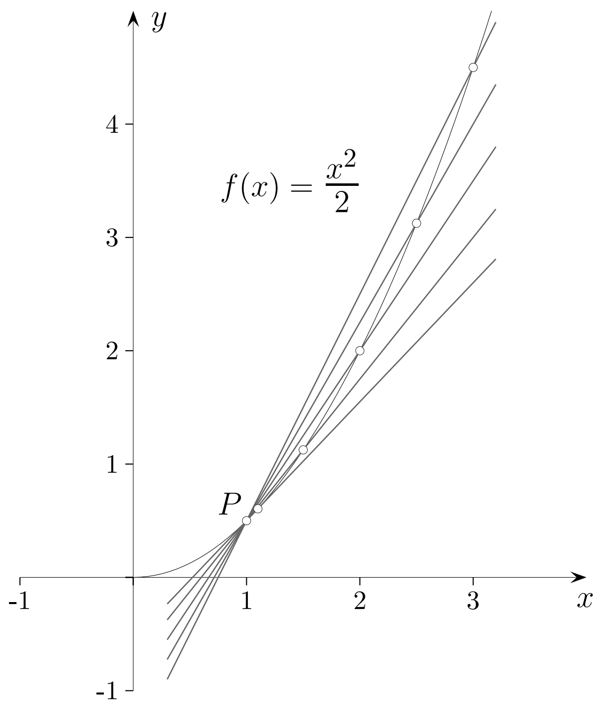
Tangentenproblem

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(1 \mid 0{,}5)$ zu ermitteln, wählen wir eine Folge von Punkten, die sich von oben dem Punkt P nähern und bestimmen zu jedem Punkt die zugehörige Sekantensteigung:

$Q_1(3 \mid 4{,}5)$	$m_1 = 2$
$Q_2(2{,}5 \mid ?)$	$m_2 = ?$
$Q_3(2 \mid ?)$	$m_3 = ?$
$Q_4(1{,}5 \mid ?)$	$m_4 = ?$
$Q_5(1{,}1 \mid ?)$	$m_5 = ?$
$Q_6(1{,}01 \mid ?)$	$m_6 = ?$



Rechnung für Q_1

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4{,}5 - 0{,}5}{3 - 1} = 2$$

Wir vermuten, dass die Tangentensteigung 1 beträgt. Um diese Vermutung zu untermauern, wählen wir eine zweite Folge von Punkten, die sich von unten dem Punkt P nähern, wieder bestimmen wir die Sekantensteigungen:

$R_1(0{,}5 \mid 0{,}125)$	$m_1^\star = 0{,}75$
$R_2(0{,}9 \mid ?)$	$m_2^\star = ?$
$R_3(0{,}99 \mid ?)$	$m_3^\star = ?$
$R_4(0{,}999 \mid ?)$	$m_4^\star = ?$

Die Tangentensteigung ist kleiner als jedes Folgenglied m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, ... und größer als $m_1^\star$, $m_2^\star$, $m_3^\star$, $m_4^\star$, ...

Es gibt nur eine Zahl, die dies erfüllt, nämlich 1.

$$m_{\text{ Tangente}} = 1$$

Im nachhinein ist ersichtlich, dass eine einzige Folge von Punkten, die sich P nähern, ausgereicht hätte, um die Tangentensteigung zu erkennen.

Tangentenproblem

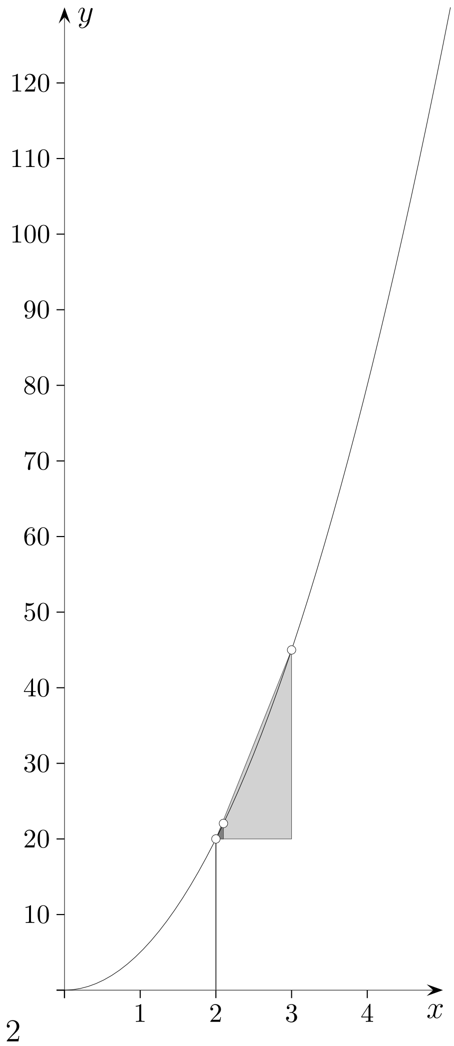
$Q_1(3 \mid 4{,}5)$	$m_1 = 2$
$Q_2(2{,}5 \mid 3{,}125)$	$m_2 = 1{,}75$
$Q_3(2 \mid 2)$	$m_3 = 1{,}5$
$Q_4(1{,}5 \mid 1{,}125)$	$m_4 = 1{,}25$
$Q_5(1{,}1 \mid 0{,}605)$	$m_5 = 1{,}05$
$Q_6(1{,}01 \mid 0{,}51005)$	$m_6 = 1{,}005$

$R_1(0{,}5 \mid 0{,}125)$	$m_1^\star = 0{,}75$
$R_2(0{,}9 \mid 0{,}405)$	$m_2^\star = 0{,}95$
$R_3(0{,}99 \mid 0{,}49005)$	$m_3^\star = 0{,}995$
$R_4(0{,}999 \mid 0{,}4990005)$	$m_4^\star = 0{,}9995$

Geschwindigkeit

Wir stellen uns vor, einen Stein von einem hohen Gebäude fallen zu lassen und interessieren uns für den Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und zurückgelegter Fallstrecke y (in Metern). Die Tabelle enthält mögliche Messwerte.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	20	45	80	125



Um die Beziehung von x und y aufzudecken, teilen wir die y-Werte durch 5.

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{y}{5}$	0	1	4	9	16	25

Nun können wir erkennen, dass stets gilt:

$$\frac{y}{5} = x^2$$

$$y = 5x^2$$

Der Graph veranschaulicht den Zusammenhang.

Wir wenden uns nun der Frage zu:
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Steins zur Zeit (z. B.) $x = 2$?
Es scheint offensichtlich, dass zu jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit vorliegt, andererseits verstehen wir unter der Geschwindigkeit v den Quotienten von zurückgelegtem Weg und verstrichener Zeit. Für eine Berechnung ist daher neben $x = 2$ ein weiterer Zeitpunkt erforderlich. Das Problem ist, dass die so ermittelte Geschwindigkeit von der Wahl des zweiten Zeitpunkts abhängt. Fülle die Tabelle aus.

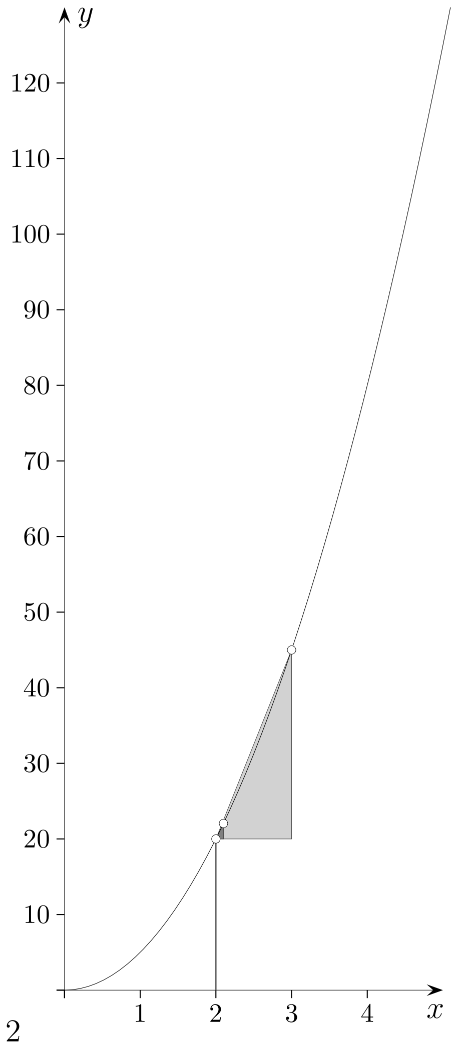
x	2	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
$y = 5x^2$	20	45					20,0002000005
v		25					

Erläutere, was unter der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = 2$ sinnvollerweise zu verstehen ist. Was sagt die so verstandene Geschwindigkeit über den Bewegungsvorgang aus? Verallgemeinere diese Überlegungen.

Geschwindigkeit

Wir stellen uns vor, einen Stein von einem hohen Gebäude fallen zu lassen und interessieren uns für den Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und zurückgelegter Fallstrecke y (in Metern). Die Tabelle enthält mögliche Messwerte.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	20	45	80	125



Um die Beziehung von x und y aufzudecken, teilen wir die y-Werte durch 5.

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{y}{5}$	0	1	4	9	16	25

Nun können wir erkennen, dass stets gilt:

$$\frac{y}{5} = x^2$$
$$y = 5x^2$$

Der Graph veranschaulicht den Zusammenhang.

Wir wenden uns nun der Frage zu:
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Steins zur Zeit (z. B.) $x = 2$?
Es scheint offensichtlich, dass zu jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit vorliegt, andererseits verstehen wir unter der Geschwindigkeit v den Quotienten von zurückgelegtem Weg und verstrichener Zeit. Für eine Berechnung ist daher neben $x = 2$ ein weiterer Zeitpunkt erforderlich. Das Problem ist, dass die so ermittelte Geschwindigkeit von der Wahl des zweiten Zeitpunkts abhängt. Die folgende Tabelle verdeutlicht dies.

x	2	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
$y = 5x^2$	20	45	22,05	20,2005	20,020005	20,00200005	20,0002000005
$v = \frac{y-20}{x-2}$		25	20,5	20,05	20,005	20,0005	20,00005

Erläutere, was unter der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = 2$ sinnvollerweise zu verstehen ist.
Was sagt die so verstandene Geschwindigkeit über den Bewegungsvorgang aus?
Verallgemeinere diese Überlegungen.