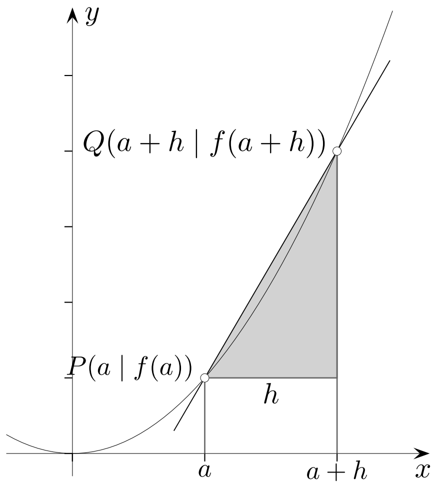
Differentialrechnung Anfänge

Leibniz 1646-1716, Newton 1643-1727

Wir ermitteln die Tangentensteigungen für verschiedene Funktionen f im Punkt $P\big(a \mid f(a)\big)$.



$f(x) = x^2$	$2a$	
$f(x) = x^2 + 3$	$2a$	*Eine Zahl als Summand fällt weg.*
$f(x) = 4x^2$	$8a$	*Eine Zahl als Faktor bleibt erhalten (Faktorregel).*
$f(x) = x^2 + 4x$	$2a + 4$	
$f(x) = x^3$	$3a^2$	
$f(x) = x^3 + x^2$	$3a^2 + 2a$	*Summanden werden einzeln betrachtet.*
$f(x) = x^n$	na^{n-1}	

Betrachte $f(x) = x^2$. Statt $m_{Tangente} = 2a$ schreiben wir $f'(x) = 2x$ oder $(x^2)' = 2x$.
$f'(x) = 2x$ heißt 1. Ableitung von $f(x) = x^2$.
Die Funktion $f(x) = x^2$ wurde abgeleitet oder differenziert.
$f'(4) = 8$ bedeutet, dass die Tangentensteigung an der Stelle $x = 4$ (also im Punkt $P\big(4 \mid 16\big)$) 8 beträgt.

Das allgemeine Vorgehen (h-Methode), um die 1. Ableitung an der Stelle a zu ermitteln, lautet:

$$m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Der auf der rechten Seite stehende Quotient heisst Differenzenquotient.
Nun sind wir in der Lage, Extrema (Minimum und Maximum) zu berechnen, genauer, die Punkte mit waagerechter Tangente, für die also $f'(x) = 0$ gilt.

In welchen Punkten besitzt die Funktion waagerechte Tangenten?

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 7$

Differentialrechnung Anfänge

In welchen Punkten besitzt die Funktion waagerechte Tangenten?

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 7$

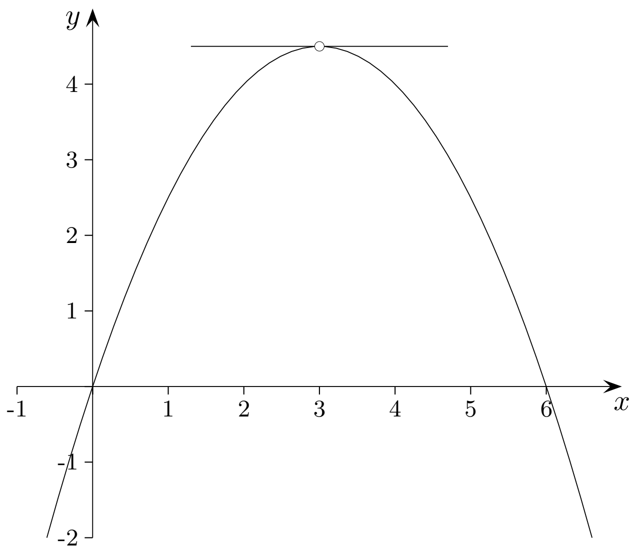
e) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

Differentialrechnung   Anfänge

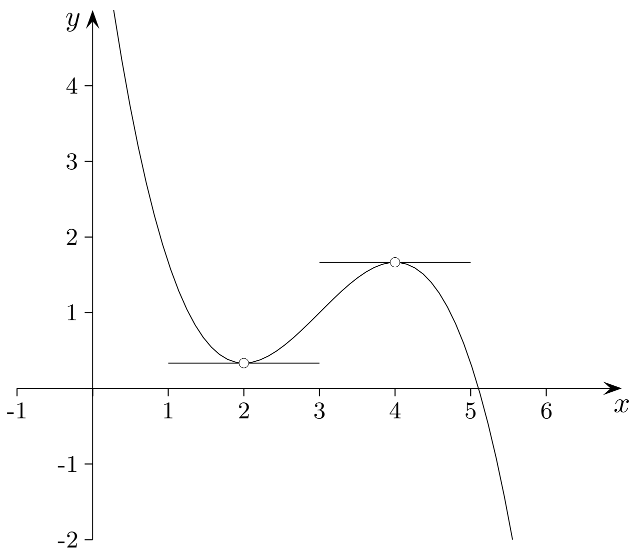
Lösungen:

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x \\ f'(x) &= -x + 3 \\ 0 &= -x + 3 \\ x &= 3 \qquad\qquad Max(\,3\,|\,4{,}5\,) \end{aligned}$$



b)
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 7 \\ f'(x) &= -x^2 + 6x - 8 \\ 0 &= -x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

$x_1 = 4,\quad x_2 = 2,\quad E_1(\,4\,|\,\frac{5}{3}\,),\quad E_2(\,2\,|\,\frac{1}{3}\,)$



c) $E_1(\,0\,|\,8\,),\quad E_2(\,2\,|\,4\,)$

d) $E_1(\,3\,|\,7\,),\quad E_2(\,1\,|\,11\,)$

e) $E_1(\,\frac{3}{2}\,|\,-\frac{27}{2}\,),\quad E_2(\,-\frac{1}{2}\,|\,\frac{5}{2}\,)$

f) $E_1(\,0\,|\,0\,),\quad E_2(\,2\,|\,-\frac{4}{3}\,)$