

Momentane Änderungsrate

Der freie Fall (im Vakuum) eines Körpers wird durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}gx^2 \quad \text{beschrieben,}$$

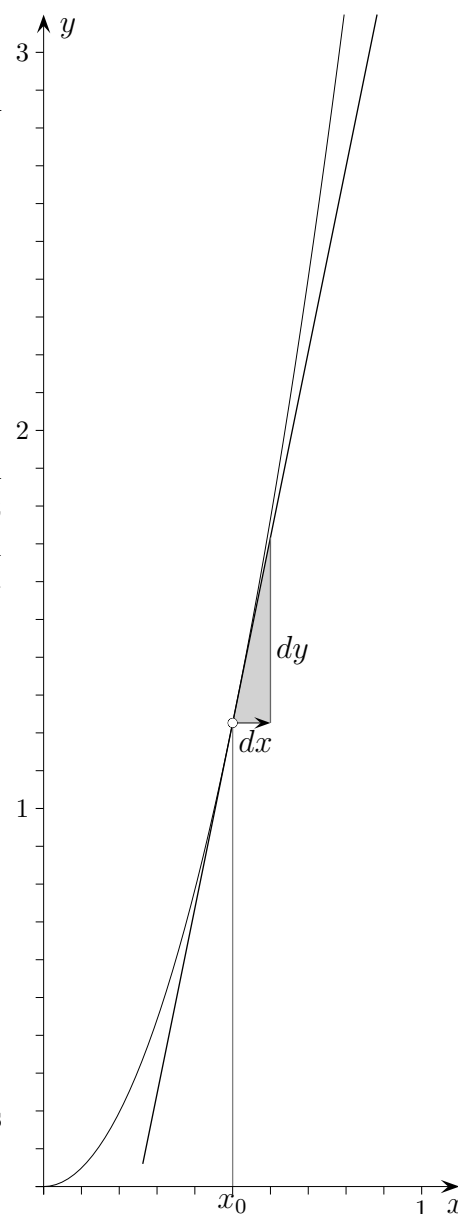
y ist die Fallstrecke in m , x die Zeit in sec , $g = 9,81$.

Die Ableitung an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

wird als momentane (lokale) Änderungsrate (in diesem Fall auch Momentangeschwindigkeit) bezeichnet. Ein Verstreichen der Zeit um dx bewirkt eine (näherungsweise) Zunahme der durchfallenen Strecke um $dy = f'(x_0) dx$. Die Näherung ist umso besser, je kleiner dx und je geringer die Krümmung der Kurve ist.

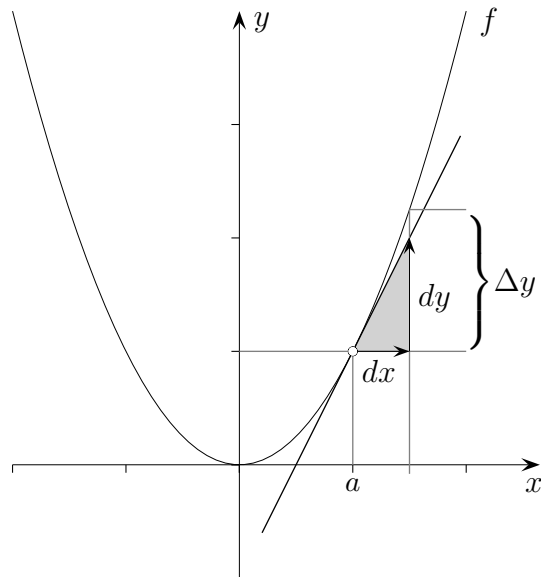
1. Welche Bedeutung hat die Ableitung einer Funktion, die folgenden Zusammenhang beschreibt?
 - a) Wachstum einer Bakterienkultur in Abhängigkeit von der Zeit
 - b) Temperatur eines sich abkühlenden Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit
 - c) Entwicklung der Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge (Output)
 - d) Höhe des Flüssigkeitsspiegels eines leerlaufenden Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit



Wenn Informationen über die lokalen Änderungsraten $f'(x)$ vorliegen, können Aussagen über die Funktion $f(x)$ gemacht werden.

2. Welche Bedeutung hat die Funktion $f(x)$, falls
 - a) die Durchflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem Rohr in Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist,
 - b) die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges in jedem Zeitpunkt bekannt ist?
3. Wie verläuft die Entwicklung einer Population, deren Änderungsrate
 - a) konstant,
 - b) proportional zum Bestand ist?

Änderungen



Für Funktionsänderungen an einer vorgegebenen Stelle a gilt:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

$$dy = f'(a) \cdot dx$$

$$\Delta y \approx dy \quad \text{für } \Delta x = dx$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{mittlere Änderungsrate}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(a) \quad \text{lokale Änderungsrate}$$

1. Eine Gesamtkostenfunktion lautet: $f(x) = \frac{1}{8000}x^3 - \frac{1}{75}x^2 + \frac{3}{5}x + 12$.

Um wieviel (exakt und genähert) steigen die Gesamtkosten an, falls die Ausbringung von 60 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

2. Eine Gewinnfunktion lautet: $f(x) = 150 - 20 \cdot 10^{-0,02x}$.

Um wieviel (exakt und genähert) steigt der Gewinn an, falls die Ausbringung von 40 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

Änderungen

1. Eine Gesamtkostenfunktion lautet: $f(x) = \frac{1}{8000}x^3 - \frac{1}{75}x^2 + \frac{3}{5}x + 12$.

Um wieviel (exakt und genähert) steigen die Gesamtkosten an, falls die Ausbringung von 60 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

2. Eine Gewinnfunktion lautet: $f(x) = 150 - 20 \cdot 10^{-0,02x}$.

Um wieviel (exakt und genähert) steigt der Gewinn an, falls die Ausbringung von 40 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

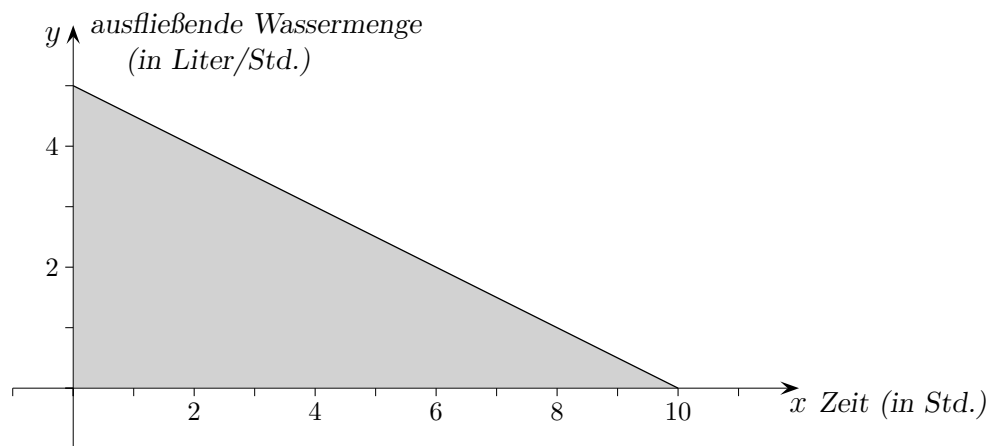
Lösungen:

$$\begin{array}{l} 1. \quad \Delta x = 0,5 \\ \quad \Delta x = 1 \\ \quad \Delta x = 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Delta y = 0,177 \\ \Delta y = 0,359 \\ \Delta y = 0,738 \end{array} \right| \begin{array}{l} dy = 0,175 \\ dy = 0,350 \\ dy = 0,700 \end{array}$$

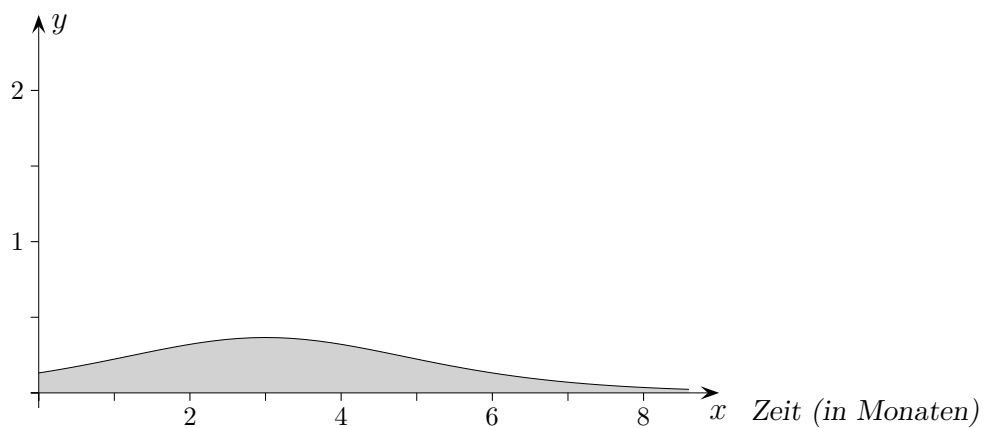
$$\begin{array}{l} 2. \quad \Delta x = 0,5 \\ \quad \Delta x = 1 \\ \quad \Delta x = 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Delta y = 0,072 \\ \Delta y = 0,143 \\ \Delta y = 0,279 \end{array} \right| \begin{array}{l} dy = 0,073 \\ dy = 0,146 \\ dy = 0,292 \end{array}$$

Momentane Änderungsrate Aufgaben

1. Aus einem Ventil, das langsam geschlossen wird, fließt Wasser.
Genauer ist der Grafik zu entnehmen.
Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

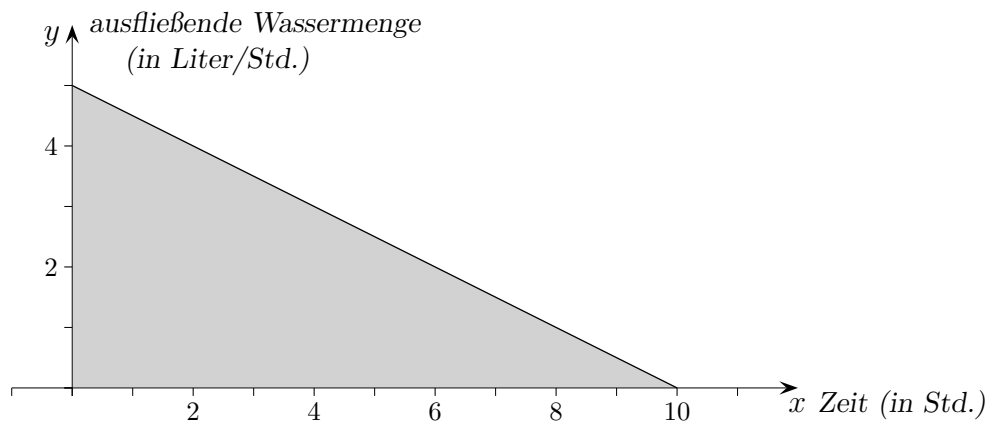


2. Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in $m/Monat$) von Sonnenblumen.
Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe $0,20 m$.



Momentane Änderungsrate Aufgaben mit Lösungen

1. Aus einem Ventil, das langsam geschlossen wird, fließt Wasser. Genaueres ist der Grafik zu entnehmen. Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?



Die Geradengleichung lautet:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Wenn $f(x)$ die Gesamtmenge des ausgeflossenen Wassers angibt, so ist:

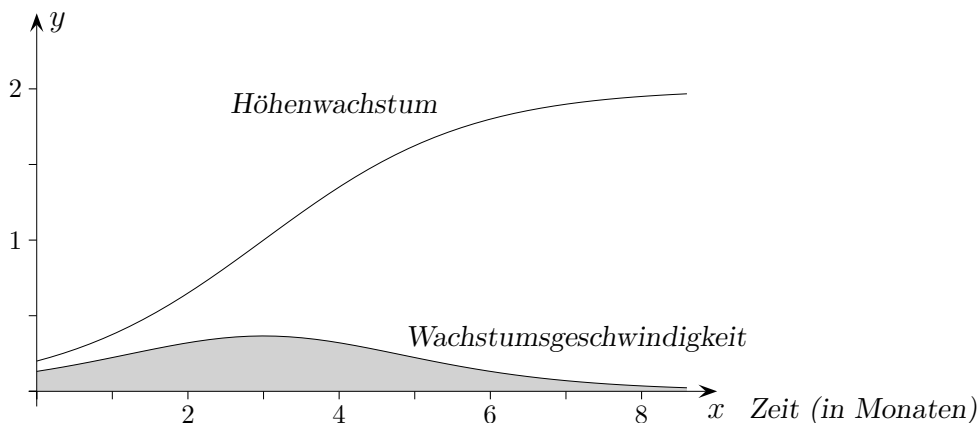
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 5 \quad \text{und damit} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x \quad (\text{beachte: } f(0) = 0), \quad f(10) = 25 \text{ (Liter)}$$

Es bietet sich im Unterricht an, den Zusammenhang mit der Dreiecksfläche zu erörtern.

Hier hilft eine Betrachtung mit stückweise konstanter Ausfließgeschwindigkeit weiter.

Vertiefung: Die Frage nach dem Inhalt der Fläche, die eine nach unten geöffnete Parabel mit den positiven Achsen einschließt, führt hier zur Interpretation der quadratischen Funktion als Ausfließgeschwindigkeit $f'(x)$, so dass $f(x)$ und damit der Flächeninhalt bestimmt werden kann.

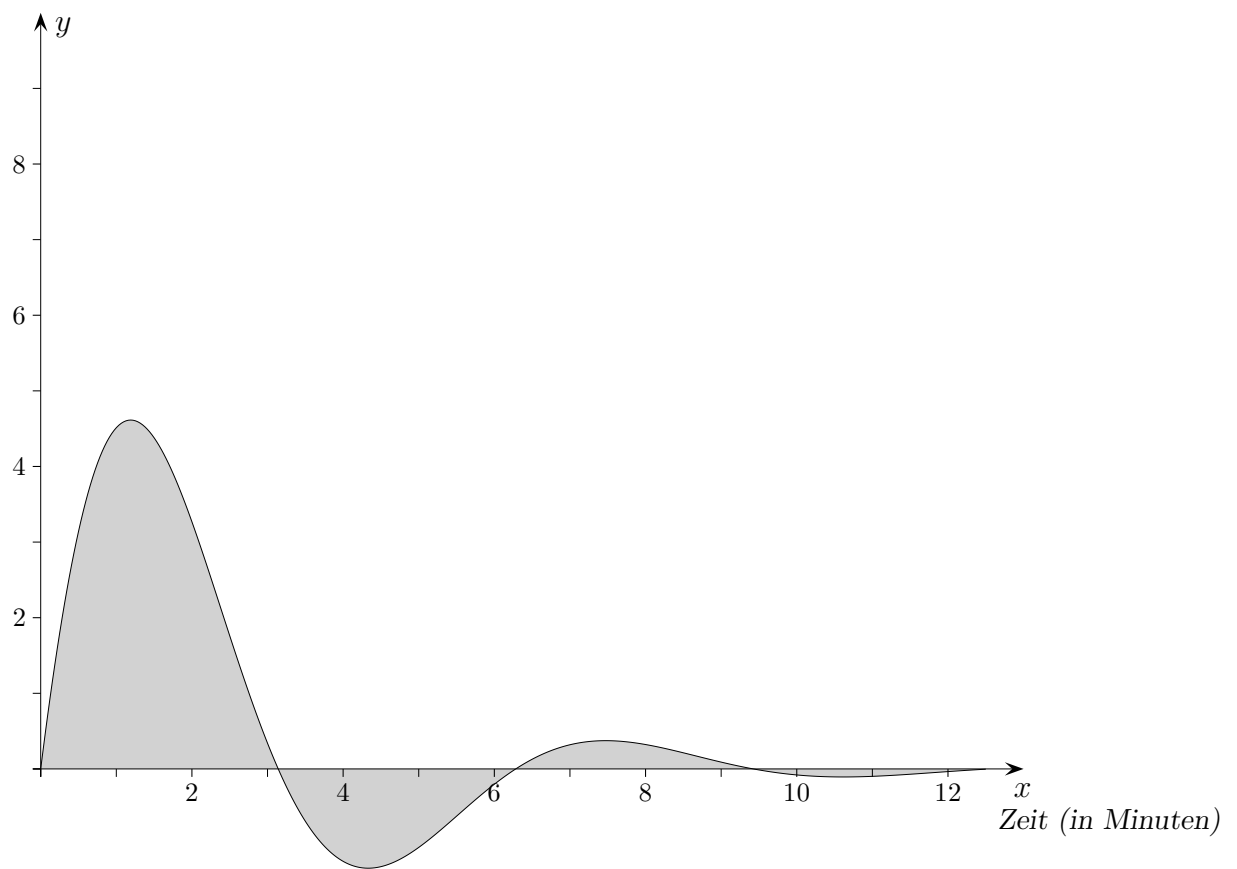
2. Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in m/Monat) von Sonnenblumen. Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe $0,20 \text{ m}$.



Momentane Änderungsrate Aufgabe

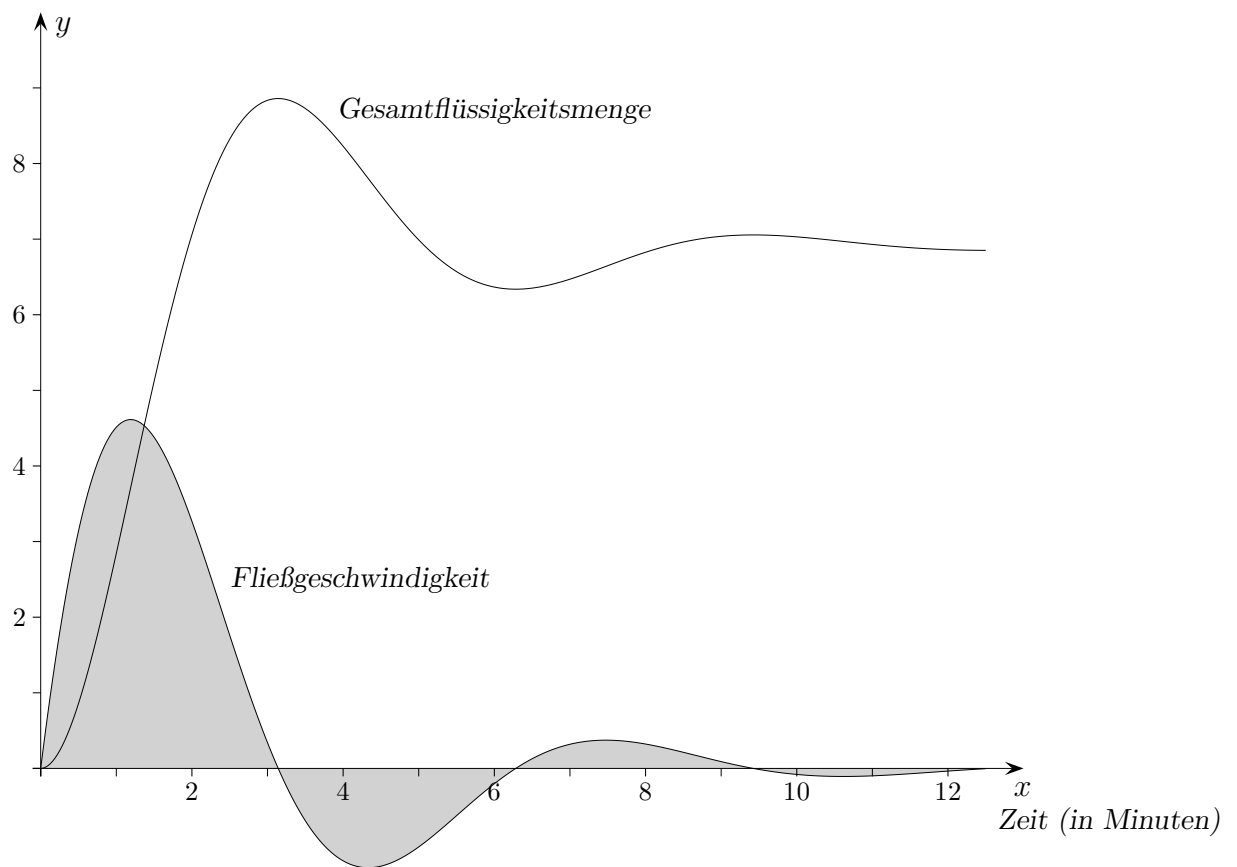
3. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss).

Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).



Momentane Änderungsrate Aufgabe mit Lösung

3. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).



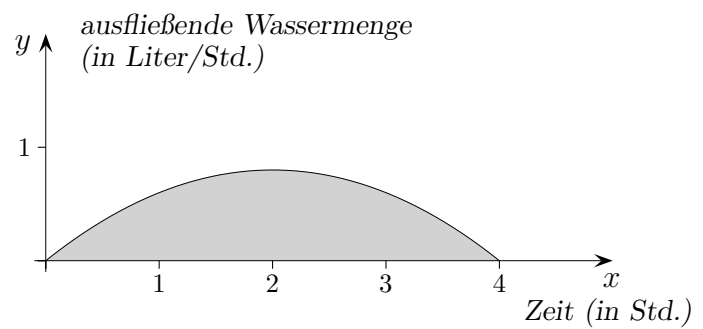
Ausfließendes Wasser

Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4), \quad 0 \leq x \leq 4$$

Stelle auch den Bezug der Fragestellung zur Berechnung der Fläche her, die von der Parabel und der x -Achse eingeschlossen wird.

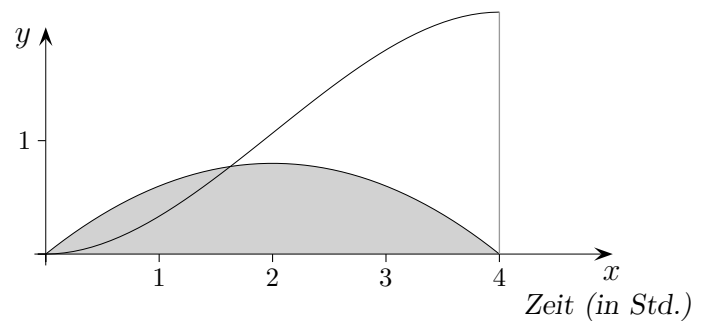
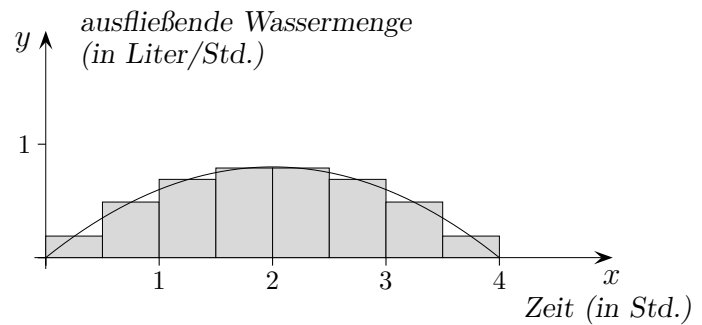


Ausfließendes Wasser Lösung

Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4), \quad 0 \leq x \leq 4$$



Ergebnis:

$$f(4) = \frac{32}{15} \text{ Liter}$$

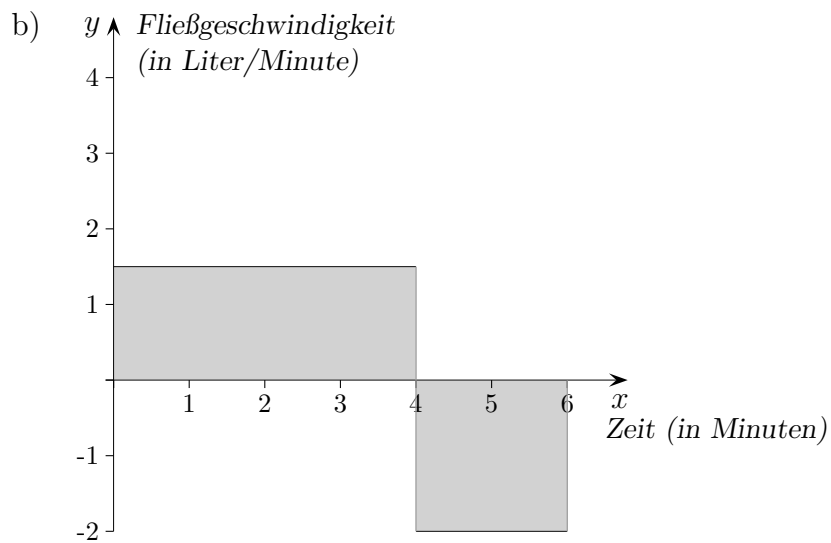
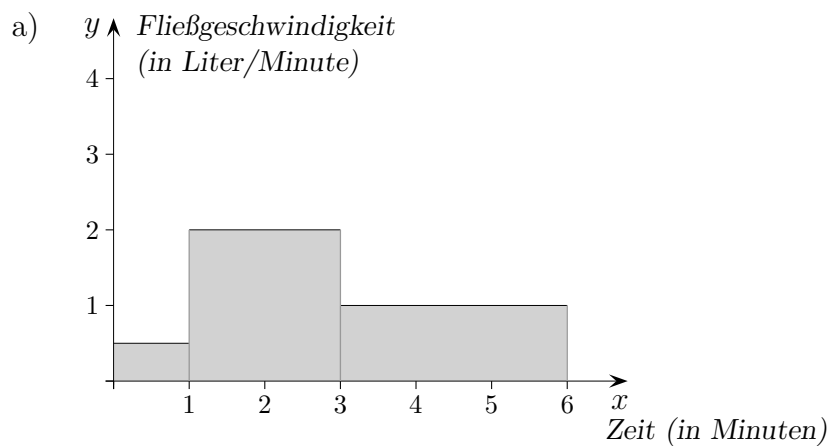
Wenn die Menge des ausfließenden Wassers als konstant, z. B. c (Liter/Std.) für ein Zeitintervall Δx (Std.) angenommen wird, so ergibt sich für die in dieser Zeit ausgeflossene Wassermenge $c \cdot \Delta x$. Die Summe der Inhalte aller eingezeichneten Rechtecke stellt daher einen Näherungswert für die ausgeflossene Wassermenge dar, der umso genauer ist, je kleiner die Rechtecksbreite Δx gewählt wird.

Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).

Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 6 Minuten im Behälter?

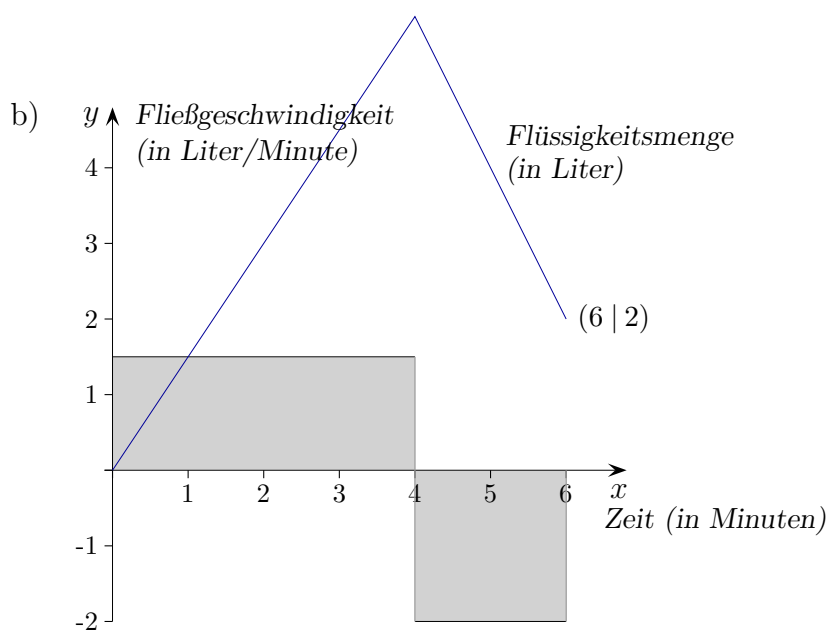
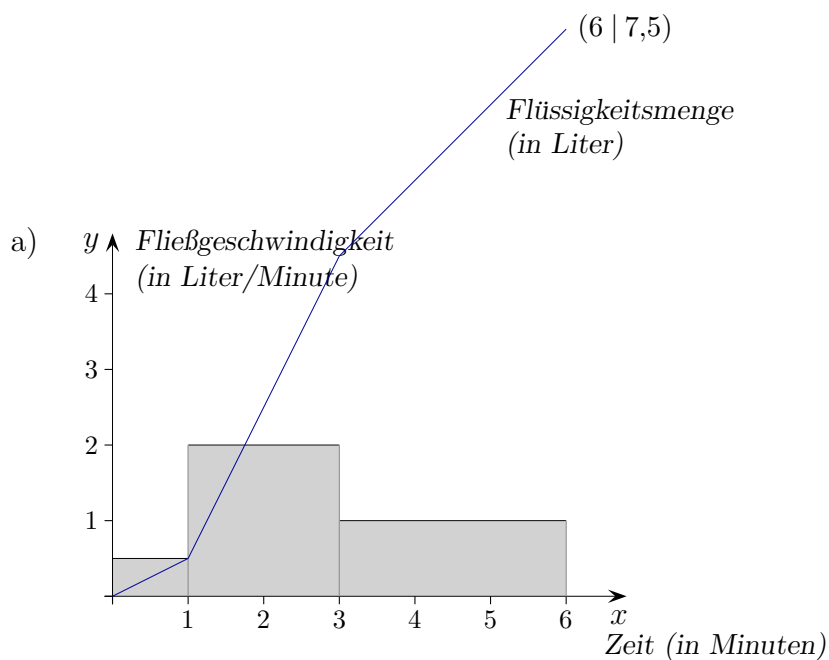


Zu- und Abfluss Lösung

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).

Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 6 Minuten im Behälter?

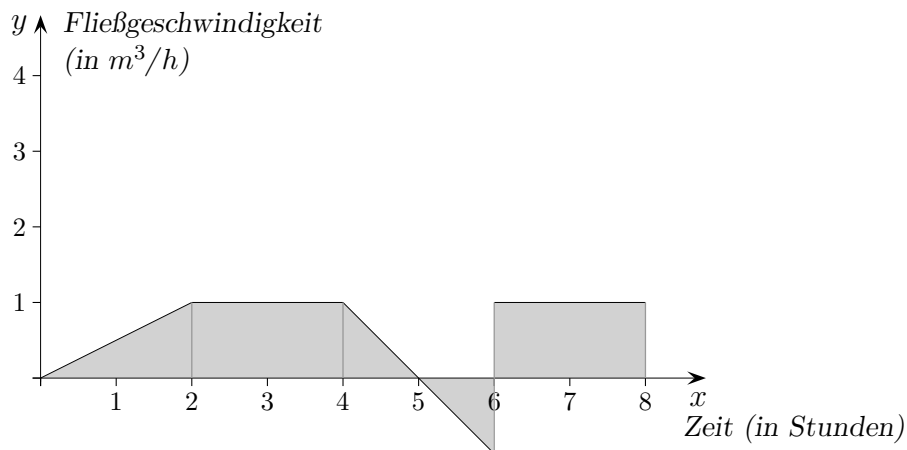


Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/$ Stunde) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).

Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?

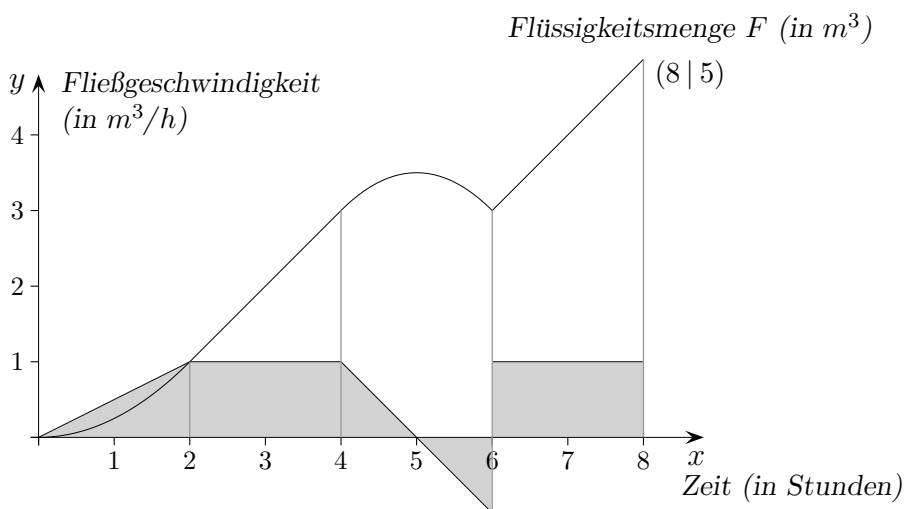


Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (m^3/Stunde) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).

Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + (x - 4) + 3 & 4 < x \leq 6 \\ x - 3 & 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

Die Teilfunktionen (die erste ausgenommen) ergeben sich aus einer Verschiebung in x - und y -Achsenrichtung.

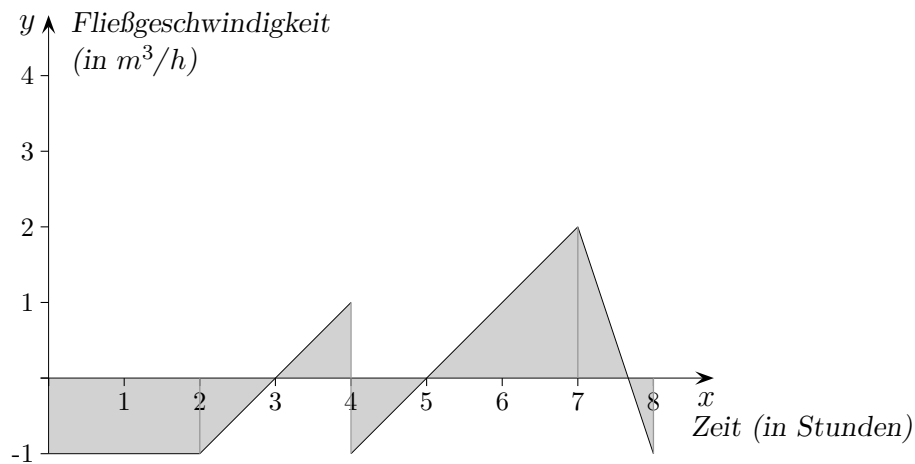
Beachte, dass F an der Stelle $x = 6$ nicht differenzierbar ist, im Gegensatz zu den Stellen $x = 2$ und $x = 4$. Hier haben die angrenzenden Teilfunktionen von F dieselben Steigungen.

Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/$ Stunde) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter. Zur Zeit $x = 0$ sind 3 Liter im Behälter.

Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?

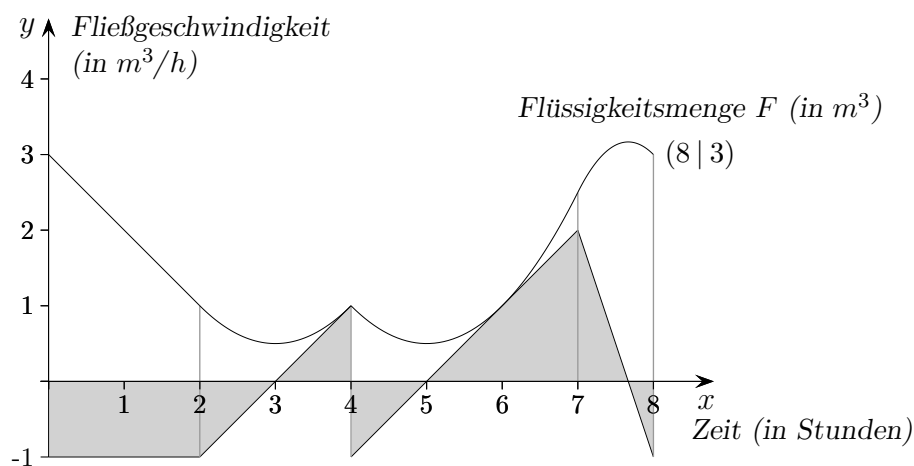


Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (m^3/Stunde) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter. Zur Zeit $x = 0$ sind 3 Liter im Behälter.

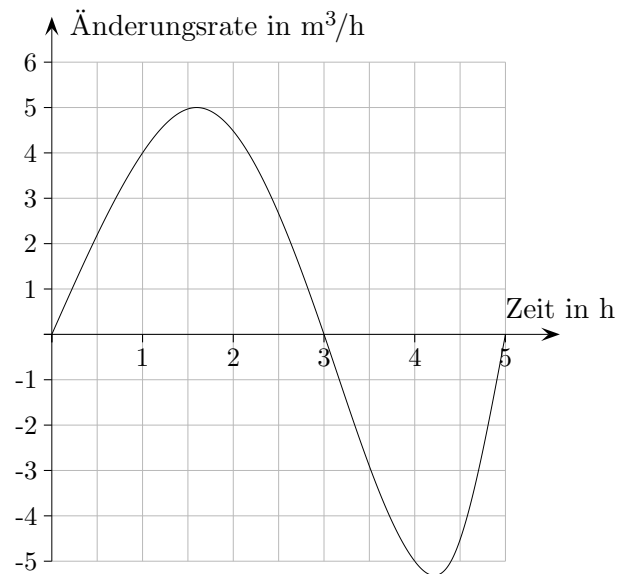
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



$$F(x) = \begin{cases} -x + 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 - (x-2) + 1 & 2 < x \leq 4 \\ \frac{1}{2}(x-4)^2 - (x-4) + 1 & 4 < x \leq 7 \\ -\frac{3}{2}(x-7)^2 + 2(x-7) + \frac{5}{2} & 7 < x \leq 8 \end{cases}$$

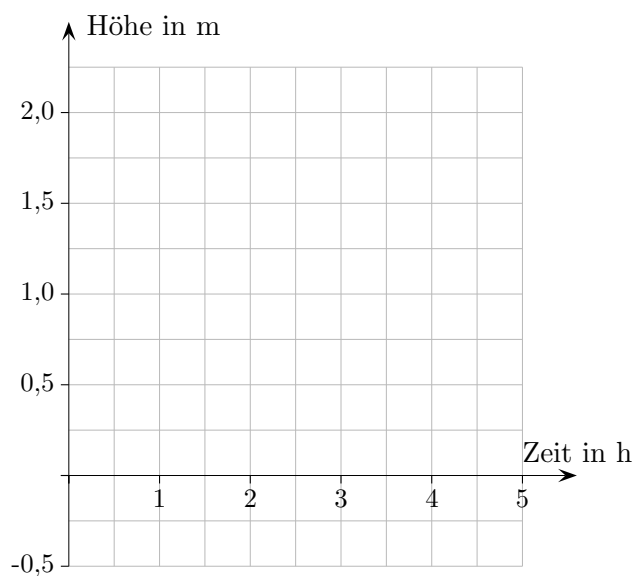
Die Teilfunktionen ergeben sich aus einer Verschiebung in x - und y -Achsenrichtung. Beachte, dass F an der Stelle $x = 4$ nicht differenzierbar ist, im Gegensatz zu den Stellen $x = 2$ und $x = 7$. Hier haben die angrenzenden Teilfunktionen von F dieselben Steigungen.

Speicherbecken

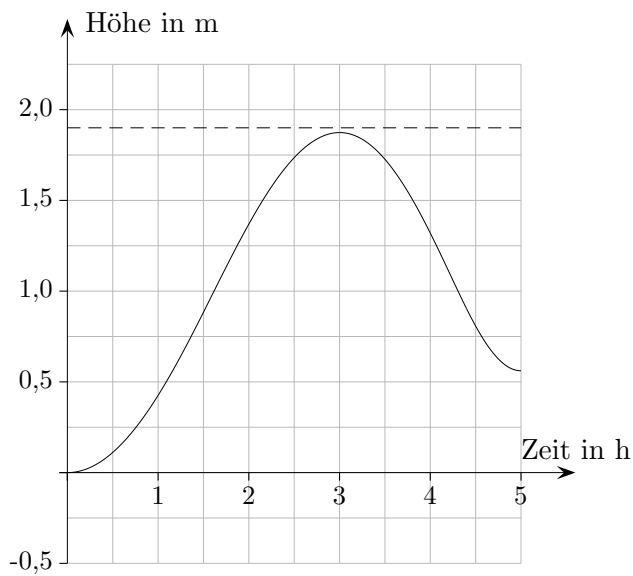
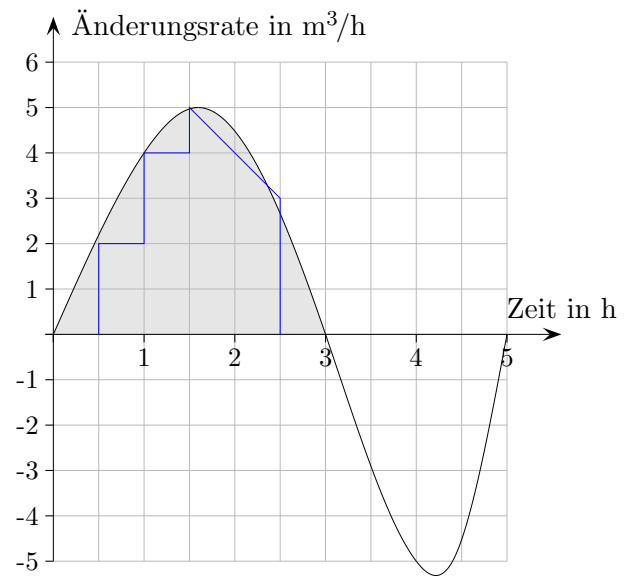
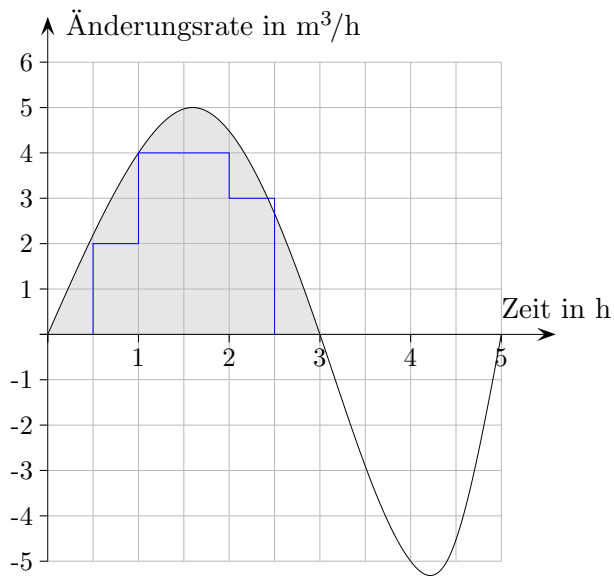


Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von 5 m^2 und ist zunächst leer. Der Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate in m^3/h der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

- Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.
- Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.



Speicherbecken



Ein Kästchen entspricht $0,5 \text{ m}^3$,
 19 Kästchen entsprechen $9,5 \text{ m}^3$ (18,5 Kästchen).
 höchster Flüssigkeitsstand: $9,5 \text{ m}^3 : 5 \text{ m}^2 = 1,9 \text{ m}$