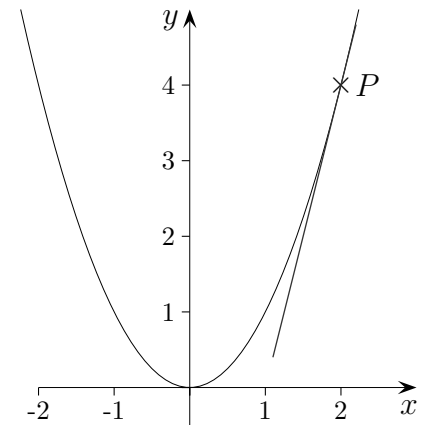


Tangentengleichung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2 | ?)$.



Um die Tangentengleichung $y = mx + b$ für den Punkt P aufstellen zu können, benötigen wir neben der x -Koordinate auch die y -Koordinate von P , sowie die Steigung m der Tangente in diesem Punkt. Die y -Koordinate ergibt sich stets durch Einsetzen der x -Koordinate in die Funktionsgleichung von f :

$$y = f(2) = 4, \text{ also } P(2 | 4).$$

Die Tangentensteigung m erhalten wir, indem wir die x -Koordinate von P in die 1. Ableitung von f einsetzen:

$$f'(x) = 2x, \text{ damit ergibt sich: } m = f'(2) = 4.$$

Wir erhalten zunächst: $y = 4x + b$.

Um b zu bestimmen, setzen wir die x - und die y -Koordinate des Punktes $P(2 | 4)$ in die Geradengleichung ein und lösen nach b auf.

$$\begin{aligned} y &= 4x + b \\ 4 &= 4 \cdot 2 + b \\ 4 &= 8 + b \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt das die Tangentengleichung: $y = 4x - 4$.

Eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + b$ besteht bekanntlich aus allen Punkten $P(x | y)$, deren x - und y -Koordinate die Gleichung erfüllen. Weil $P(2 | 4)$ auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung.

Zur weiteren Übung:

Stelle die Tangentengleichungen für die Punkte A und B auf:

a) $f(x) = x^3 - 2x$ $A(3 | ?)$ $B(\frac{1}{2} | ?)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$ $A(-1 | ?)$ $B(-\frac{1}{2} | ?)$

c) $f(x) = x^2 - 4x$ $A(a | ?)$ $B(-2a | ?)$

Tangentengleichung

Lösungen:

a) $A(3 \mid 21) \quad y = 25x - 54$

$B\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{7}{8}\right) \quad y = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$

b) $A\left(-1 \mid -\frac{5}{2}\right) \quad y = x - \frac{3}{2}$

$B\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{47}{32}\right) \quad y = \frac{11}{4}x - \frac{3}{32}$

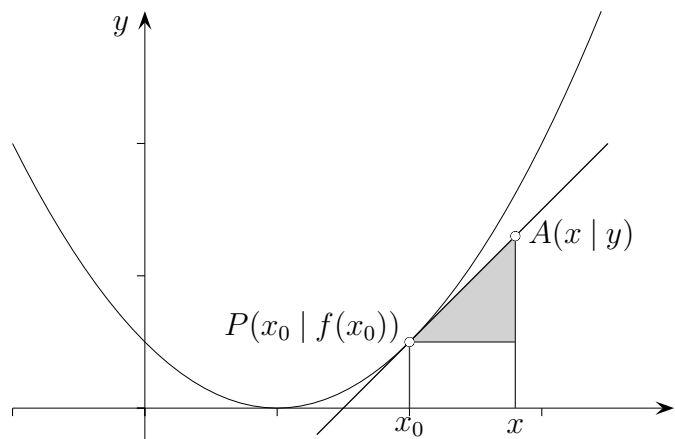
c) $A(a \mid a^2 - 4a) \quad y = (2a - 4)x - a^2$

$B(-2a \mid 4a^2 + 8a)$
 $y = (-4a - 4)x - 4a^2$

Tangentengleichung Punktsteigungsform

Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

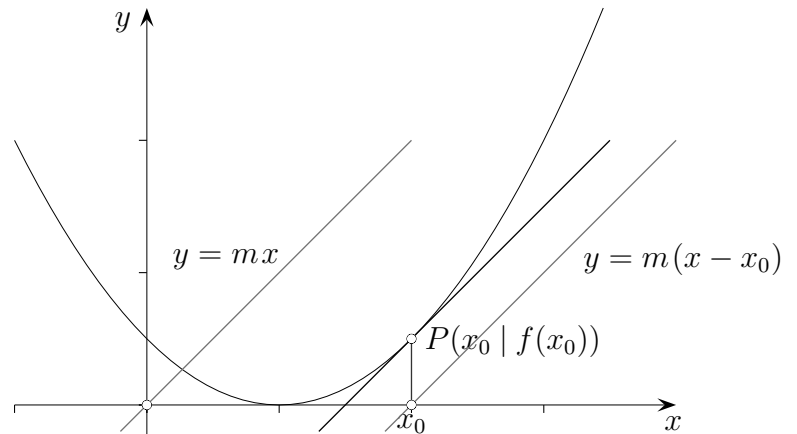


Die Tangentengleichung kann der Zeichnung unmittelbar entnommen werden.
Beachte hierzu lediglich:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangentengleichung Punktsteigungsform

Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ kann unmittelbar angegeben werden.



Die Steigung an der Stelle x_0 beträgt $m = f'(x_0)$.

Die Gleichung der Ursprungsgeraden mit dieser Steigung lautet: $y = f'(x_0)x$.

Diese Gerade nach P verschoben ergibt die Tangente mit der Gleichung:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt A ?

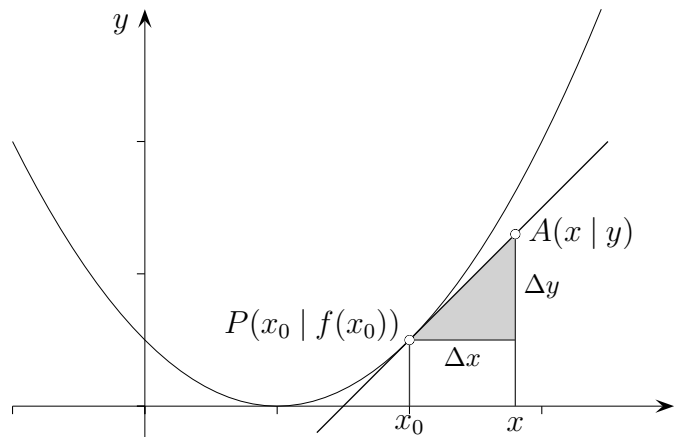
a) $f(x) = x^3 - 2x$ $A(3 | ?)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$ $A(-1 | ?)$

c) $f(x) = x^2 - 4x$ $A(a | ?)$

Tangentengleichung Punktsteigungsform

Welche Beziehung besteht zwischen x und y eines Punkts $A(x | y)$ auf der Tangente?



$$\begin{aligned}\Delta y &= f'(x_0) \cdot \Delta x \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0)\end{aligned}$$

$$y = \Delta y + f(x_0)$$

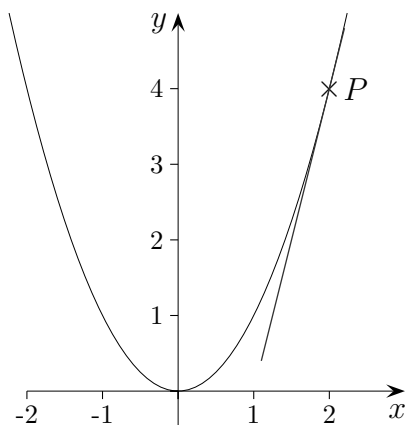
Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Tangentengleichung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2 | ?)$.



Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

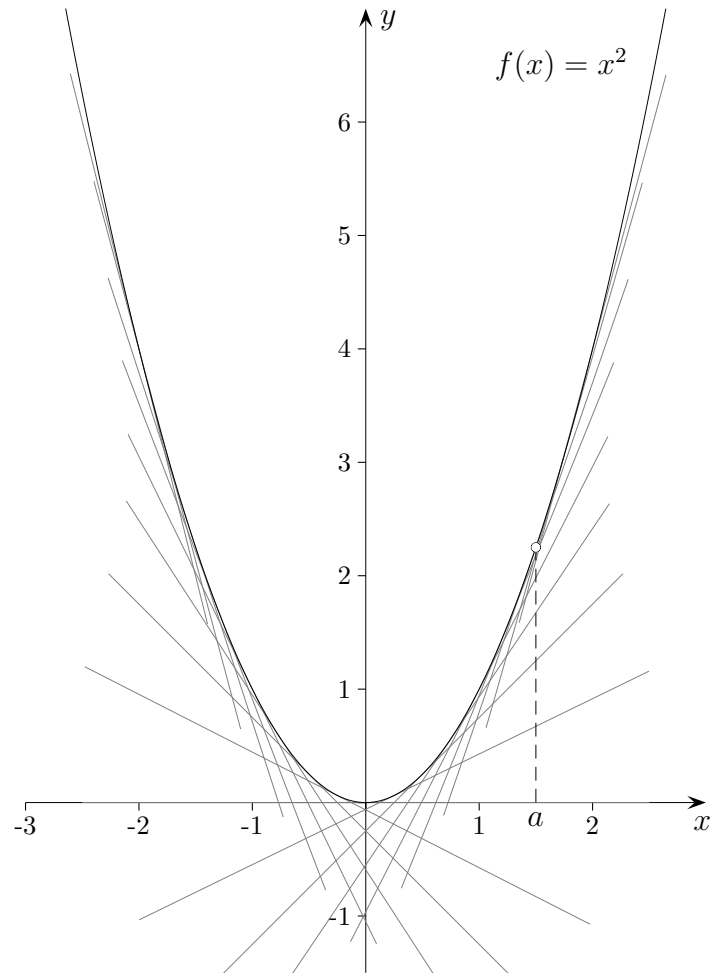
Herleitung:

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot x + b \\ \implies f(x_0) &= f'(x_0) \cdot x_0 + b \\ \implies b &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{aligned}$$

b eingesetzt ergibt:

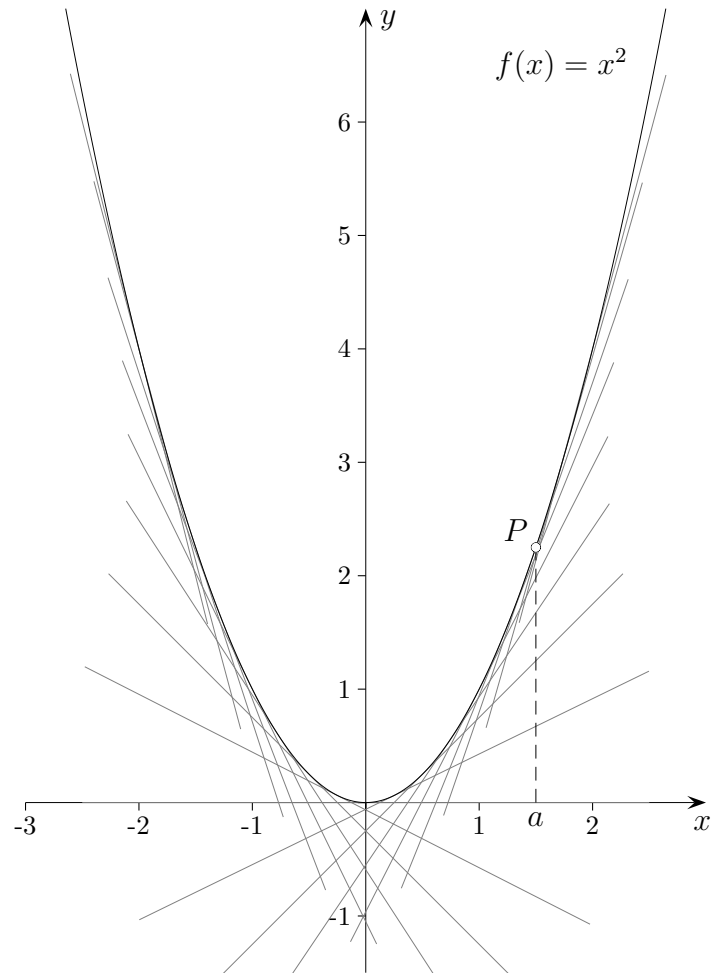
$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ y &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

Tangentenschar



Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a ?

Tangentenschar

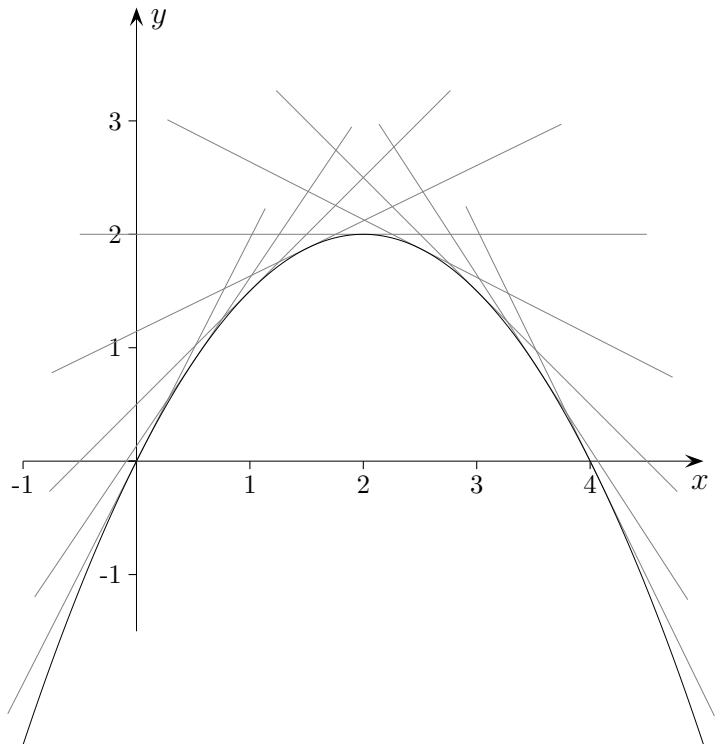


Wie lautet die Gleichung der Tangentschar t_a ?

Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(a \mid a^2)$ lautet:

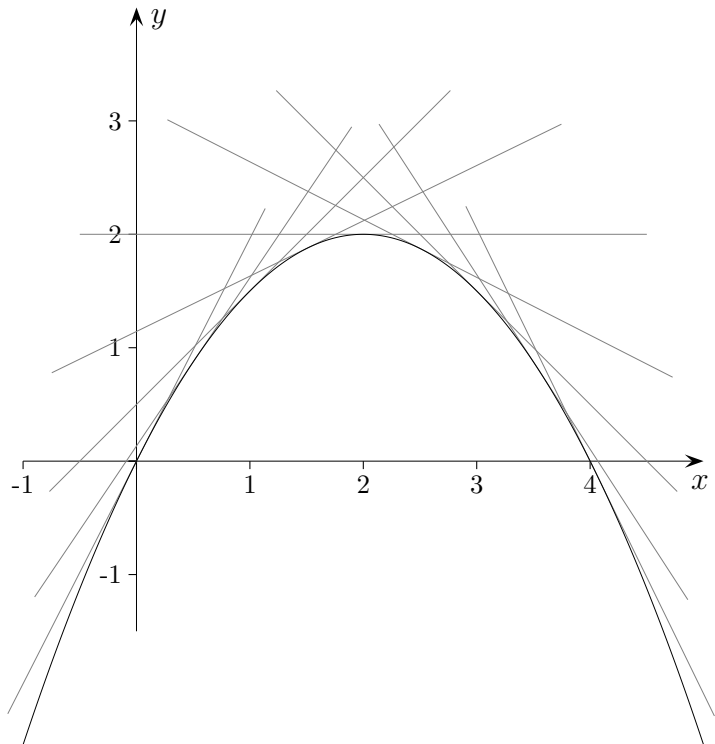
$$\begin{aligned} t_a(x) &= f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ &= 2a \cdot (x - a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

Tangentenschar



Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a ?
Die Parabelgleichung ist nicht gegeben.

Tangentenschar



Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a ?
Die Parabelgleichung ist nicht gegeben.

$f(x) = -\frac{1}{2}x(x - 4)$ Beachte die Nullstellen und das Maximum, $f(x) = kx(x - 4)$, $f(2) = 2$.

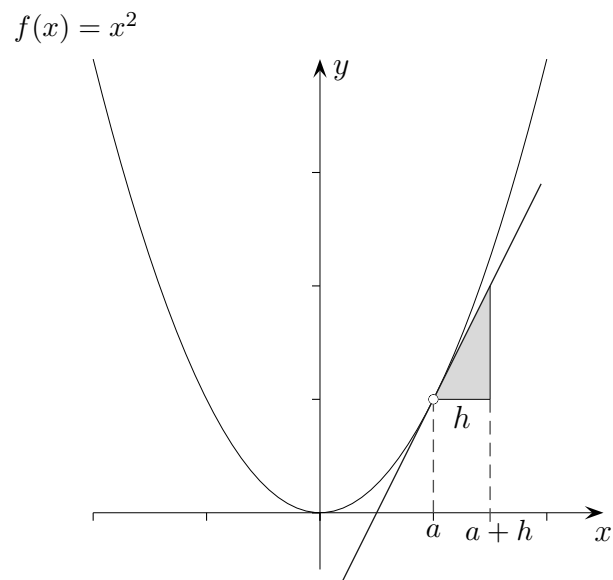
Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(a | f(a))$ lautet:

$$\begin{aligned} t_a(x) &= f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ &= \dots \\ &= (2 - a)x + \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Welche Tangenten verlaufen durch $A(3 | 2)$?

$$a_1 = 2, a_2 = 4$$

ohne Differenzialrechnung



Erläutere:

$$f(x) = f(a + \underbrace{(x - a)}_h) = a^2 + 2a(x - a) + (x - a)^2$$