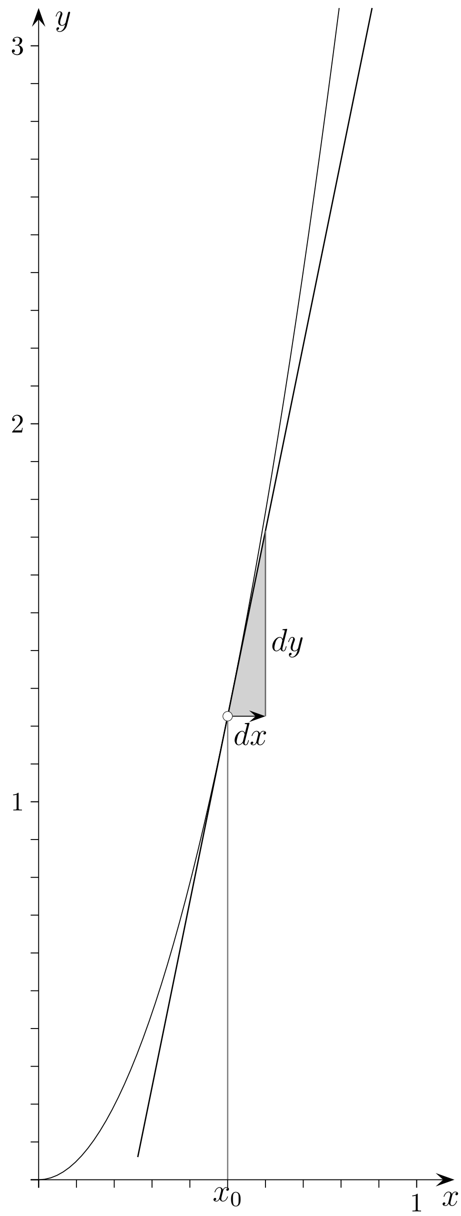
Momentane Änderungsrate



Der freie Fall (im Vakuum) eines Körpers wird durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} g x^2 \qquad \text{beschrieben,}$$

y ist die Fallstrecke in m, x die Zeit in sec, $g = 9{,}81$.

Die Ableitung an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

wird als momentane (lokale) Änderungsrate (in diesem Fall auch Momentangeschwindigkeit) bezeichnet. Ein Verstreichen der Zeit um dx bewirkt eine (näherungsweise) Zunahme der durchfallenen Strecke um $dy = f'(x_0)\,dx$. Die Näherung ist umso besser, je kleiner dx und je geringer die Krümmung der Kurve ist.

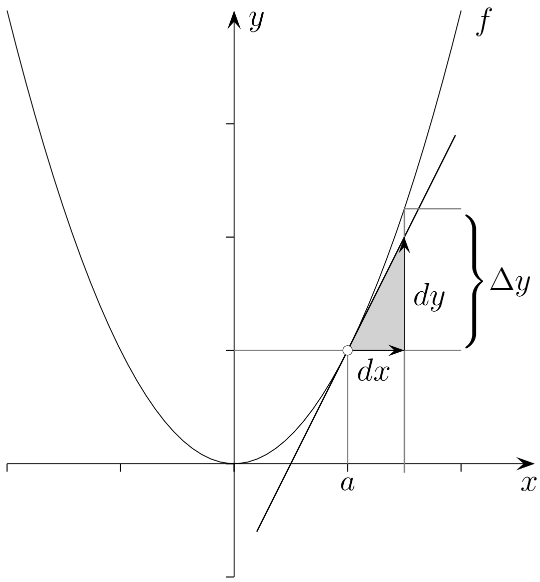
1. Welche Bedeutung hat die Ableitung einer Funktion, die folgenden Zusammenhang beschreibt?
   a) Wachstum einer Bakterienkultur in Abhängigkeit von der Zeit
   b) Temperatur eines sich abkühlenden Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit
   c) Entwicklung der Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge (Output)
   d) Höhe des Flüssigkeitsspiegels eines leerlaufenden Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit

Wenn Informationen über die lokalen Änderungsraten $f'(x)$ vorliegen, können Aussagen über die Funktion $f(x)$ gemacht werden.

2. Welche Bedeutung hat die Funktion $f(x)$, falls
   a) die Durchflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem Rohr in Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist,
   b) die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges in jedem Zeitpunkt bekannt ist?

3. Wie verläuft die Entwicklung einer Population, deren Änderungsrate
   a) konstant,
   b) proportional zum Bestand ist?

Änderungen



Für Funktionsänderungen an einer vorgegebenen Stelle a gilt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(a+\Delta x) - f(a) \\ dy &= f'(a) \cdot dx \\ \Delta y &\approx dy \qquad \text{für} \quad \Delta x = dx \end{aligned}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ mittlere Änderungsrate

$\dfrac{dy}{dx} = f'(a)$ lokale Änderungsrate

1. Eine Gesamtkostenfunktion lautet: $f(x) = \dfrac{1}{8000}x^3 - \dfrac{1}{75}x^2 + \dfrac{3}{5}x + 12$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigen die Gesamtkosten an, falls die Ausbringung von 60 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

2. Eine Gewinnfunktion lautet: $f(x) = 150 - 20 \cdot 10^{-0{,}02x}$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigt der Gewinn an, falls die Ausbringung von 40 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

Änderungen

1. Eine Gesamtkostenfunktion lautet: $f(x) = \dfrac{1}{8000}x^3 - \dfrac{1}{75}x^2 + \dfrac{3}{5}x + 12$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigen die Gesamtkosten an, falls die Ausbringung von 60 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

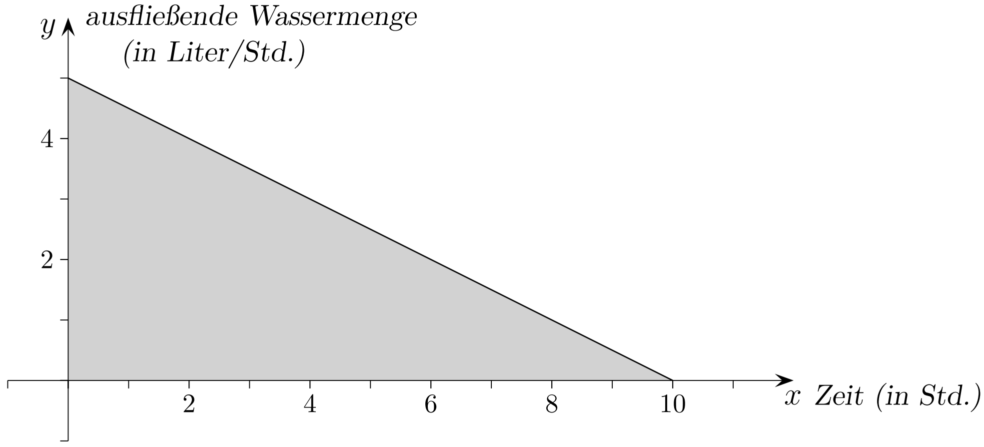
2. Eine Gewinnfunktion lautet: $f(x) = 150 - 20 \cdot 10^{-0{,}02x}$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigt der Gewinn an, falls die Ausbringung von 40 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

Lösungen:

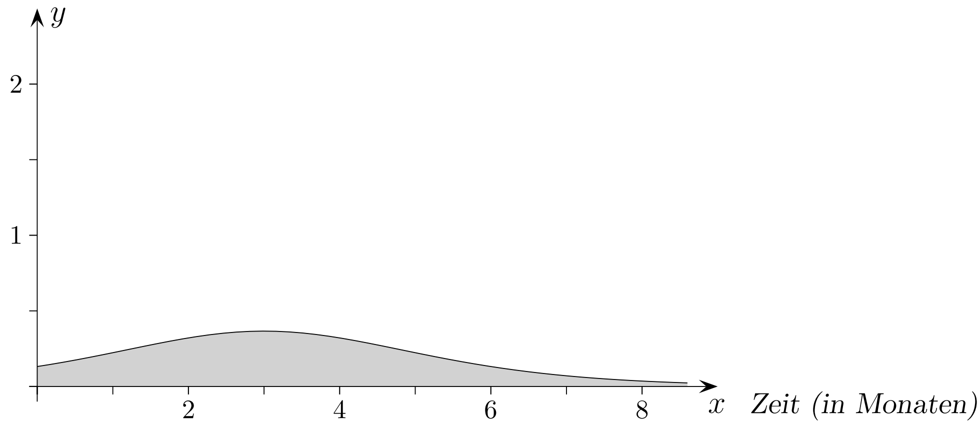
1.	$\Delta x = 0{,}5$	$\Delta y = 0{,}177$	$dy = 0{,}175$
	$\Delta x = 1$	$\Delta y = 0{,}359$	$dy = 0{,}350$
	$\Delta x = 2$	$\Delta y = 0{,}738$	$dy = 0{,}700$
2.	$\Delta x = 0{,}5$	$\Delta y = 0{,}072$	$dy = 0{,}073$
	$\Delta x = 1$	$\Delta y = 0{,}143$	$dy = 0{,}146$
	$\Delta x = 2$	$\Delta y = 0{,}279$	$dy = 0{,}292$

Momentane Änderungsrate   Aufgaben

1. Aus einem Ventil, das langsam geschlossen wird, fließt Wasser.
   Genaueres ist der Grafik zu entnehmen.
   Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

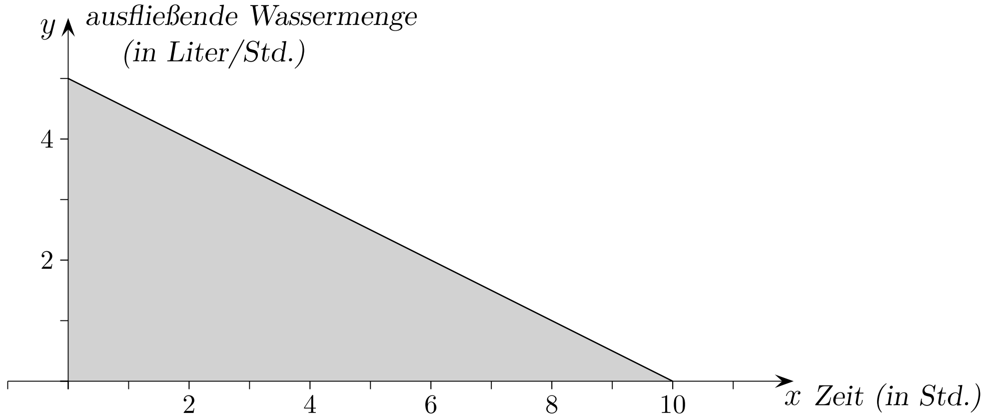


2. Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in $m/Monat$) von Sonnenblumen.
   Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe 0,20 m.



Momentane Änderungsrate   Aufgaben mit Lösungen

1. Aus einem Ventil, das langsam geschlossen wird, fließt Wasser.
   Genaueres ist der Grafik zu entnehmen.
   Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?



   Die Geradengleichung lautet:

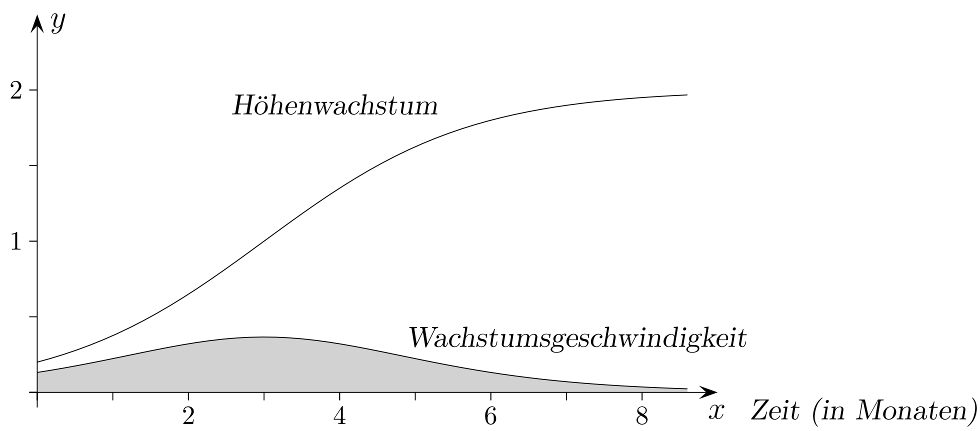
   $$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

   Wenn $f(x)$ die Gesamtmenge des ausgeflossenen Wassers angibt, so ist:

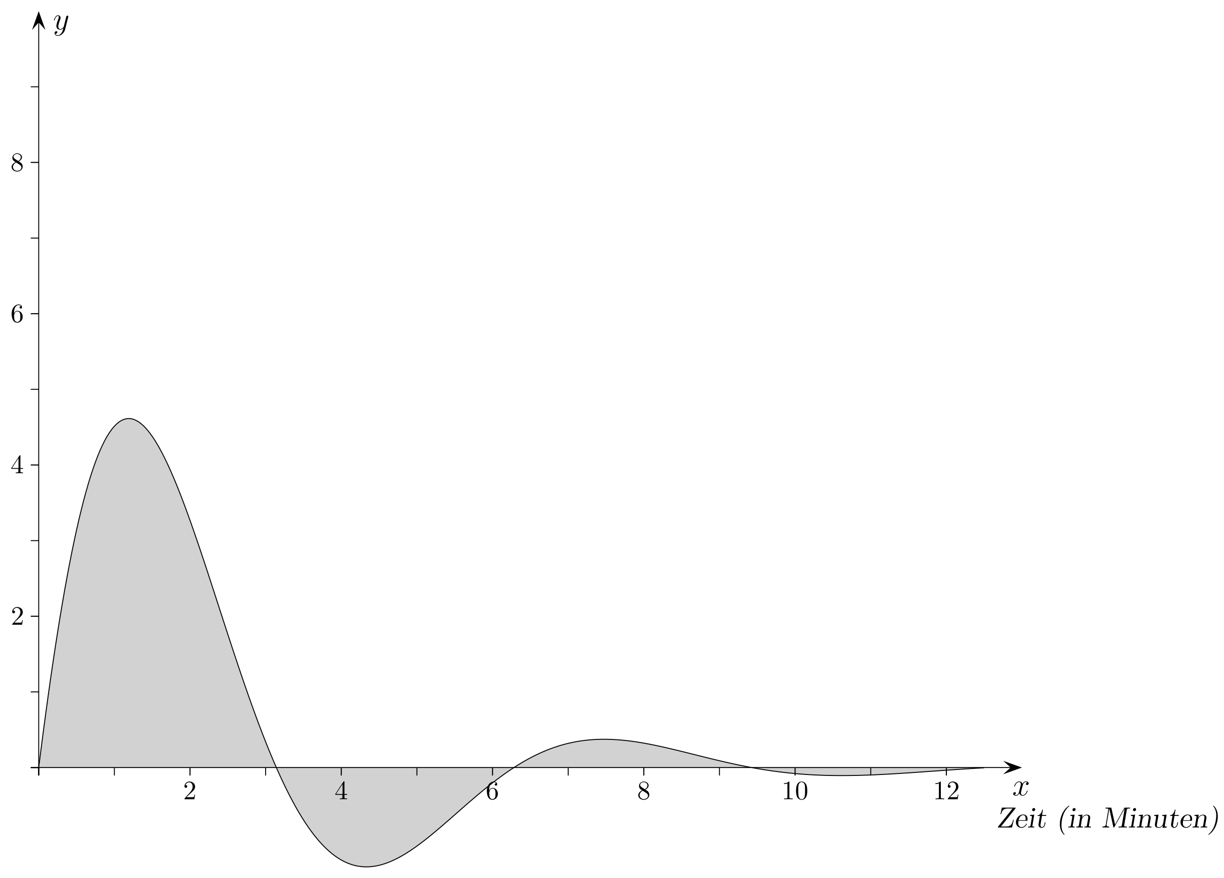
   $$f'(x) = -\frac{1}{2}x+5 \quad \text{und damit} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^2+5x \quad \text{(beachte: } f(0) = 0), \quad f(10) = 25 \text{ (Liter)}$$

   Es bietet sich im Unterricht an, den Zusammenhang mit der Dreiecksfläche zu erörtern.
   Hier hilft eine Betrachtung mit stückweise konstanter Ausfließgeschwindigkeit weiter.
   Vertiefung: Die Frage nach dem Inhalt der Fläche, die eine nach unten geöffnete Parabel mit den positiven Achsen einschließt, führt hier zur Interpretation der quadratischen Funktion als Ausfließgeschwindigkeit $f'(x)$, so dass $f(x)$ und damit der Flächeninhalt bestimmt werden kann.

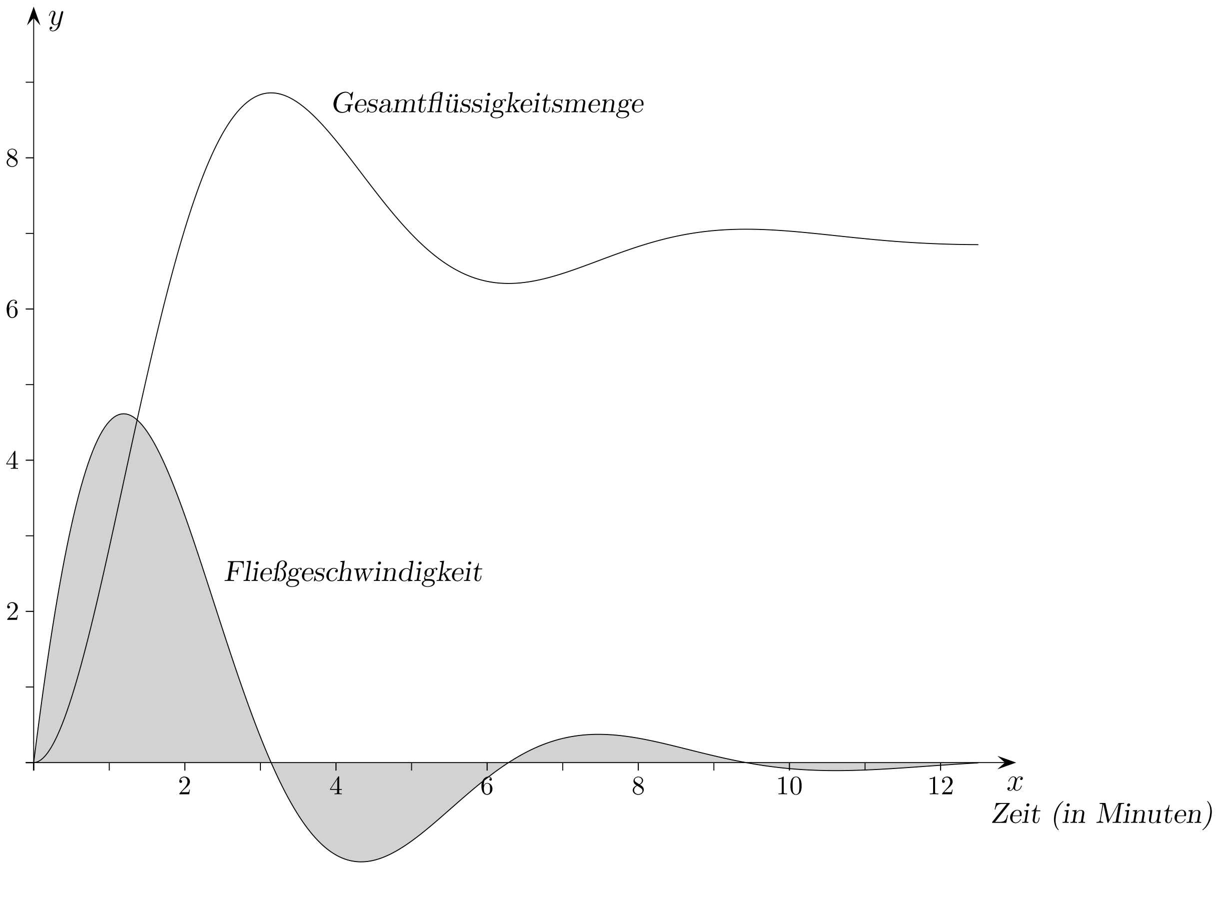
2. Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in $m/Monat$) von Sonnenblumen.
   Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe 0,20 m.



3. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).



3. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).



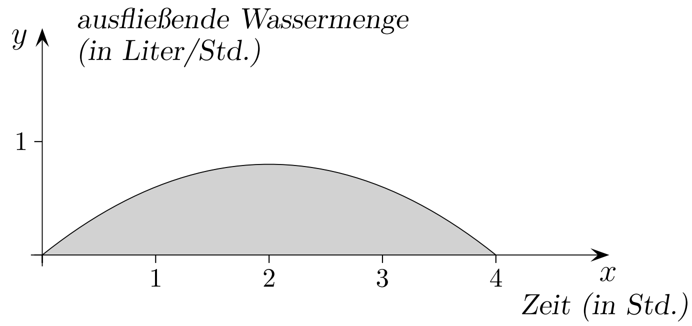
Ausfließendes Wasser

Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4)\,, \quad 0 \leq x \leq 4$

Stelle auch den Bezug der Fragestellung zur Berechnung der Fläche her, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird.

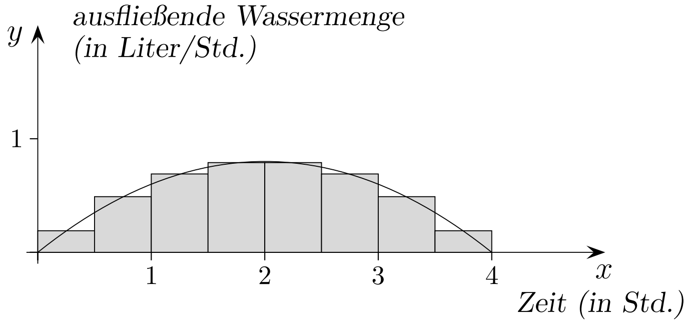


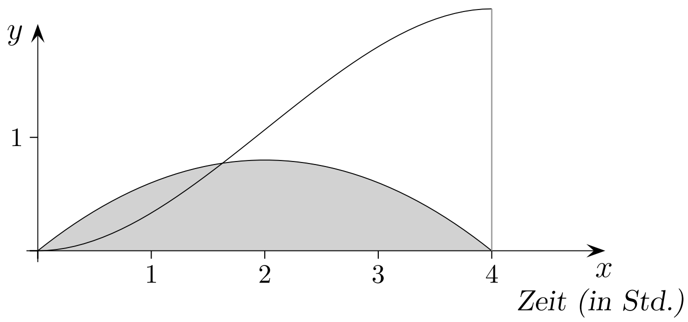
Ausfließendes Wasser   Lösung

Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4)\,, \quad 0 \le x \le 4$





Ergebnis:

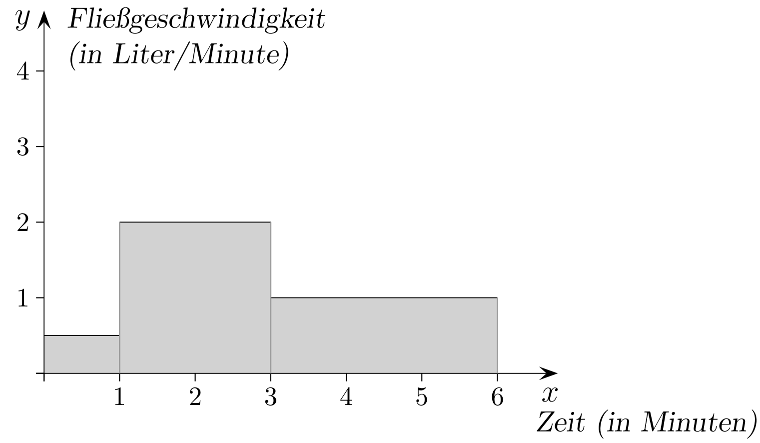
$f(4) = \frac{32}{15}$ Liter

Wenn die Menge des ausfließenden Wassers als konstant, z. B. c (Liter/Std.) für ein Zeitintervall Δx (Std.) angenommen wird, so ergibt sich für die in dieser Zeit ausgeflossene Wassermenge $c \cdot \Delta x$. Die Summe der Inhalte aller eingezeichneten Rechtecke stellt daher einen Näherungswert für die ausgeflossene Wassermenge dar, der umso genauer ist, je kleiner die Rechtecksbreite Δx gewählt wird.

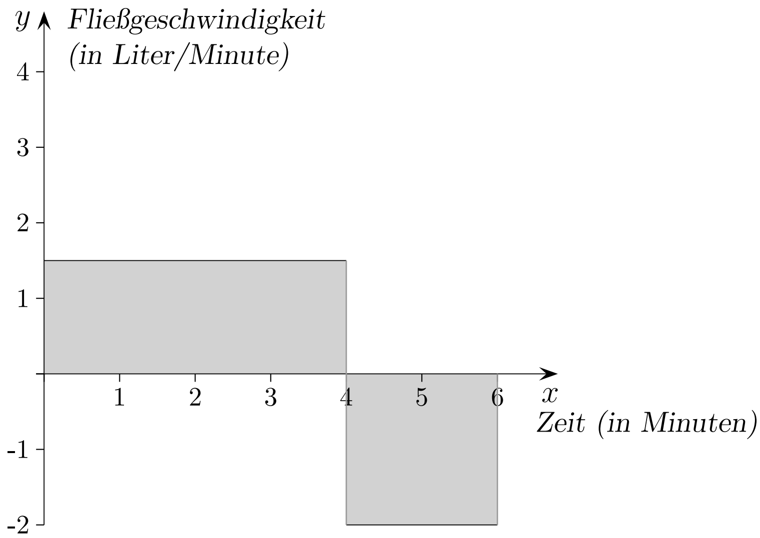
Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 6 Minuten im Behälter?

a)



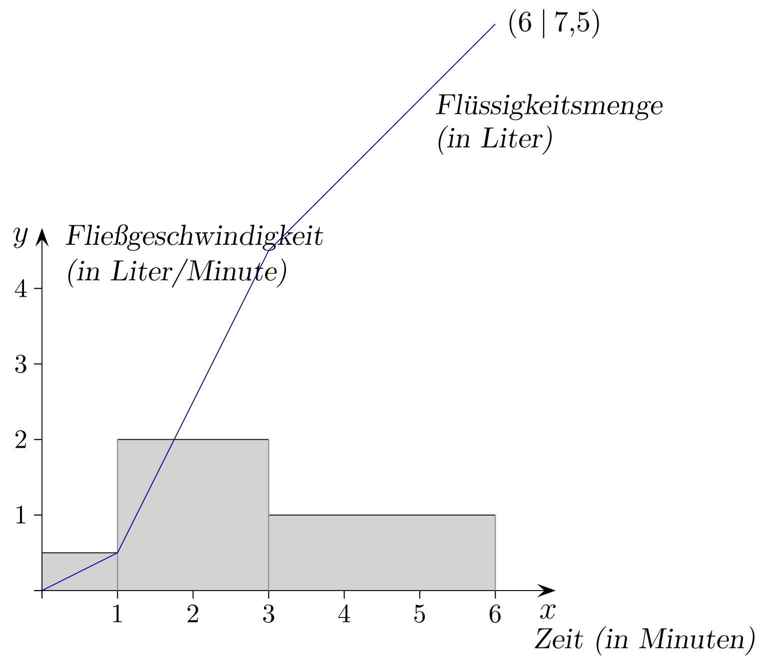
b)



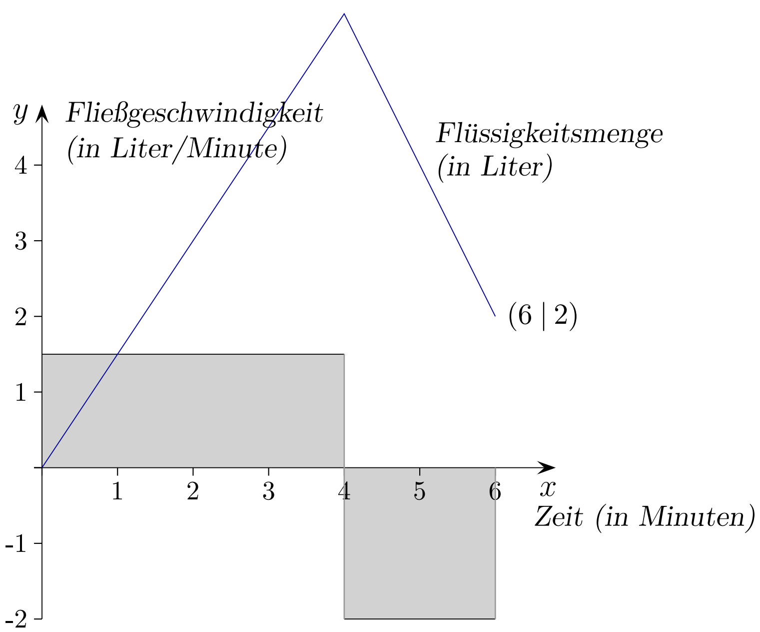
Zu- und Abfluss Lösung

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 6 Minuten im Behälter?

a)

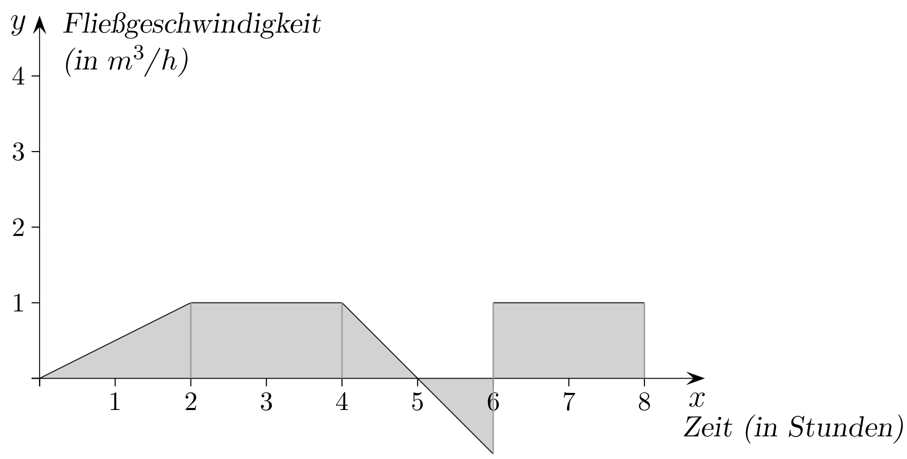


b)



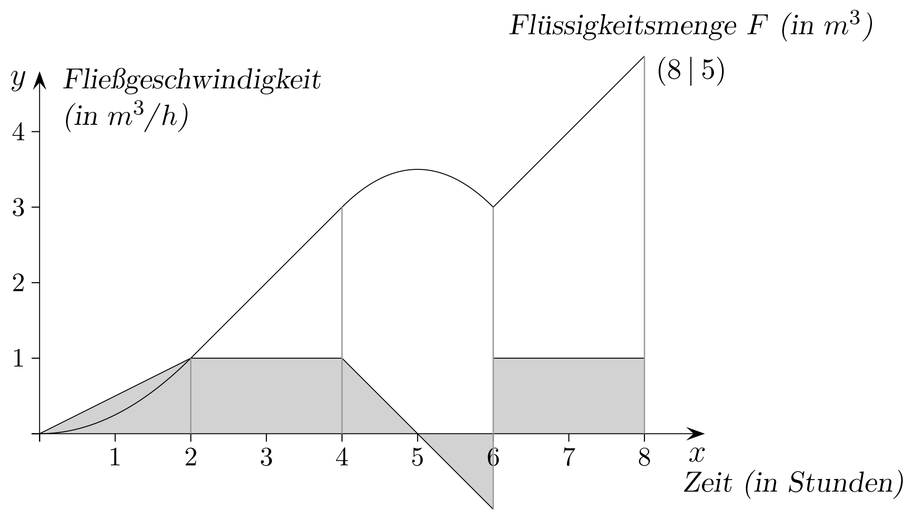
Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt.
Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?

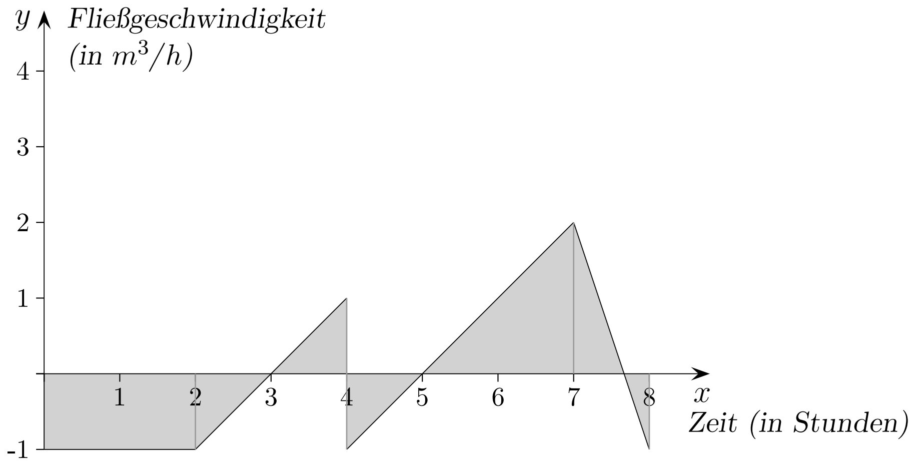


$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ x - 1 & 2 < x \le 4 \\ -\frac{1}{2}(x-4)^2 + (x-4) + 3 & 4 < x \le 6 \\ x - 3 & 6 < x \le 8 \end{cases}$$

Die Teilfunktionen (die erste ausgenommen) ergeben sich aus einer Verschiebung in x- und y-Achsenrichtung.
Beachte, dass F an der Stelle $x = 6$ nicht differenzierbar ist, im Gegensatz zu den Stellen $x = 2$ und $x = 4$. Hier haben die angrenzenden Teilfunktionen von F dieselben Steigungen.

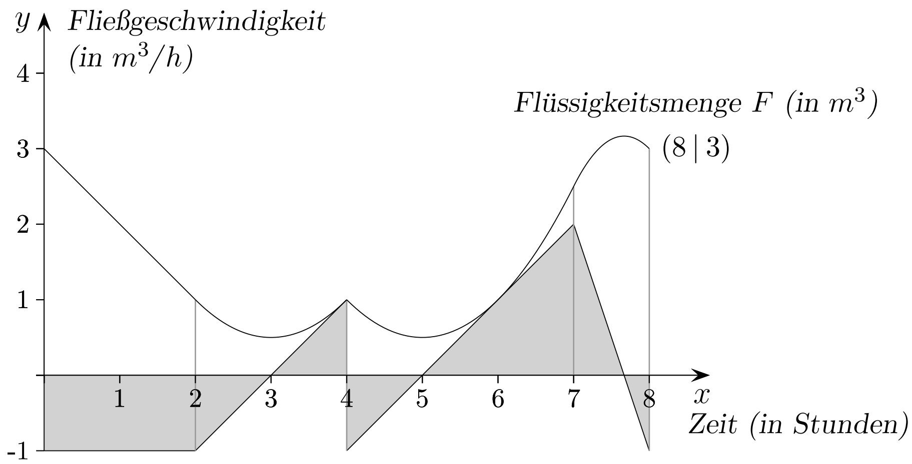
Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter. Zur Zeit $x = 0$ sind 3 Liter im Behälter.
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter. Zur Zeit $x = 0$ sind 3 Liter im Behälter.
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



$$F(x) = \begin{cases} -x + 3 & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 - (x-2) + 1 & 2 < x \le 4 \\ \frac{1}{2}(x-4)^2 - (x-4) + 1 & 4 < x \le 7 \\ -\frac{3}{2}(x-7)^2 + 2(x-7) + \frac{5}{2} & 7 < x \le 8 \end{cases}$$

Die Teilfunktionen ergeben sich aus einer Verschiebung in x- und y-Achsenrichtung. Beachte, dass F an der Stelle $x = 4$ nicht differenzierbar ist, im Gegensatz zu den Stellen $x = 2$ und $x = 7$. Hier haben die angrenzenden Teilfunktionen von F dieselben Steigungen.