$

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}}_2 = \iint_{T_0} \left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_3 = \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = a \hat{\mathbf{S}}_1 + b \hat{\mathbf{S}}_2 + c \hat{\mathbf{S}}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + 2b + c & -a - b & -b - c \\ -a - b & a & b \\ -b - c & b & c \end{bmatrix}$$

Beispiel Randwerte 0



Betrachte das Randwertproblem $\Delta u = -q$, $u = 0$ auf ∂A .

Die Gradienten der Formfunktionen

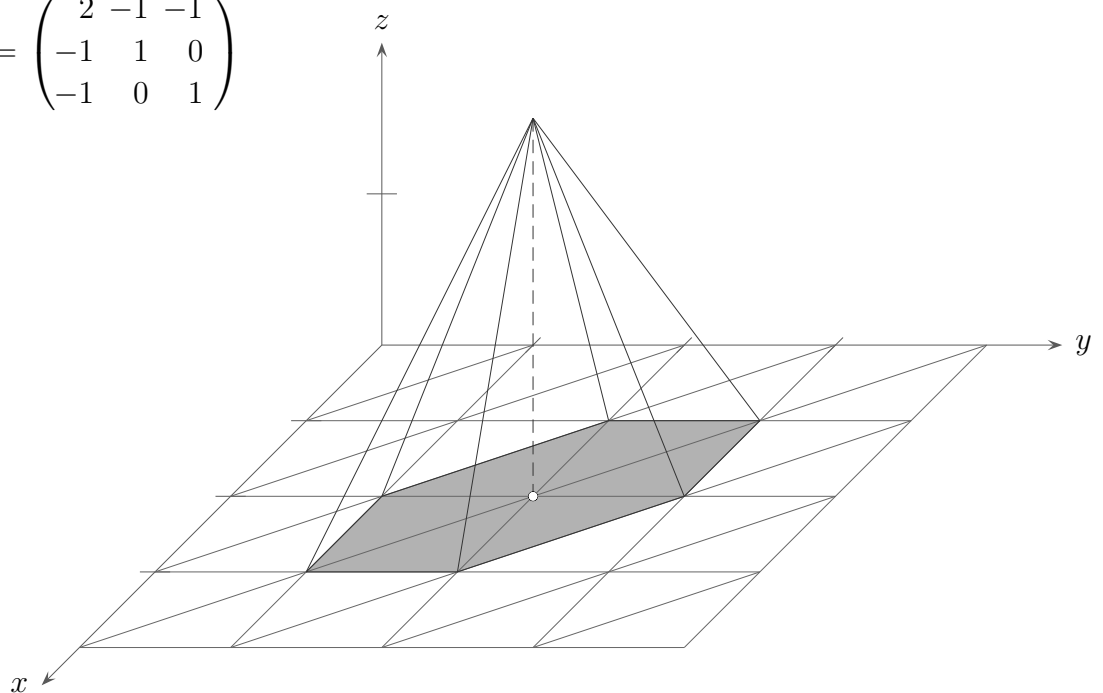
$$N_1(x, y) = 1 - x - y$$

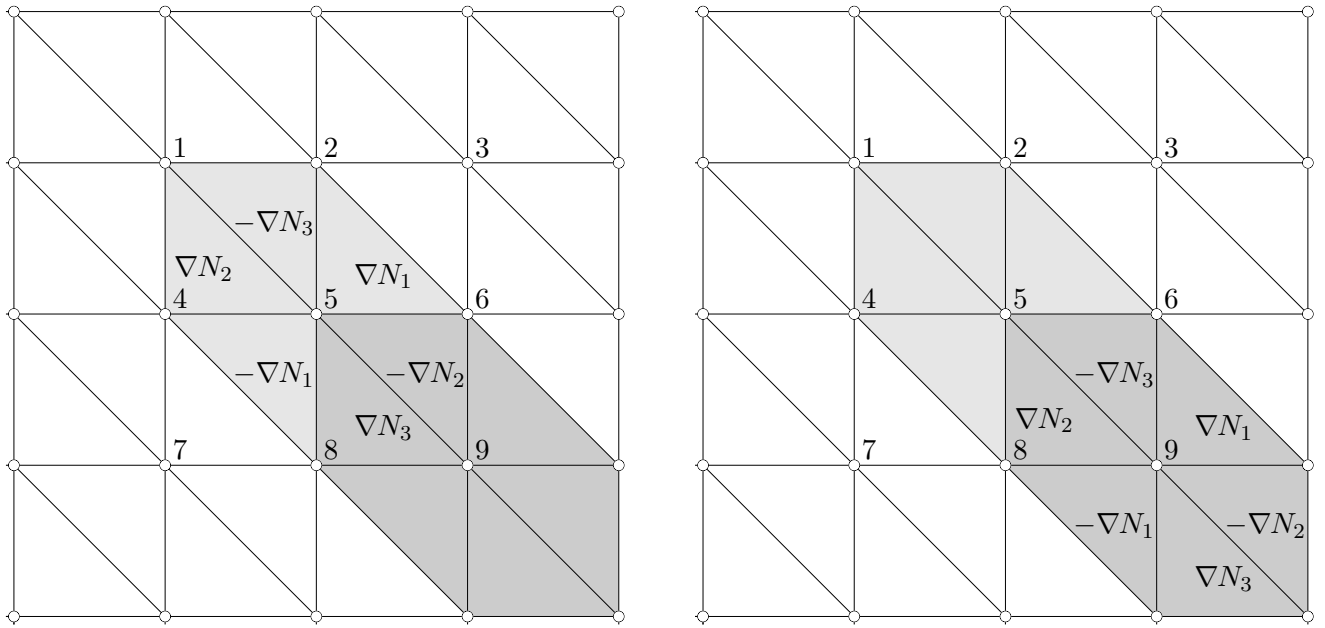
$$N_2(x, y) = x$$

$$N_3(x, y) = y \quad \text{lauten}$$

$$\nabla N_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla N_i \nabla N_j = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Die Träger der Basisfunktionen der Knoten 5 und 9 überlappen sich.

$$\mathbf{A}_{5,9} = \frac{1}{2} (2\nabla N_3 \nabla N_2) = 0$$

Insgesamt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

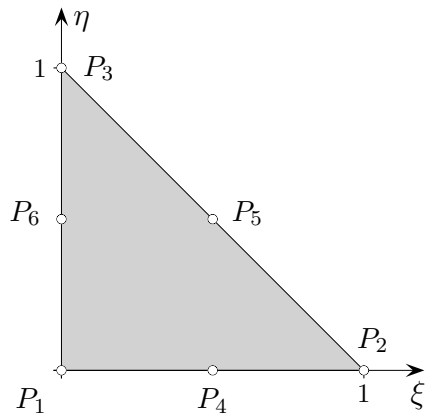
$\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ Wir ermitteln die rechte Seite, sei $q(x, y) = 1$:

$$\mathbf{b}_i = \int_A \phi_i q(x, y) dA = 2 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (1 - \eta - \xi) d\xi d\eta + 4 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi d\xi d\eta = 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$\text{oder im Kopf, Pyramidenvolumen: } \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 1$$

Lösung: $a_1 = a_3 = a_7 = a_9 = \frac{11}{16}$, $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \frac{7}{8}$, $a_5 = \frac{9}{8}$

Quadratischer Ansatz



Ein quadratischer Ansatz

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2$$

für das Referenzdreieck wird durch Funktionswerte u_i auf P_i in den sechs Knotenpunkten eindeutig festgelegt.

$$u_1 = \alpha_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6$$

$$u_4 = \alpha_1 + 0,5\alpha_2 + 0,25\alpha_4$$

$$u_5 = \alpha_1 + 0,5\alpha_2 + 0,5\alpha_3 + 0,25\alpha_4 + 0,25\alpha_5 + 0,25\alpha_6$$

$$u_6 = \alpha_1 + 0,5\alpha_3 + 0,25\alpha_6$$

Die Koeffizienten für die Formfunktionen N_i ergeben sich jeweils als Lösung dieses Gleichungssystems. Die N_i sind jeweils im Punkt P_i 1 und in den anderen 0. Die Matrixschreibweise

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}$$

vereinfacht die Berechnung,

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

z.B. ergibt für N_5 $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$ $\alpha_5 = 4$, sonst null.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= -\xi + 2\xi^2 = \xi(2\xi - 1) \\ N_3(\xi, \eta) &= -\eta + 2\eta^2 = \eta(2\eta - 1) \\ N_4(\xi, \eta) &= 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta = 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ N_5(\xi, \eta) &= 4\eta\xi \\ N_6(\xi, \eta) &= 4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{aligned}$$

$u(\xi, \eta)$ kann als Linearkombination

$$u(\xi, \eta) = u_1 \cdot N_1(\xi, \eta) + u_2 \cdot N_2(\xi, \eta) + \dots + u_6 \cdot N_6(\xi, \eta)$$

der Formfunktionen dargestellt werden.

Die sechs Funktionswerte u_i legen $u(\xi, \eta)$ fest.

Beide Funktionen (rechte und linke Seite) stimmen an den Stellen P_i überein.

Eindimensional haben wir die Linearkombination $u(\xi) = u_1(1 - \xi) + u_2\xi$
und allgemeiner mit Formfunktionen: $u(\xi) = u_1N_1(\xi) + u_2N_2(\xi)$

Das Integral $\int_I [u'(\xi)]^2 d\xi = \int_I [u_1N_1'(\xi) + u_2N_2'(\xi)] \cdot [u_1N_1'(\xi) + u_2N_2'(\xi)] d\xi$

kann als Produkt mit der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{A} geschrieben werden.

$$\int_I [u'(\xi)]^2 d\xi = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \int_I N_1'N_1' & \int_I N_1'N_2' \\ \int_I N_2'N_1' & \int_I N_2'N_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} \quad \text{quadratische Form}$$

Andererseits ergibt sich mit $u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi$ $\int_I [u'(\xi)]^2 d\xi = \int_0^1 \alpha_2^2 d\xi = \alpha_2^2 = \boldsymbol{\alpha}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}$

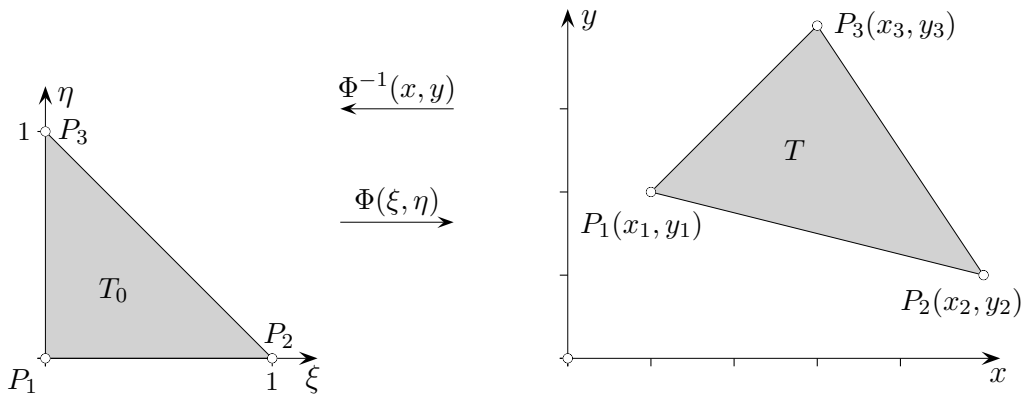
(mit $I = [0; 1]$, beachte $m_{1/2} = \pm 1$) und

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \alpha_1 &= u_1 \\ \alpha_2 &= -u_1 + u_2 \end{aligned} \iff \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

eingesetzt: $\int_I [u'(\xi)]^2 d\xi = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$, beachte $(\mathbf{E}\mathbf{u})^T = \mathbf{u}^T \mathbf{E}^T$

\mathbf{A} kann also für jedes Element durch die Auswertung von $\int_I [u'(\xi)]^2 d\xi$ ermittelt werden.

Linearer Ansatz für Dreiecke



$$\hat{u}(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta$$

$$u(x, y) = u_1 + u_2 x + u_3 y$$

Mit der Transformation $\Phi^{-1}(x, y)$ wird $\hat{u}(\xi, \eta)$ auf T übertragen.

$$u(x, y) = \hat{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi(x, y) + \alpha_3 \eta(x, y)$$

Zusammenhang zwischen den Koeffizienten u_i und α_j :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 & \alpha_1 &= u_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 &= -u_1 + u_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_3 &= -u_1 + u_3 \end{aligned} \iff \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{N}\mathbf{u}$$

Die Idee auf der vorigen Seite kann verallgemeinert werden.
Für ein gegebenes Dreieck T ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} mit

$$\iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u} \quad \text{zu ermitteln.}$$

Die partiellen Ableitungen werden mit der Kettenregel gebildet.

$$\begin{aligned} u_x &= \hat{u}_\xi \xi_x + \hat{u}_\eta \eta_x \\ u_y &= \hat{u}_\xi \xi_y + \hat{u}_\eta \eta_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy &= \iint_{T_0} [(\hat{u}_\xi \xi_x + \hat{u}_\eta \eta_x)^2 + (\hat{u}_\xi \xi_y + \hat{u}_\eta \eta_y)^2] J d\xi d\eta && \text{Variablensubstitution} \\ &= a \iint_{T_0} \hat{u}_\xi^2 d\xi d\eta + 2b \iint_{T_0} \hat{u}_\xi \hat{u}_\eta d\xi d\eta + c \iint_{T_0} \hat{u}_\eta^2 d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$a = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] / J$$

$$b = -[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)] / J$$

$$c = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] / J \quad \text{siehe S. 10 und S. 11}$$

Zum Verfahren

Für eine systematische Implementierung der FEM erweist es sich als vorteilhaft, die Berechnung der Integrale zunächst auf Elementebene unter Verwendung der lokalen Formfunktionen durchzuführen und aus den einzelnen Elementbeiträgen dann schließlich das Gesamtsystem zu bilden.

Das Vorgehen, zu einer (beliebigen) Ansatzfunktion

$$u(x, y) = u_1 u_1(x, y) + u_2 u_2(x, y) + u_3 u_3(x, y)$$

das Integral

$$\iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}$$

zu bestimmen, um die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{S} zu ermitteln, ist tiefsinnig.

Die u_i sind die Funktionswerte (-variablen) der Knoten.

Aus dem Ansatz folgt, dass die $u_i(x, y)$ die Formfunktionen $N_i(x, y)$ auf dem Element sein müssen, z.B. erhalten wir $N_1(x, y)$ mit $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$.

Für \mathbf{S} gilt:

$$\mathbf{S}_{i,j} = \iint_T \nabla N_i \nabla N_j dx dy$$

Der Integrationsbereich ist das Referenzdreieck.

Daher wird die Transformationsformel (Variablensubstitution)

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{|x_u y_v - x_v y_u|}_{J} du dv$$
$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

benötigt.

Die lineare Transformation - und damit J - hängt nur von den im Gegenuhrzeigersinn nummerierten Eckpunkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ des Dreiecks, später des Parallelogramms, ab.

Das Flächenelement $dx dy$ ist bei der Transformation durch $dx dy = J d\xi d\eta$ zu ersetzen.

Linearer Ansatz für Dreiecke

Für den linearen Ansatz

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta$$

sind die partiellen Ableitungen: $u_\xi = \alpha_2$, $u_\eta = \alpha_3$

Die Berechnung (einfach) der drei Integrale über das Einheitsdreieck ergibt die quadratischen Formen:

$$I_1 = \iint_{T_0} \hat{u}_\xi^2 d\xi d\eta = \iint_{T_0} \alpha_2^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2} \alpha_2^2 = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}_1^* \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{S}_1^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = 2 \iint_{T_0} \hat{u}_\xi \hat{u}_\eta d\xi d\eta = 2 \iint_{T_0} \alpha_2 \alpha_3 d\xi d\eta = \alpha_2 \alpha_3 = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}_2^* \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{S}_2^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \iint_{T_0} \hat{u}_\eta^2 d\xi d\eta = \iint_{T_0} \alpha_3^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2} \alpha_3^2 = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}_3^* \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{S}_3^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die quadratischen Formen I_i lassen sich nach Substitution mit $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{N}\mathbf{u}$ durch die Knotenvariablen ausdrücken:

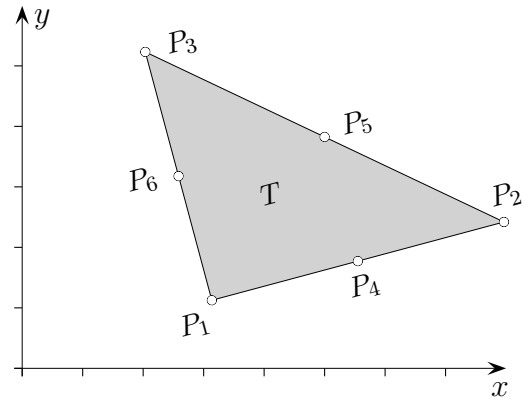
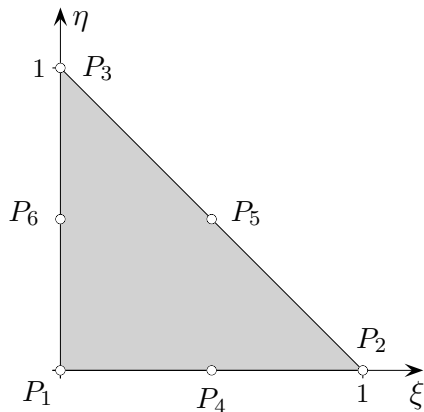
$$I_i = \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{S}_i^* \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{S}_i \mathbf{u}$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für ein gegebenes Dreieck T berechnet sich die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{S} schließlich mit:

$$\iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad \mathbf{S} = a\mathbf{S}_1 + b\mathbf{S}_2 + c\mathbf{S}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + 2b + c & -a - b & -b - c \\ -a - b & a & b \\ -b - c & b & c \end{bmatrix}$$

Quadratischer Ansatz für Dreiecke



$$\hat{u}(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} \quad \text{siehe S. 16}$$

$$\hat{u}_\xi = \alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_5\eta$$

$$\hat{u}_\eta = \alpha_3 + \alpha_5\xi + 2\alpha_6\eta$$

Das weitere Vorgehen ist wie im linearen Fall.

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix},$$

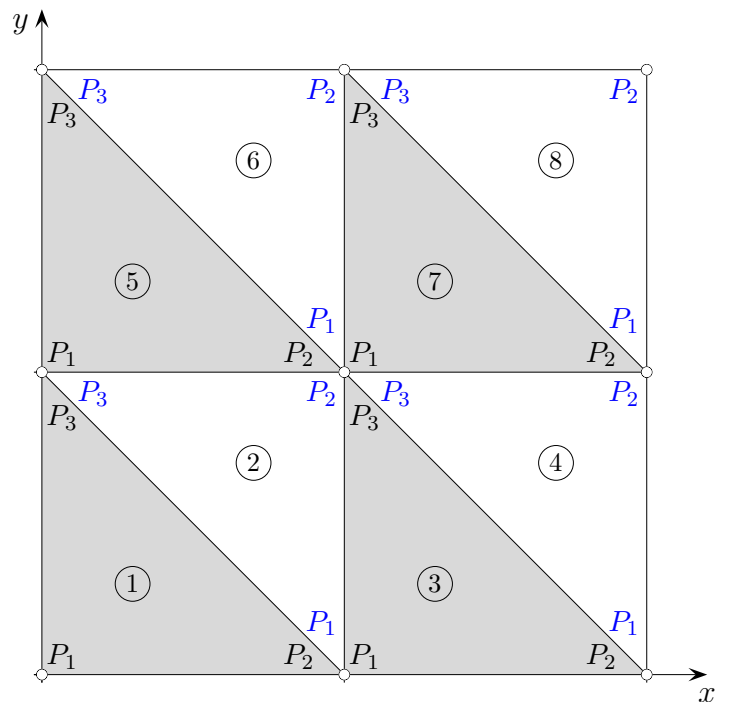
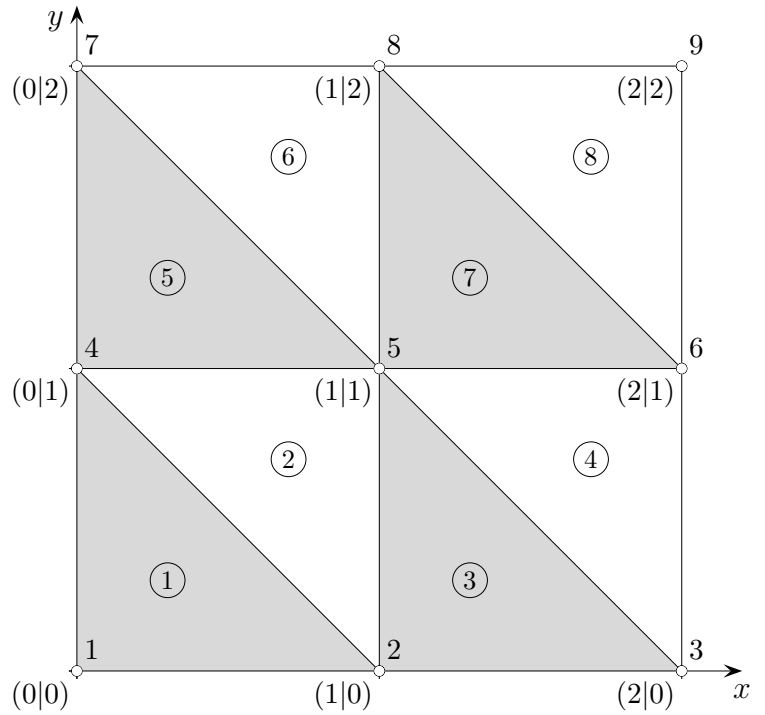
$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 0 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 8 & -8 \\ -4 & 0 & -4 & 8 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad \mathbf{S} = a\mathbf{S}_1 + b\mathbf{S}_2 + c\mathbf{S}_3$$

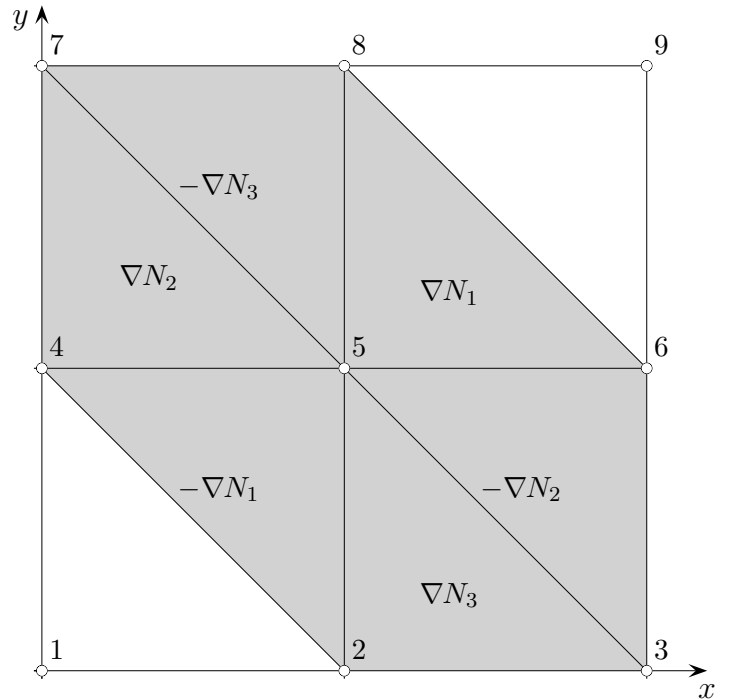
Beispiel

Betrachte das Randwertproblem
 $\Delta u = -4$, ∂A -Bedingungen später.



Es liegt ein quadratisches Bauteil mit 8 finiten Dreieckselementen mit Element- (\textcircled{n}), lokaler (P_i) und globaler (n) Knotennummerierung vor. Die Steifigkeitsmatrix für einen linearen Ansatz werden wir im Kopf und anschließend strukturiert ermitteln, damit der Algorithmus erkennbar wird.

Beispiel im Kopf



Wir haben wieder die Pyramidenseitenflächen im Blick.

$$N_1(x, y) = 1 - x - y$$

$$N_2(x, y) = x$$

$$N_3(x, y) = y$$

$$\nabla N_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla N_i \nabla N_j = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

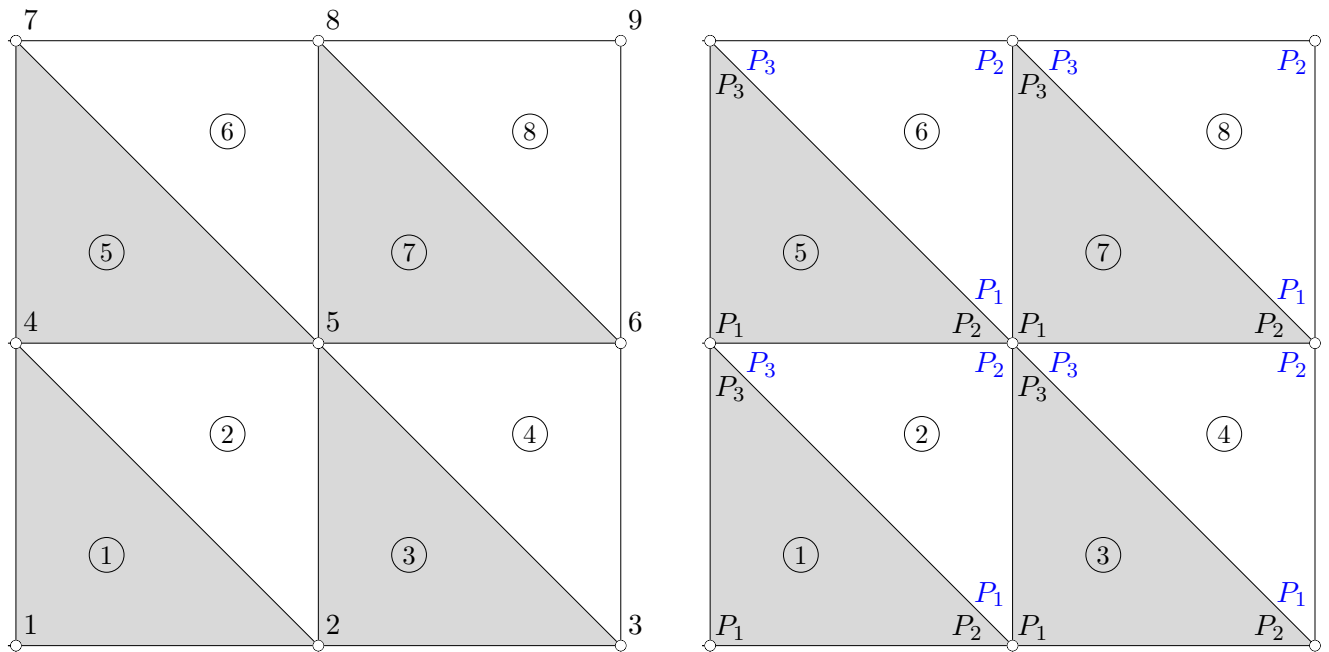
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{1,1} = \frac{1}{2} (\nabla N_1 \nabla N_1) = \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\mathbf{S}_{1,2} = \frac{1}{2} (\nabla N_1 \nabla N_2) = \frac{1}{2} \cdot (-1)$$

$$\mathbf{S}_{2,5} = \frac{1}{2} ((-\nabla N_3)(-\nabla N_1) + \nabla N_1 \nabla N_3) = \frac{1}{2} \cdot (-1 + (-1)) = \frac{1}{2} \cdot (-2)$$

Beispiel systematisch



Die Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + 2b + c & -a - b & -b - c \\ -a - b & a & b \\ -b - c & b & c \end{bmatrix}$$

lauten für die grau gefärbten Elemente ①, ③, ⑤, ⑦

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

und für ②, ④, ⑥, ⑧

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{S} kann mit diesen 8 Matrizen zusammengestellt werden. Dabei ist die lokale Nummerierung (P_1, P_2, P_3) jeweils durch die globale zu ersetzen. Für das Element ①, ergibt das (1,2,4), für ② (2,5,4).

Beispiel systematisch

Element ① liefert den Summanden

$$\mathbf{S}_1^\circ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und Element ②

$$\mathbf{S}_2^\circ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{13} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & 0 & b_{33} & b_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{23} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

usw.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1^\circ + \dots + \mathbf{S}_8^\circ$$

Algorithmus zum Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Q	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
P_1	1	2	2	3	4	5	5	6
P_2	2	5	3	6	5	8	6	9
P_3	4	4	5	5	7	7	8	8

In der Matrix Q werden den 3 lokalen Nummern jedes Dreieckselements die globalen Knotennummern zugeordnet.

wiederhole für $e = 1$ bis 8

wiederhole für $i = 1$ bis 3

wiederhole für $j = 1$ bis 3

$$l = Q[e, i]$$

$$r = Q[e, j]$$

$$\text{falls } e \text{ ungerade} \quad \mathbf{S}[l, r] = \mathbf{S}[l, r] + a[i, j]$$

$$\text{sonst} \quad \mathbf{S}[l, r] = \mathbf{S}[l, r] + b[i, j]$$

oder wenn die Symmetrie beachtet wird:

wiederhole für $e = 1$ bis 8

wiederhole für $i = 1$ bis 3

$$l = Q[e, i]$$

wiederhole für $j = 1$ bis i

$$r = Q[e, j]$$

$$\text{falls } e \text{ ungerade} \quad \mathbf{S}[l, r] = \mathbf{S}[l, r] + a[i, j]$$

$$\text{sonst} \quad \mathbf{S}[l, r] = \mathbf{S}[l, r] + b[i, j]$$

$$\mathbf{S}[r, l] = \mathbf{S}[l, r]$$

rechte Seite, noch ohne Randbedingungen

$$\mathbf{Su} = \mathbf{b}, \quad q(x, y) = 4, \quad J = 1$$

Integrale für das Referenzdreieck

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} (1 - \eta - \xi) 4J \, d\xi d\eta = \dots = \frac{4}{6}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi 4J \, d\xi d\eta = \dots = \frac{4}{6}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta 4J \, d\xi d\eta = \dots = \frac{4}{6}$$

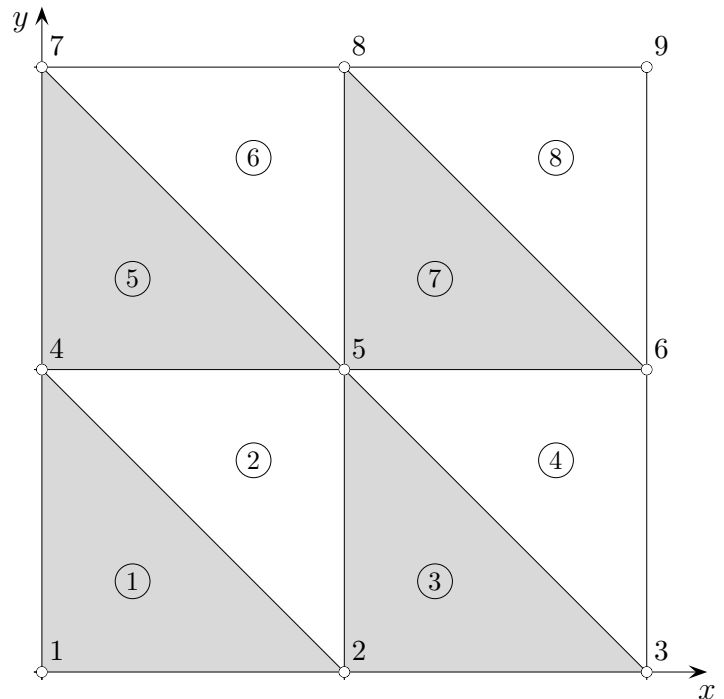
$$\text{oder im Kopf, Pyramidenvolumen: } \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{b} = \frac{4}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Betrachte die Pyramiden zu den Knoten und die Anzahl der jeweiligen Grundflächenelemente.

Randbedingungen, linker Rand

$\Delta u = -4$
 Neumann-Bedingung $u_x(0, y) = -y$



$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$$

Auf dem linken Rand ist $\xi = 0$

$$\hat{N}_1(0, \eta) = 1 - \eta$$

$$\hat{N}_2(0, \eta) = 0$$

$$\hat{N}_3(0, \eta) = \eta$$

Knoten 1

\mathbf{b}_1 wird um $\int_0^1 (-\eta)(1 - \eta)(-1) d\eta = \frac{1}{6}$

vergrößert. Der Faktor (-1) entsteht durch den Normalenvektor $\vec{n} = (-1, 0)^T$.

Knoten 4

\mathbf{b}_4 wird um $\int_0^1 (-\eta)\eta(-1) d\eta = \frac{1}{3}$ und um $\int_1^2 (-\eta)(2 - \eta)(-1) d\eta = \frac{2}{3}$

vergrößert. $(2 - \eta)$ entsteht durch Verschiebung von $(1 - \eta)$ um 1, $(2 - \eta) = 1 - (\eta - 1)$.

Knoten 7

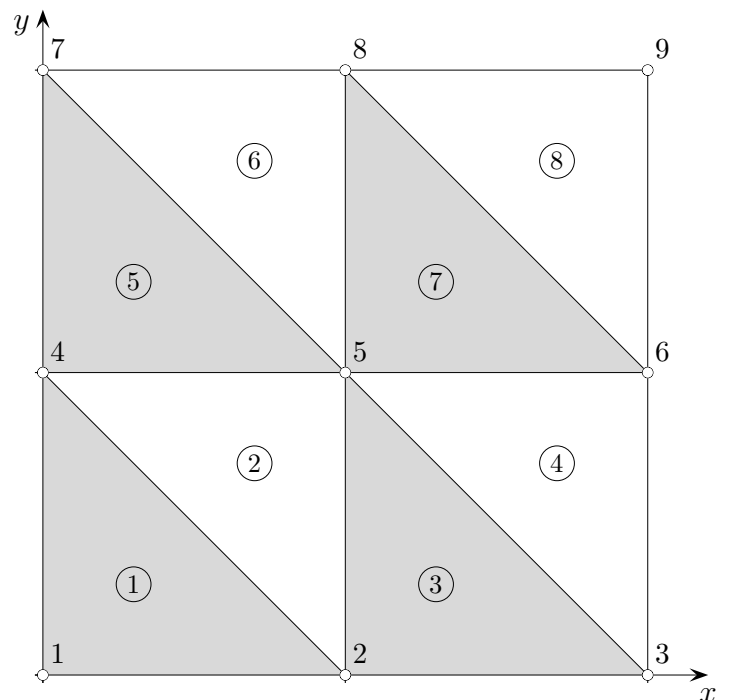
\mathbf{b}_7 wird um $\int_1^2 (-\eta)(\eta - 1)(-1) d\eta = \frac{5}{6}$

vergrößert. $(\eta - 1)$ entsteht durch Verschiebung von (η) um 1.

Randbedingungen, rechter Rand

$$\Delta u = -4$$

$$\text{Neumann-Bedingung } u_x(2, y) = 3$$



$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$$

Auf dem linken Rand ist $\xi = 0$. Dies ist auch für den rechten Rand zu verwenden.

$$\hat{N}_1(0, \eta) = 1 - \eta$$

$$\hat{N}_2(0, \eta) = 0$$

$$\hat{N}_3(0, \eta) = \eta$$

Knoten 3

$$\mathbf{b}_3 \text{ wird um } \int_0^1 3(1 - \eta) d\eta = \frac{3}{2}$$

vergrößert. Der Normalenvektor ist nun $\vec{n} = (1, 0)^T$.

Knoten 6

$$\mathbf{b}_6 \text{ wird um } \int_0^1 3\eta d\eta = \frac{3}{2} \text{ und um } \int_1^2 3(2 - \eta) d\eta = \frac{3}{2}$$

vergrößert. $(2 - \eta)$ entsteht durch Verschiebung von $(1 - \eta)$ um 1, $(2 - \eta) = 1 - (\eta - 1)$.

Knoten 9

$$\mathbf{b}_9 \text{ wird um } \int_1^2 3(\eta - 1) d\eta = \frac{3}{2}$$

vergrößert. $(\eta - 1)$ entsteht durch Verschiebung von (η) um 1.

Neumann-Randbedingungen, oberer Rand

$$\Delta u = -4$$

$$\text{Neumann-Bedingung } u_x(x, 2) = 0$$

Der obere Rand ist isolierend, es fließt weder Wärme ab, noch hinzu.
 \mathbf{b} wird nicht verändert.

Zusammengefasst:

$$\mathbf{b}_{\text{neu}} = \frac{4}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 17 \\ 16 \\ 24 \\ 21 \\ 13 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Dirichlet-Randbedingungen, unterer Rand

$$\Delta u = -4$$

$$\text{Dirichlet-Bedingung } u_x(x, 0) = 5x + 5$$

Am unteren Rand haben wir die Knoten 1, 2, 3.

Die Temperatur an diesen Knoten soll $u_1 = 5$, $u_2 = 10$, $u_3 = 15$ sein.

Die Einarbeitung dieser Werte ist denkbar einfach.

Sie werden in das Gleichungssystem eingesetzt.

Die ersten drei Gleichungen sind nun überflüssig geworden.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 17 \\ 16 \\ 24 \\ 21 \\ 13 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \text{ wurde auf die rechte Seite gebracht.}$$

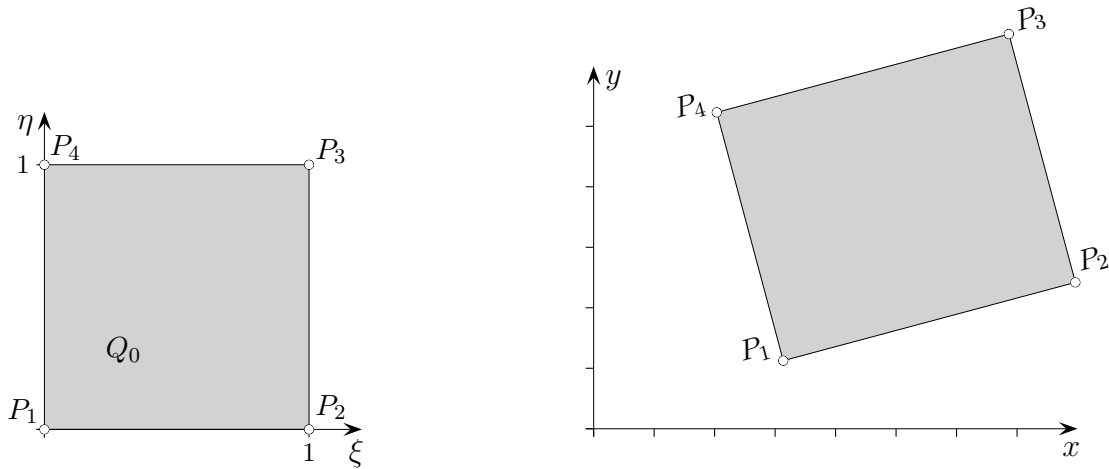
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 24 \\ 21 \\ 13 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die konstanten Reihen wurden auf die rechte Seite gebracht.

Bei diesem Vorgehen (Auffüllen mit Einsen und Nullen) bleibt die Struktur

des Gleichungssystems erhalten. Für u_1 , u_2 , u_3 erhalten wir die vorgegebenen Werte.

Ansatz für Parallelogramme



Ansatz

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta$$

$$u_1 = \alpha_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$u_4 = \alpha_1 + \alpha_3$$

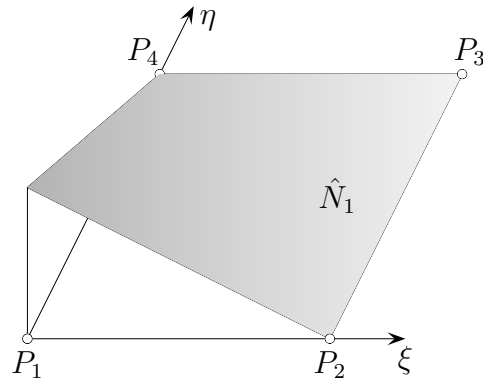
$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad \mathbf{S}_e = a\mathbf{S}_1 + b\mathbf{S}_2 + c\mathbf{S}_3$$

Bei festem ξ oder bei festem η ist der Ansatz eine lineare Funktion der anderen Variablen. Somit ist $\hat{u}(\xi, \eta)$ auf den Kanten von Q_0 linear und durch Vorgabe der vier Funktionswerte in den Ecken eindeutig festgelegt. Diese Eigenschaft bleibt durch lineare Transformation auf allgemeine Parallelogramme erhalten. Dies garantiert die Stetigkeit von u . Dreieckselemente können mit Parallelogrammelementen kombiniert werden.

Parallelogrammelemente alternativ



Wir setzen $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}$ in den Ansatz $\hat{u}(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta$ ein und erhalten die Formfunktionsdarstellung

$$\hat{u}(\xi, \eta) = u_1 \hat{N}_1 + u_2 \hat{N}_2 + u_3 \hat{N}_3 + u_4 \hat{N}_4$$

mit den lokalen Formfunktionen

$$\hat{N}_1(0, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$\hat{N}_2(0, \eta) = \xi(1 - \eta)$$

$$\hat{N}_3(0, \eta) = \xi \eta$$

$$\hat{N}_4(0, \eta) = (1 - \xi)\eta.$$

Für die Integrale über das Einheitsquadrat erhält man:

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} d\xi d\eta = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}}_2 = \iint_{T_0} \left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

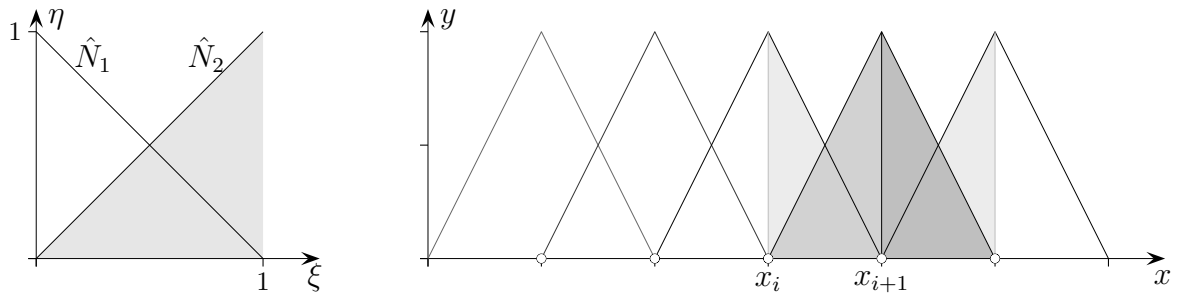
$$\hat{\mathbf{S}}_3 = \iint_{T_0} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} d\xi d\eta = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_e = \iint_{T_0} \hat{N}_i d\xi d\eta = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hieraus ergeben sich die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementlastvektor:

$$\mathbf{S}_e = a \hat{\mathbf{S}}_1 + b \hat{\mathbf{S}}_2 + c \hat{\mathbf{S}}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_e = f J \hat{\mathbf{b}}_e, \quad f \text{ konstant}$$

Die a , b , c wurden schon ermittelt.

Anfängliches



Es ist lehrreich, dass Bekannte hier noch einmal zu betrachten.

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi$$

$$\begin{aligned} u_1 = \alpha_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \alpha_1 = u_1 \\ \alpha_2 = -u_1 + u_2 \end{aligned} \iff \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$u(\xi) = u_1(1 - \xi) + u_2 \xi \quad (\text{durch Einsetzen})$$

Transformationen:

$$x = x_i + h\xi, \quad h = x_{i+1} - x_i$$

$$\xi = (x - x_i)/h$$

$$\hat{N}_1 = 1 - \xi$$

$$\hat{N}_2 = \xi$$

$$N_i(x) = \hat{N}_i((x - x_i)/h)$$

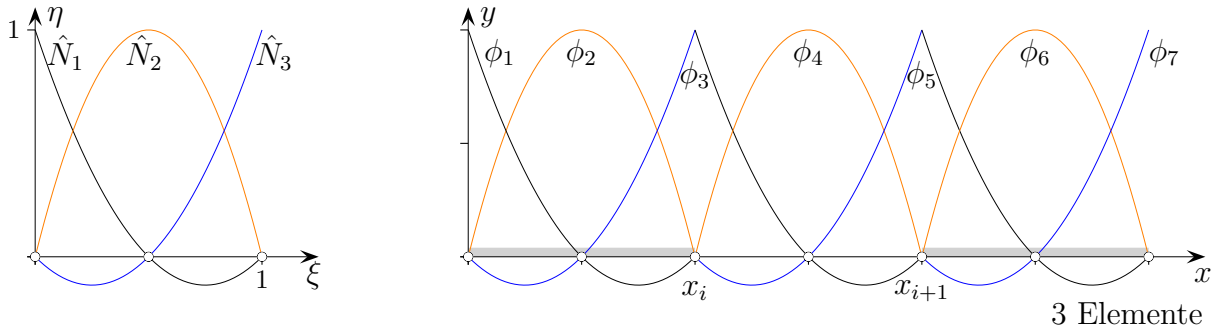
$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{Die Ableitung nach } x \text{ ist umgekehrt proportional zu } h.$$

$$dx = h d\xi$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \int_0^1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} d\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx = \int_0^1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \frac{1}{h} h d\xi = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i dx = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1D quadratisch



Ein quadratischer Ansatz

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2$$

für das Referenzintervall wird durch Funktionswerte u_i in den drei Knotenpunkten eindeutig festgelegt.

$$u_1 = \alpha_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + 0,5\alpha_2 + 0,25\alpha_3$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Matrizenschreibweise

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Durch Einsetzen von $\boldsymbol{\alpha}$ in den Ansatz erhalten wir $u(\xi)$ als Linearkombination

$$u(\xi) = u_1 \cdot \hat{N}_1(\xi) + u_2 \cdot \hat{N}_2(\xi) + u_3 \cdot \hat{N}_3(\xi)$$

der Formfunktionen (Ansatzfunktionen, engl. shape functions):

$$\hat{N}_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2 = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$$

$$\hat{N}_2(\xi) = 4\xi - 4\xi^2 = 4\xi(1 - \xi)$$

$$\hat{N}_3(\xi) = -\xi + 2\xi^2 = -\xi(1 - 2\xi)$$

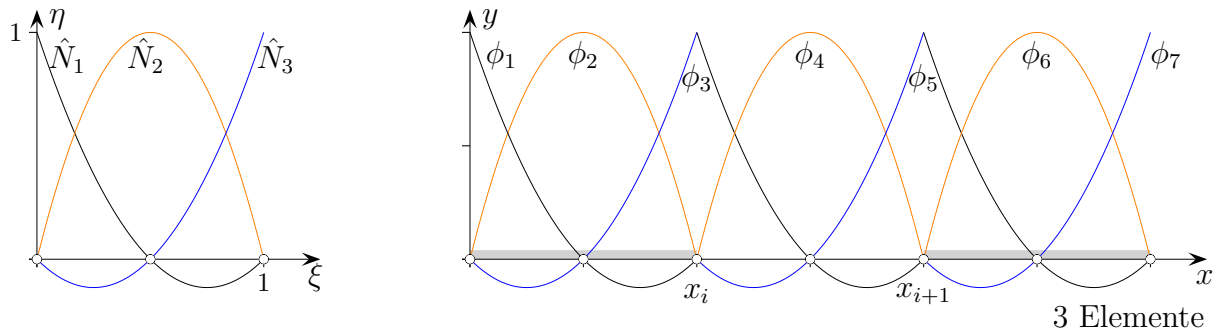
Die \hat{N}_i sind jeweils in einem Knoten 1 und in den anderen 0. Ihre Summe beträgt 1.

$$\mathbf{S}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i dx = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$dx = h d\xi$$

$$\phi(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x) + \dots + u_7 \phi_7(x)$$

1D quadratisch alternativ



Ein quadratischer Ansatz

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2$$

für das Referenzintervall wird durch Funktionswerte u_i in den drei Knotenpunkten eindeutig festgelegt.

$$u_1 = \alpha_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + 0,5\alpha_2 + 0,25\alpha_3$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Matrizenschreibweise

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Mit $u'(\xi) = \alpha_2 + 2\alpha_3\xi$ gilt:
$$\int_0^1 [u'(\xi)]^2 d\xi = \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \frac{4}{3}\alpha_3^2 = \boldsymbol{\alpha}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}$$

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}$ eingesetzt:

$$\int_0^1 [u'(\xi)]^2 d\xi = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u'(\xi)]^2 d\xi &= \mathbf{u}^T \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} d\xi \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}$ eingesetzt (Matrizenmultiplikation wie gehabt):

$$\int_0^1 [u'(\xi)]^2 d\xi = \mathbf{u}^T \underbrace{\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{bmatrix}}_{= \int_0^1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} d\xi} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{S}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx = \frac{1}{30h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i dx = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ h \\ 6 \\ -h \end{bmatrix}$$

Durch Einsetzen von $\boldsymbol{\alpha}$ in den Ansatz erhalten wir $u(\xi)$ als Linearkombination

$$u(\xi) = u_1 \cdot \hat{N}_1(\xi) + u_2' \cdot \hat{N}_2(\xi) + u_3 \cdot \hat{N}_3(\xi) + u_4' \cdot \hat{N}_4(\xi)$$

der Formfunktionen:

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 &= (1 - \xi)^2(1 + 2\xi) \\ \hat{N}_2(\xi) &= h(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) &= h\xi(1 - \xi)^2 \\ \hat{N}_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 &= \xi^2(3 - 2\xi) \\ \hat{N}_4(\xi) &= h(-\xi^2 + \xi^3) &= -h\xi^2(1 - \xi) \end{aligned}$$

Die Funktionen zu $h = 1$ heißen Hermitesche Interpolationspolynome 3. Grades. Entweder ist ihr Funktionswert oder die Tangentensteigung an den Intervallenden 1 oder 0.

Zur Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{S}_e gelangen wir auch mit folgender Überlegung:

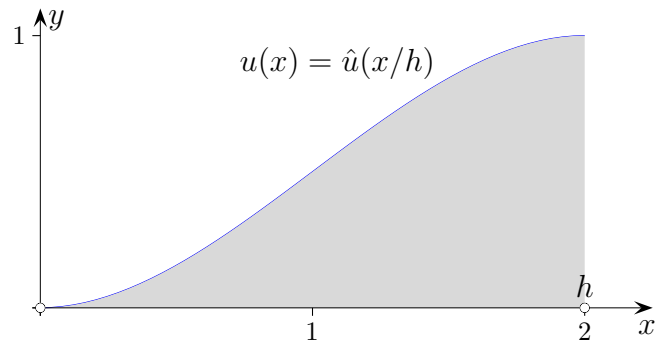
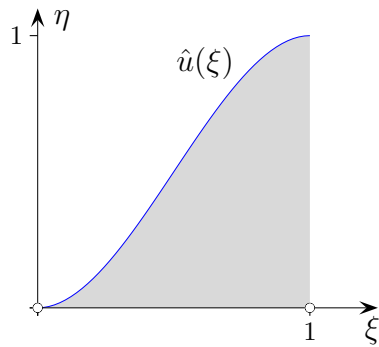
Für (z.B.) $\hat{N}_2(\xi) = \xi(1 - \xi)^2$ gilt:

$$w'(x_1) = \dots + u_2 \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial x} \hat{N}_2((x - x_1)/h) \Big|_{x=x_i} + \dots = \dots + u_2 \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{N}_2(\xi) \Big|_{\xi=0} \cdot \frac{1}{h} + \dots = u_2$$

Mit $\hat{N}_2(\xi) = h\xi(1 - \xi)^2$ statt $\hat{N}_2(\xi) = \xi(1 - \xi)^2$ gibt u_2 die Ableitung nach x für $x = x_i$ an.

Oder: $u_\xi (= u_i')$ kann wegen $u_\xi = u_x x_\xi = u_x h$ durch $u_x h$ ersetzt werden.

Einschub Substitution



Das Intervall $[0, 1]$ wird mit $x = h \cdot \xi$ auf $[0, h]$ abgebildet.

$$\int_0^h u(x) dx = h \int_0^1 \hat{u}(\xi) d\xi$$

$$\int_0^h [u'(x)]^2 dx = \int_0^h \left[\hat{u}'\left(\frac{x}{h}\right) \cdot \frac{1}{h} \right]^2 dx = h \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^1 [\hat{u}'(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 [\hat{u}'(\xi)]^2 d\xi$$

$$\int_0^h [u''(x)]^2 dx = \int_0^h \left[\hat{u}''\left(\frac{x}{h}\right) \cdot \frac{1}{h^2} \right]^2 dx = \frac{1}{h^3} \int_0^1 [\hat{u}''(\xi)]^2 d\xi$$

1D kubischer Ansatz

Für die DGL der Balkenbiegung benötigen wir das Folgende:

Mit $u''(\xi) = 2\alpha_3 + 6\alpha_4\xi$ gilt:

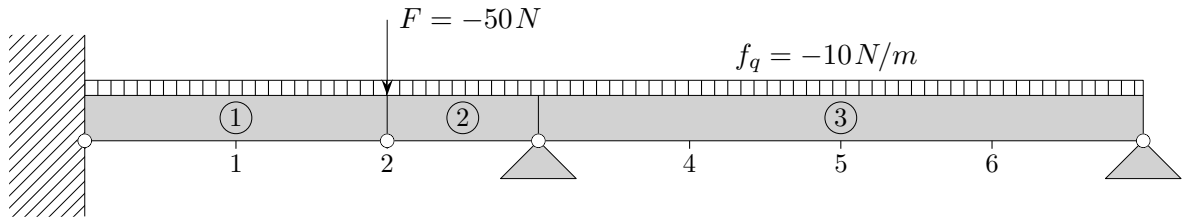
$$\int_0^1 [u''(\xi)]^2 d\xi = 4a_3^2 + 12a_3a_4 + 12a_4^2 = \boldsymbol{\alpha}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}$$

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}$ eingesetzt (Matrizenmultiplikation wie gehabt):

$$\int_0^1 [u''(\xi)]^2 d\xi = \mathbf{u}^T \underbrace{2 \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix}}_{= \int_0^1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi^2} d\xi} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{S}_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial N_j}{\partial x^2} dx = \frac{2}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix}, \quad h = x_{i+1} - x_i$$

Auslenkung eines Balkens



Ein 7 m langer Träger ist an einer Seite eingespannt und an zwei Stellen gelenkig gelagert. Er wird durch eine gleichmäßig verteilte Last $f_q = -10 \text{ N/m}$ und durch eine Einzelkraft $F = -50 \text{ N}$ belastet. Die Biegesteifigkeit des Trägers sei $B = 30 \text{ Nm}^2$. Wir ermitteln die Auslenkung $w = w(x)$.

Der Balken sei in drei Elemente zerlegt. Zur Approximation verwenden wir den kubischen Ansatz. Ansätze niedrigerer Ordnung sind für dieses Problem sinnlos. Entsprechend wählen wir als Knotenvariable jeweils den Wert und die erste Ableitung von w an den Enden der Elemente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ w(2) \\ w'(2) \\ w(3) \\ w'(3) \\ w(7) \\ w'(7) \end{bmatrix} \quad \textcircled{1} \quad h = 2 \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen S_e

$$\textcircled{2} \quad h = 1 \quad 2 \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad h = 4 \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 6 \\ 6 & 16 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & -6 \\ 6 & 8 & -6 & 16 \end{bmatrix}$$

werden zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengefügt.

Auslenkung eines Balkens

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 24 & 24 & -24 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 32 & -24 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -24 & 24 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 16 & -24 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 192 & 96 & -192 & 96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96 & 64 & -96 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -192 & -96 & 192 & -96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96 & 32 & -96 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 + \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 16 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & -6 & 16 \end{bmatrix} \\
 \\
 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 24 & 24 & -24 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 32 & -24 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -24 & 216 & 72 & -192 & 96 & 0 & 0 \\ 24 & 16 & 72 & 96 & -96 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -192 & -96 & 192 & -90 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 96 & 32 & -90 & 80 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & -6 & 16 \end{bmatrix}$$

Für die Elementlastvektoren \mathbf{b}_e der drei Elemente erhält man

$$\mathbf{b}_1 = \frac{f_q}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{f_q}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{f_q}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Auslenkung eines Balkens

$$\mathbf{b} = \frac{f_q}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{f_q}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{f_q}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{f_q}{12} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 18 \\ -3 \\ 30 \\ 15 \\ 24 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Kraft F wird bei der Knotenvariable w_3 berücksichtigt.

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen

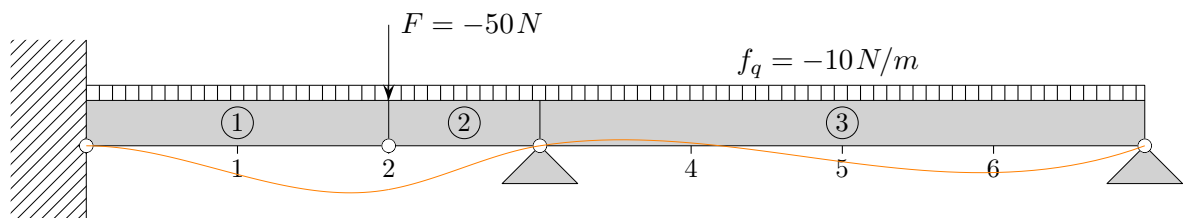
$$w(0) = w'(0) = w(3) = w(7) = 0$$

muss $w_1 = w_2 = w_5 = w_7 = 0$ gelten.

Diese Knotenvariablen sind somit bekannt. Da jeweils der Wert 0 angenommen wird, können in der Steifigkeitsmatrix und im Lastvektor die entsprechenden Einträge gestrichen werden (Zeilen und Spalten in der Steifigkeitsmatrix).

Es bleibt das folgende Gleichungssystem zu lösen:

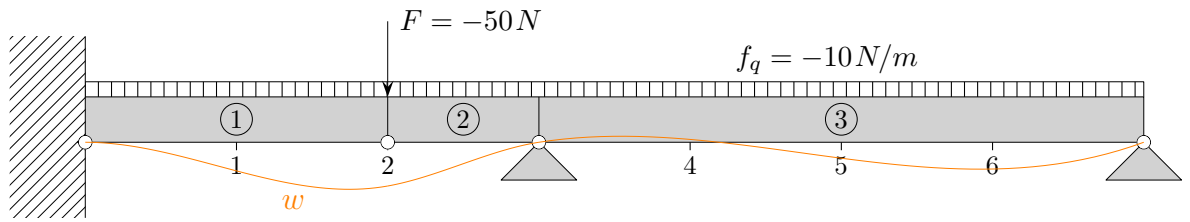
$$\frac{B}{16} \begin{bmatrix} 216 & 72 & 96 & 0 \\ 72 & 96 & 32 & 0 \\ 96 & 32 & 80 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_6 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{f_q}{12} \begin{bmatrix} 18 \\ -3 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



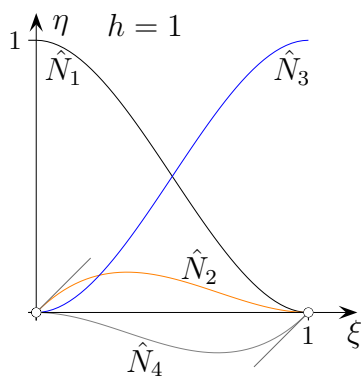
$$w_3 = -0,289, w_4 = 0,179, w_6 = 0,156, w_8 = 0,367$$

Die Auslenkung des Balkens am Angriffspunkt von F beträgt $0,289 \text{ m}$.

Auslenkung eines Balkens



$$w_3 = -0,289, w_4 = 0,179, w_6 = 0,156, w_8 = 0,367$$



Beachte: Die Formfunktionen mit und ohne h wurden in der Schreibweise nicht unterschieden.

$$\hat{N}_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 = (1 - \xi)^2(1 + 2\xi)$$

$$\hat{N}_2(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 = \xi(1 - \xi)^2$$

$$\hat{N}_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 = \xi^2(3 - 2\xi)$$

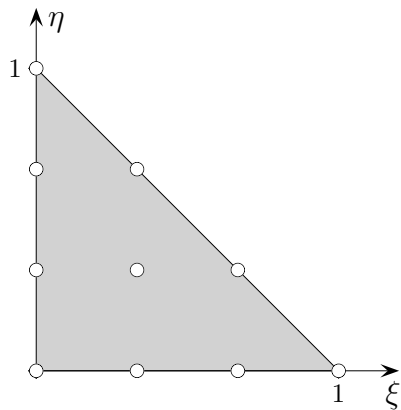
$$\hat{N}_4(\xi) = -\xi^2 + \xi^3 = -\xi^2(1 - \xi)$$

$$w(x) = \begin{cases} w_3 \cdot \hat{N}_3(x/2) + w_4 \cdot 2 \cdot \hat{N}_4(x/2) & 0 \leq x \leq 2 \\ w_3 \cdot \hat{N}_1(x-2) + w_4 \cdot 1 \cdot \hat{N}_2(x-2) + w_6 \cdot 1 \cdot \hat{N}_4(x-2) & 2 \leq x \leq 3 \\ w_6 \cdot 4 \cdot \hat{N}_2((x-3)/4) + w_8 \cdot 4 \cdot \hat{N}_4((x-3)/4) & 3 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} -0,306x^2 + 0,117x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2,709 - 4,149x + 1,811x^2 - 0,243x^3 & 2 \leq x \leq 3 \\ -2,878 + 2,057x - 0,464x^2 + 0,033x^3 & 3 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

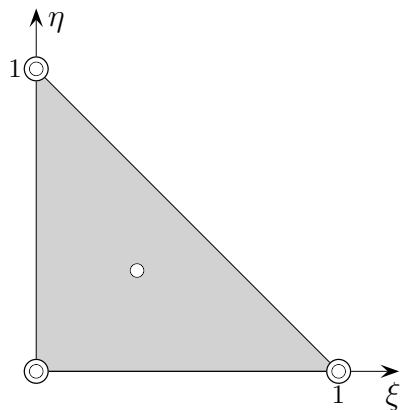
Die Biegelinie kann mit den errechneten Werten w_i auch als Spline ermittelt werden.

Weitere zweidimensionale Elemente



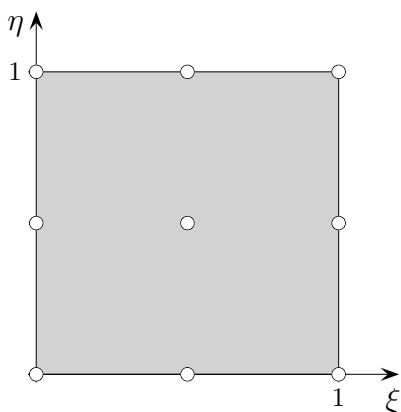
10 Knoten, stetige Übergänge

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3$$



stetige Übergänge und stetige 1. Ableitungen

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3$$

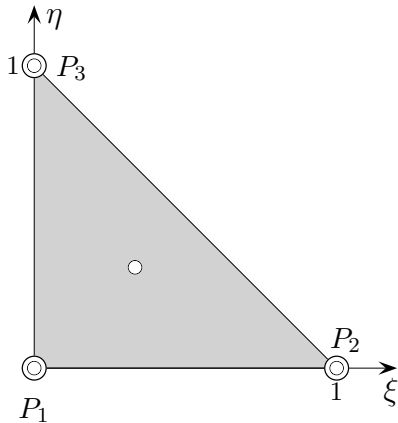


9 Knoten, stetige Übergänge

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2 + \alpha_9\xi^2\eta^2$$

Es gibt viele weitere Möglichkeiten.

2D kubisch mit partiellen Ableitungen als Knotenvariable



Ein kubischer Ansatz

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3$$

ermöglicht stetige Übergänge und stetige 1. Ableitungen.

partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_5\eta + 3\alpha_7\xi^2 + 2\alpha_8\xi\eta + \alpha_9\eta^2 \\ u_\eta &= \alpha_3 + \alpha_5\xi + 2\alpha_6\eta + \alpha_8\xi^2 + 2\alpha_9\xi\eta + 3\alpha_{10}\eta^2 \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $u_\xi(P_i) = p_i$, $u_\eta(P_i) = q_i$, für $i = 1, 2, 3$ ergibt das:

$$u_1 = \alpha_1$$

$$p_1 = \alpha_2$$

$$q_1 = \alpha_3$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_7$$

$$p_2 = \alpha_2 + 2\alpha_4 + 3\alpha_7$$

$$q_2 = \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{10}$$

$$p_3 = \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9$$

$$q_3 = \alpha_3 + 2\alpha_6 + 3\alpha_{10}$$

$$u_4 = \alpha_1 + 1/3\alpha_2 + 1/3\alpha_3 + 1/9\alpha_4 + 1/9\alpha_5 + 1/9\alpha_6 + 1/27\alpha_7 + 1/27\alpha_8 + 1/27\alpha_9 + 1/27\alpha_{10}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}$$

Methode von Galerkin
Diffusionsgleichung
Startseite