Kostenfunktionen

1. Ein Unternehmen stellt ein Produkt her.
   Die Produktion eines Wirtschaftsgutes verursacht Kosten.
   Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) \; = \; 512 + 0{,}44x + 0{,}005x^2$.
   Um x Einheiten des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ Geldeinheiten.

   Der Stückpreis (Preis pro Einheit) beträgt 4 Geldeinheiten.

   Die durch Verkauf zu erzielenden Gesamteinnahmen heißen Umsatz.

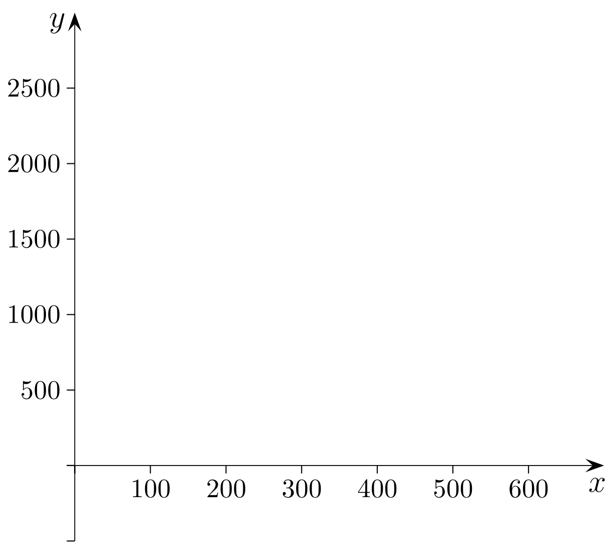
   a) Wie lautet die Umsatzfunktion $U(x)$, die jeder Produktionsmenge (Output) x den durch Verkauf zu erzielenden Umsatz zuordnet?

   b) Zeichne die Kosten- und die Umsatzfunktion in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Lies aus der Grafik ab, in welchem Bereich ein Gewinn erzielt wird.
   Errechne die Gewinnzone.

   d) Skizziere die Gewinnfunktion $G(x)$,
   die jeder Produktionsmenge x den zu erzielenden Gewinn zuordnet.

   e) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
   Wie hoch ist der Gewinn dann?



Kostenfunktionen Lösungen

1. Ein Unternehmen stellt ein Produkt her.
   Die Produktion eines Wirtschaftsgutes verursacht Kosten.
   Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) = 512 + 0{,}44x + 0{,}005x^2$.
   Um x Einheiten des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ Geldeinheiten.

   Der Stückpreis (Preis pro Einheit) beträgt 4 Geldeinheiten.

   Die durch Verkauf zu erzielenden Gesamteinnahmen heißen Umsatz.

   a) Wie lautet die Umsatzfunktion $U(x)$, die jeder Produktionsmenge (Output) x den durch Verkauf zu erzielenden Umsatz zuordnet?

   b) Zeichne die Kosten- und die Umsatzfunktion in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Lies aus der Grafik ab, in welchem Bereich ein Gewinn erzielt wird.
   Errechne die Gewinnzone.

   d) Skizziere die Gewinnfunktion $G(x)$,
   die jeder Produktionsmenge x den zu erzielenden Gewinn zuordnet.

   e) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
   Wie hoch ist der Gewinn dann?

1. a) $U(x) = 4 \cdot x$

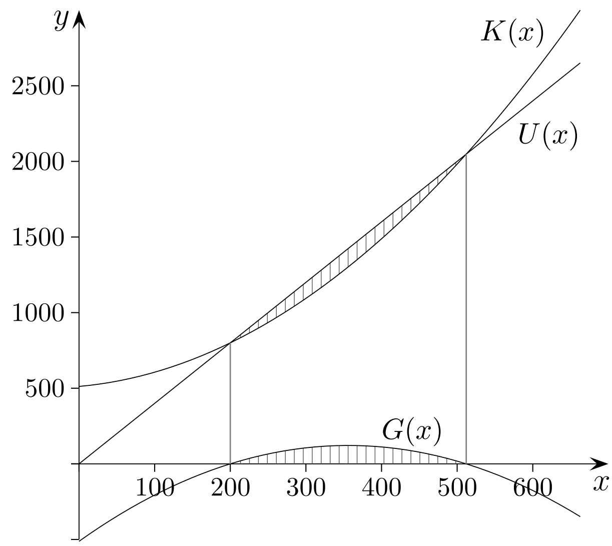
b)

Output x	*0*	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*	*600*
$K(x)$	*512*	*606*	*800*	*1094*	*1488*	*1982*	*2576*

Output x	*0*	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*	*600*
$U(x)$	*0*	*400*	*800*	*1200*	*1600*	*2000*	*2400*

c) Die Gewinnzone lautet: $[200,\ 512]$. *Hierzu ist eine quadratische Gleichung zu lösen:*

$$\begin{aligned} K(x) &= U(x) \\ 512 + 0,44x + 0,005x^2 &= 4 \cdot x \\ 0,005x^2 - 3,56x + 512 &= 0 \\ x^2 - 712x + 102400 &= 0 \end{aligned}$$



d) siehe Grafik

e) $G(x) = U(x) - K(x)$

Der Scheitel der Gewinn-Parabel lautet
$S(356 \mid 121,68),\ G(356) = 121{,}68.$

Der maximale Gewinn wird bei einem Output von 356 Einheiten erwirtschaftet, er beträgt dann 121,68 Geldeinheiten.

Anwendungen in der Betriebswirtschaftslehre

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her, z. B. Nagellack.
Ziel ist es, einen möglichst großen (maximalen) Gewinn zu erwirtschaften.
Der Gewinn ist die Differenz von Umsatz und Gesamtkosten.
Mit Umsatz werden die Einnahmen bezeichnet.
Werden $x = 5000$ Nagellack-Fläschchen zum Stückpreis $p = 4$ € verkauft,
so beträgt der Umsatz $U = 20000$ €.
Der Umsatz hängt von der Anzahl x der verkauften Produkte ab, kurz $U(x) = p \cdot x$.
Wir gehen vereinfachend davon aus, dass alle produzierten Güter verkauft werden, x ist daher auch die Anzahl der produzierten Güter.
Die Produktion eines Wirtschaftsgutes verursacht Kosten, die von x abhängig sind.

Die Gesamtkostenfunktion lautet z. B.: $K(x) = 512 + 0{,}44x + 0{,}005x^2$.

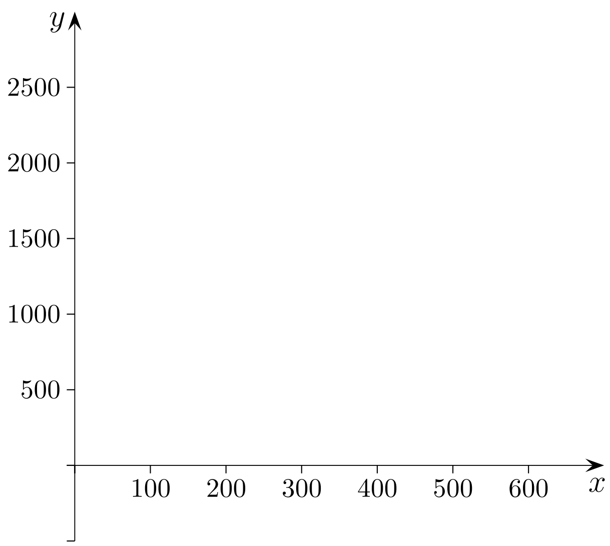
*Um x Einheiten des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ €,
allgemeiner $K(x)$ Geldeinheiten, z. B. 100 €, 1000 €.*

a) Zeichne die Graphen der Umsatz-, Gesamtkosten- und Gewinnfunktion.
Tipp: Verwende für den Graphen von $G(x) = p \cdot x - K(x)$ die Funktionsvariablen Y-VARS.

b) Ermittle mit dem GTR die Gewinnzone,
also den Bereich, in dem Gewinn erwirtschaftet wird.
$G(x)$ kann auch negativ werden, dann liegt Verlust vor.

c) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
Wie hoch ist der Gewinn dann?

d) Errechne algebraisch die Gewinnzone.



Ein Unternehmen stellt ein Produkt her.
Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) = 0{,}008x^2 + 2{,}8x + 1300$,
der Stückpreis beträgt $p = 10$ Geldeinheiten.

a) Zeichne die Graphen der Umsatz-, Gesamtkosten- und Gewinnfunktion.
Tipp: Verwende für den Graphen von $G(x)$ die Funktionsvariablen Y-VARS.

b) Ermittle mit dem GTR die Gewinnzone.

c) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
Wie hoch ist der Gewinn dann?

d) Errechne algebraisch die Gewinnzone.

e) Bei welchem Output (Ausbringung) sind die Stückkosten minimal?
Tipp: Verwende für den Graphen der Stückkostenfunktion ein neues Koordinatensystem.

Funktionsgraphen

Y= WINDOW GRAPH

1. Funktionsterm (Y=) eingeben,
2. Einstellungen vornehmen:
   Bereiche auf der x- und y-Achse wählen,
   einen Überblick verschafft hierfür TABLE,
   Schrittweite der Ticks mit Xscl und Yscl festlegen,
3. mit GRAPH zeichnen, nützlich: TRACE

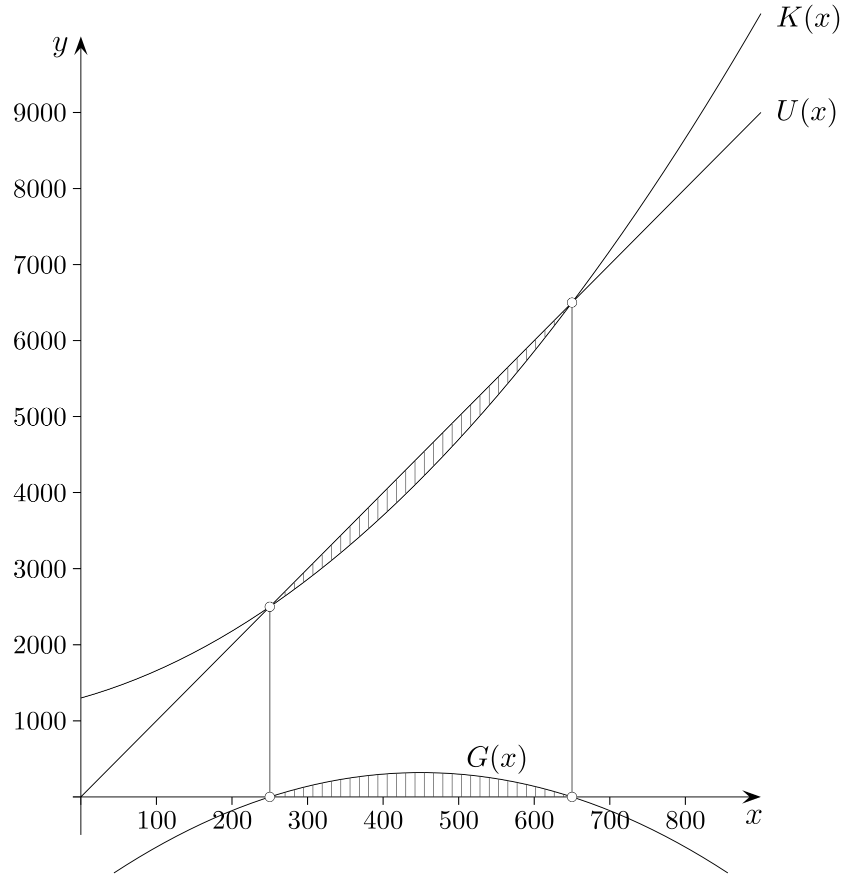
Darstellung ändern: Cursor auf \ von \Y1= , ENTER
Bei mehreren Funktionen kann eine Auswahl getroffen werden:
Cursor auf = von \Y1= (oder \Y2=), ENTER,
unverzerrte Darstellung mit: ZOOM | 5: ZSquare.

Nullstellen,
Schnittstellen, Min./Max.,
Funktionswerte

Im Menü 2nd CALC ist alles Notwendige zu finden.
Die linke und rechte Grenze müssen eingegeben werden.
Zu gegebenem x-Wert ist der y-Wert mit value zu berechnen.

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her.
Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) = 0{,}008x^2 + 2{,}8x + 1300$,
der Stückpreis beträgt $p = 10$ Geldeinheiten.

a) Zeichne die Graphen der Umsatz-, Gesamtkosten- und Gewinnfunktion.
Tipp: Verwende für den Graphen von $G(x)$ die Funktionsvariablen Y-VARS.



b) Ermittle mit dem GTR die Gewinnzone. [250, 650]

c) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
Wie hoch ist der Gewinn dann?

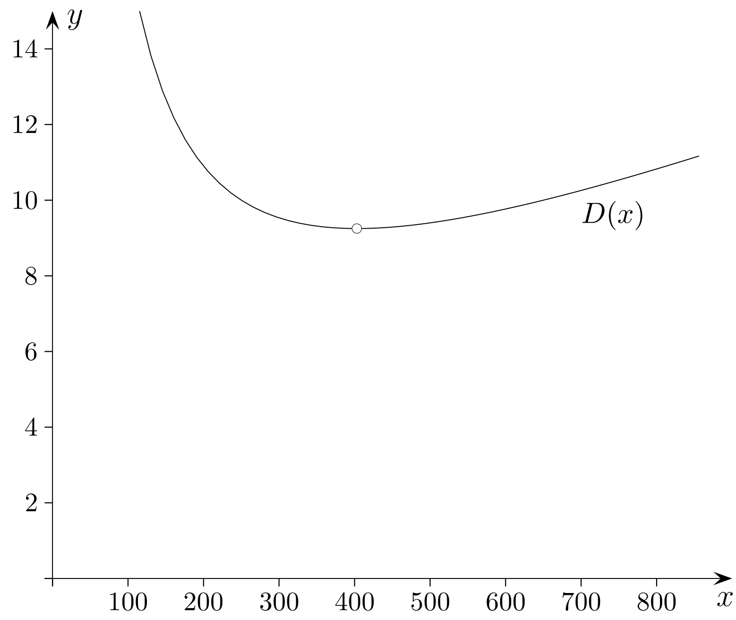
Der maximale Gewinn von 320 Geldeinheiten wird bei einem Output von 450 Einheiten erwirtschaftet.

d) Errechne algebraisch die Gewinnzone. $U(x) = G(x)$

e) Bei welchem Output (Ausbringung) sind die Stückkosten minimal?

Die Stückkosten $D(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ sind an der Stelle $x = 403$ (gerundet) minimal, sie betragen dann 9,25 Geldeinheiten.

Stückkostenfunktion

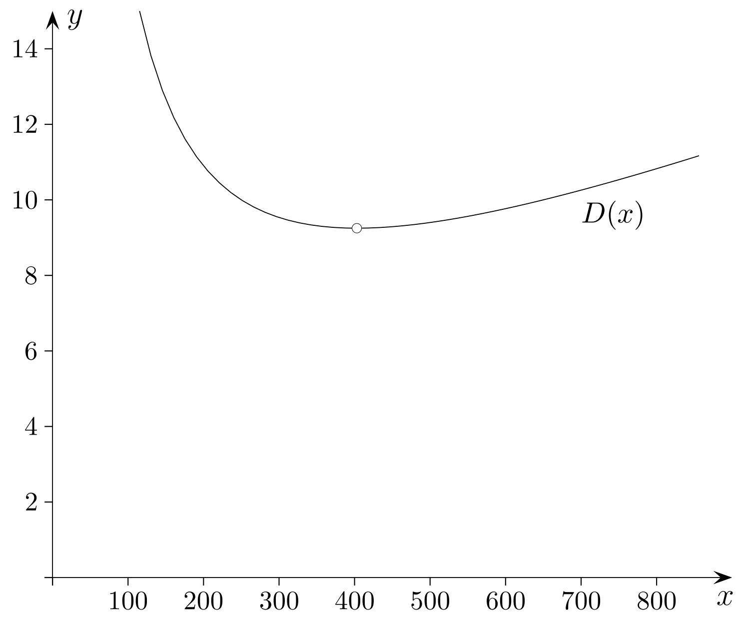


$$D(x) = \frac{0{,}008x^2 + 2{,}8x + 1300}{x}$$

Fülle die Tabelle aus und interpretiere sie.

x	250	300	350	403	450	500	550	600	650
$D(x)$									

Stückkostenfunktion



$$D(x) = \frac{0{,}008x^2 + 2{,}8x + 1300}{x}$$

Fülle die Tabelle aus und interpretiere sie.

x	250	300	350	403	450	500	550	600	650
$D(x)$	10,00	9,53	9,31	9,25	9,29	9,40	9,56	9,77	10,00

Die Gewinnzone lautet: [250, 650]
An ihren Grenzen stimmen Stückkosten und Stückpreis überein, der Gewinn ist Null.
Minimale Stückkosten liegen an der Stelle $x = 403$ vor.
Wenn mehr produziert und verkauft wird, steigen zwar die Stückkosten, der Gewinn pro Stück verringert sich damit, jedoch kann der Gesamtgewinn noch erhöht werden, bis zu der Stelle $x = 450$, an der der maximale Gewinn erwirtschaftet wird.

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her.
Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) = 500 + 7x + 0{,}01x^2$.
Der Stückpreis beträgt 13 €.
Die Kapazitätsgrenze liegt bei 600 Stück. Mehr kann nicht produziert werden.

a) Wie lautet die Gewinnzone? (grafische und algebraische Lösung)

b) Bei welcher Ausbringung ist der Gewinn maximal und wie groß ist er dann?

c) Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal?

d) Aufgrund äußerer Umstände ist das Unternehmen gezwungen, 400 Einheiten zu produzieren. Der Stückpreis fällt auf 12,50 €. Kann nun noch ein Gewinn erzielt werden? (Eine genaue Begründung ist erforderlich.)

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her.
Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) = 500 + 7x + 0{,}01x^2$.
Der Stückpreis beträgt 13 €.
Die Kapazitätsgrenze liegt bei 600 Stück.

a) Wie lautet die Gewinnzone? (grafische und algebraische Lösung) $[100, 500]$

b) Bei welcher Produktionsmenge ist der Gewinn maximal und wie groß ist er dann?
$G(300) = 400$ €

c) Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal? $D(223,61) = 11{,}47$ €

d) Aufgrund äußerer Umstände ist das Unternehmen gezwungen, 400 Einheiten zu produzieren. Der Stückpreis fällt auf 12,50 €. Kann nun noch ein Gewinn erzielt werden?
(Eine genaue Begründung ist erforderlich.)

$$D(400) = \frac{K(400)}{400} = 12{,}25\text{ €}$$

Gewinn $0{,}25 \cdot 400$ €