Lineare DGL

Bei linearen Problemen liegt eine typische Lösungsstruktur vor.
Betrachten wir hierzu die Gleichung

$$2x + y = 3$$

Die zugehörige homogene Gleichung ist dann

$$2x + y = 0$$

Alle Lösungen (allgemeine Lösung) dieser homogenen Gleichung werden durch $(-c, 2c)$ erfasst.
Eine einzige (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung $2x + y = 3$ ist z. B. $(0, 3)$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung setzt sich nun aus der partikulären (speziellen) Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zusammen, hier
$(x, y) = (0, 3) + (-c, 2c)$.

Für ein Gleichungssystem - wir erinnern uns - gilt:

1. Mit zwei Lösungen eines homogenen Gleichungssystems ist auch die Summe eine Lösung.
2. Mit einer Lösung eines homogenen Gleichungssystems ist auch jedes Vielfache eine Lösung.
3. Mit zwei Lösungen eines inhomogenen Gleichungssystems ist die Differenz eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.
4. Die Lösungsvektoren eines inhomogenen Gleichungssystems haben alle die Gestalt $\vec{a}+\vec{u}$, wobei $\vec{a}$ ein spezieller (irgendein fester) Lösungsvektor des inhomogenen Gleichungssystems und $\vec{u}$ ein beliebiger Lösungsvektor des homogenen Gleichungssystems ist.

Bei einer linearen Differentialgleichung liegt die gleiche Lösungsstruktur vor.

Wenden wir uns der besonders einfachen DGL
(homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

$$y'' - y = 0$$

zu. Die Lösungen $y_1(x) = e^x$ und $y_1(x) = e^{-x}$ können leicht bestätigt werden.
Die allgemeinen Lösung lautet dann $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.
Die Koeffizienten können den Anfangsbedingungen, z. B. $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ angepasst werden,
Ergebnis: $y(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x}$

Lineare DGL, einfache und mehrfache reelle Nullstellen

$y'' + 5y' + 6y = 0$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zur charakteristischen Gleichung
$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$
$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$
$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$
$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$
$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$
$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$

$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$

homogene Gleichung:
Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zur charakteristischen Gleichung
$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$
$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

inhomogene Gleichung:
Ansatz $y_p(x) = Ae^{2x} \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$

allgemeine Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{2} e^{2x}$

$y'' - 2y' + y = 0$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$
$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0$
$\lambda = 1$ doppelte Nullstelle
$y(x) = C_1 x e^{x} + C_2 e^{x}$

Nachweis (verallgemeinerungsfähig)
$y'' - 2y' + y = 0 \quad \iff \quad (y' - y)' - \underbrace{(y' - y)}_{z} = 0$
$z' - z = 0, \quad z = C_1 e^{x}$
Es verbleibt, $y' - y = C_1 e^{x}$ zu lösen, Ansatz: $y = C(x)e^{x}$
(Variation der Konstanten, siehe übernächste Seite)
$\Longrightarrow \; C'(x)e^{x} = C_1 e^{x}, \; C(x) = C_1 x + C_2, \; y(x) = C_1 x e^{x} + C_2 e^{x}$

$y''' + 3y'' - 4y = 0$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$
$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ $\quad \lambda = 1$ 3-fach, daher auch $C_3 x^2 e^{x}$
$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 x^2 e^{x}$

Lineare DGL, auch komplexe Nullstellen

$y''' - y'' + y' - y = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$
$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2/3} = 0 \pm 1i$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{0x} \cos(1x) + C_3 e^{0x} \sin(1x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)$$

reelle Nullstelle λ_1,
konjugiert komplexe Nullstellen $\lambda_{2/3} = \alpha \pm \beta i$
$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_3 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Zur Begründung wird $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ herangezogen.

$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda^2 + 1)^2 \\ &= \left[(\lambda + i)(\lambda - i)\right]^2 \\ &= (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2 \end{aligned}$$

Fundamentalsystem (4 linear unabhängige Lösungen der DGL):
$\{\cos(x), \sin(x), x\cos(x), x\sin(x)\}$

$y'' + 6y' + 9y = 0$
$y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \iff (\lambda + 3)^2 = 0$
$\lambda = -3$ doppelte Nullstelle
$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$
$C_1 = 0, \; -3C_1 + C_2 = 1 \implies C_2 = 1$

Lineare DGL

$y' + f(x) \cdot y = 0$ $\qquad$ $y_h(x) = K \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$ $\qquad$ (siehe nächste Seite)

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$ $\qquad$ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y_h(x) = K \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$y_p(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$K(x) = \int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}$$

Der Term für $K(x)$ kann mit dem Verfahren *Variation der Konstanten* (siehe nächste Seite) allgemein hergeleitet werden.

$y' + \tan(x)\, y = \dfrac{1}{\cos(x)}$ $\qquad$ $f(x) = \tan(x), \quad g(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

$y_h(x) = K \cos(x)$ $\qquad$ beachte: $(\ln(\cos(x)))' = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

$K(x) = \tan(x)$ $\qquad$ beachte: $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$y_p(x) = \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$

$y(x) = K\cos(x) + \sin(x)$

<u>kompaktere Schreibweise für die Lösung</u>

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$ $\qquad$ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y_h(x) = K \cdot e^{-F(x)}$ $\qquad$ $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_p(x) = \int g(x)\, e^{F(x)} dx \, \cdot e^{-F(x)}$$

$y' - 2x \cdot y = x$

$y(1) = 0$ $\qquad$ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y_h(x) = K \cdot e^{x^2}$$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $K = \dfrac{1}{2e}, \quad y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2-1} - 1\right)$

Begründungen

$$\begin{aligned}
y'(x) + f(x) \cdot y(x) &= 0 && \text{homogene lineare DGL} \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= -f(x) && \text{integrieren, } \quad \text{beachte: } \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \ln y(x) + C \\
\ln y(x) &= -\int f(x)\, dx + C && \text{entlogarithmieren} \\
y(x) &= K e^{-\int f(x)\, dx} && \text{Lösung der homogenen DGL}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x) + f(x) \cdot y(x) &= g(x) && \text{Variation der Konstanten } K \\
y_p(x) &= K(x) \cdot e^{-\int f(x)\, dx} && \text{Ansatz} \\
y_p'(x) &= K'(x) \cdot e^{-\int f(x)\, dx} - K(x) \cdot e^{-\int f(x)\, dx} \cdot f(x) && \text{in DGL einsetzen} \\
K'(x) \cdot e^{-\int f(x)\, dx} &= g(x) && \\
K(x) &= \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\, dx} && \text{für partikuläre Lösung einsetzen}
\end{aligned}$$

Lineare DGL, mehrfache reelle Nullstelle, Fundamentalsystem

$y'' - 2y' + y = 0$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zur charakteristischen Gleichung
$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$

Eine andere Schreibweise der DGL ermöglicht es,
das Fundamentalsystem zu erkennen.

$D(Dy) - 2Dy + y = 0 \qquad D\colon y \longrightarrow \frac{d}{dx}y, \quad 1\colon y \longrightarrow y$

$$(D-1)\big[\underbrace{(D-1)\underbrace{y}_{xe^x}}_{e^x}\big] = 0$$

$(D-1)$ führt xe^x in e^x über (Produktregel), somit

$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$
$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$
$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$

Wir verwenden wieder die Operatorschreibweise.

$D(D(Dy) - 3D(Dy) + 3Dy - y = 0$

$$(D-1)\Big[\underbrace{(D-1)\big[\underbrace{(D-1)\underbrace{y}_{x^2e^x}}_{2xe^x}\big]}_{2e^x}\Big] = 0$$

$(D-1)$ führt x^2e^x in $2xe^x$ über.
$(D-1)$ reduziert jeweils den Exponenten von x um 1,
somit sind auch e^x und xe^x Lösungen der DGL.

$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

Störfunktionen $e^{\gamma x}p(x)$ Polynom $p(x)$

Zu einer Störfunktion dieser Art gibt es einen Ansatz, der durch Einsetzen, Koeffizientenvergleich und Lösen eines Gleichungssystems stets zu einer partikulären Lösung führt.
Für $\gamma = 0$ liegt lediglich das Polynom $p(x)$ vor.
Bis auf eine Feinheit sind die Ansätze naheliegend.

Störfunktion	Ansatz, falls 2 (allgemein γ) keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist
$3e^{2x}$	$e^{2x} \cdot a$
xe^{2x}	$e^{2x} \cdot (ax + b)$
x^2e^{2x}	$e^{2x} \cdot (ax^2 + bx + c)$
	Das Ansatz-Polynom hat stets denselben Grad wie $p(x)$.
	Falls 2 (allgemein γ) r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, wird x^r als Faktor hinzugefügt.

Störfunktion	Ansatz, falls 0 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist
3	a
$x + 1$	$ax + b$
$x^2 + 2x$	$ax^2 + bx + c$
	Das Ansatz-Polynom hat stets denselben Grad.
	Falls 0 r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, wird x^r als Faktor hinzugefügt.

$y'' + y' - 2y = -3x^2$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zur charakteristischen Gleichung

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\implies \quad \lambda_1 = -2, \ \ \lambda_2 = 1$

$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x$

Ansatz für die partikuläre Lösung, da $0 \notin \{-2, 1\}$:

$y_p(x) = ax^2 + bx + c, \ \ \ldots$

$y_p(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

Störfunktionen $e^{\gamma x}[\,p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\,]$

Zu einer Störfunktion dieser Art gibt es einen Ansatz, der durch Einsetzen, Koeffizientenvergleich und Lösen eines Gleichungssystems stets zu einer partikulären Lösung führt. $\gamma = 0$ ist möglich.
Bis auf eine Feinheit sind die Ansätze naheliegend.

Störfunktion	Ansatz, falls $\gamma + i\beta$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist
siehe oben	$e^{\gamma x}[\,r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\,]$ Die Ansatz-Polynome $r(x)$ und $s(x)$ haben den größeren Grad von $p(x)$ und $q(x)$.
	Falls $\gamma + i\beta$ r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, wird x^r als Faktor hinzugefügt.

$y'' - 7y' + 6y = e^x\cos(2x)$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zur charakteristischen Gleichung
$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$
$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 6$
$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$
Ansatz für die partikuläre Lösung, da $1 + 2i \notin \{1, 6\}$:
$y_p(x) = e^x[a\cos(2x) + b\sin(2x)], \ \ \ldots$
$y_p(x) = -e^x[\,\frac{1}{29}\cos(2x) + \frac{5}{58}\sin(2x)\,]$
$y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x} - e^x[\,\frac{1}{29}\cos(2x) + \frac{5}{58}\sin(2x)\,]$

$y'' + 3y' - 4y = xe^x$ $\qquad$ $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{25}xe^x + \frac{1}{10}x^2e^x$

$y'' + 4y = e^{-x}\sin(x)$ $\qquad$ $y(x) = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x) - \frac{1}{5}e^{-x}\sin(x) + \frac{1}{10}e^{-x}\cos(x)$

$y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
$y(0) = 1, \ y'(0) = 2$ $\qquad$ $y(x) = e^{-2x} + 4xe^{-2x} + \frac{1}{12}x^4e^{-2x}$

$y'' + y = x\cos(x)$ $\qquad$ $y(x) = C_1\sin(x) + C_2\cos(x) + \frac{1}{4}x\cos(x) + \frac{1}{4}x^2\sin(x)$