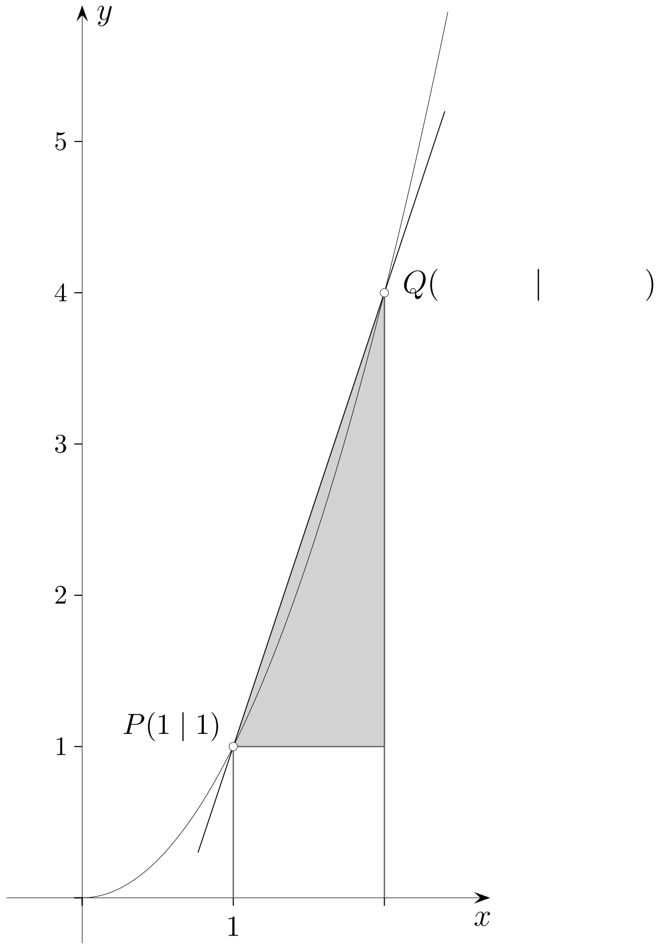
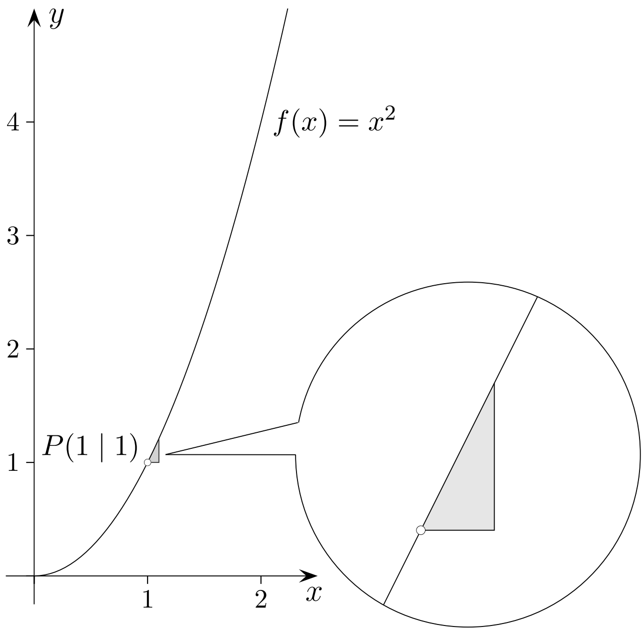
Tangentensteigung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(1 \mid 1)$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung der Sekante durch $P(1 \mid 1)$ und $Q(\qquad \mid \qquad)$.
Q soll so beweglich sein, dass er sich auf dem Graphen in Richtung P verschieben lässt.



Mit der Lupe betrachtet

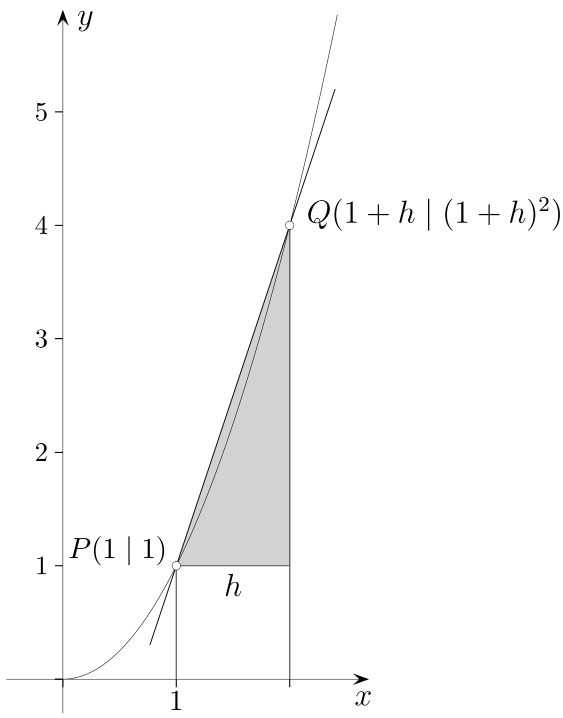


h-Methode

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(1 \mid 1)$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung der Sekante durch $P(1 \mid 1)$ und $Q(1+h \mid (1+h)^2)$.

$$\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\
&= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\
&= \frac{2h + h^2}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= 2 + h \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h \to 0} (2 + h) \; = \; 2
\end{aligned}$$



Begründung für den letzten Schritt:
Je kleiner h ist, umso besser approximiert die Sekantensteigung die Tangentensteigung. Um dieses zu verdeutlichen, wählen wir für h Werte, die gegen null streben und betrachten die Sekantensteigungen:

$h_1 = 0{,}1$	$m_1 = 2{,}1$
$h_2 = 0{,}01$	$m_2 = 2{,}01$
$h_3 = 0{,}001$	$m_3 = 2{,}001$
$h_4 = 0{,}0001$	$m_4 = 2{,}0001$
$h_5 = 0{,}00001$	$m_5 = 2{,}00001$
$\vdots$	$\vdots$

Die Folge der Sekantensteigungen strebt (monoton fallend, d.h. die Folgenglieder werden immer kleiner) gegen den Wert 2,0000 ..., also 2. Der Grenzwert (Limes) beträgt 2.

Intervallschachtelung

Wir gehen der Frage nach, wie man aufgrund von Näherungen
zu einem exakten Ergebnis gelangen kann.

Welches a ist hier nur möglich?

a)

$$\begin{array}{rcccl} 1{,}7 & < & a & < & 2{,}4 \\ 1{,}97 & < & a & < & 2{,}04 \\ 1{,}997 & < & a & < & 2{,}004 \\ 1{,}9997 & < & a & < & 2{,}0004 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcccl} -0{,}5 & < & a & < & 0{,}4 \\ -0{,}04 & < & a & < & 0{,}05 \\ -0{,}005 & < & a & < & 0{,}004 \\ -0{,}0004 & < & a & < & 0{,}0005 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcccl} -\frac{1}{2} & < & a & < & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & < & a & < & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & < & a & < & \frac{1}{7} \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Um zu erkennen, auf welchen Wert sich eine Intervallschachtelung zusammenzieht,
reicht die Kenntnis der rechten (bzw. linken) Intervallgrenzen aus.

Sprechweisen:

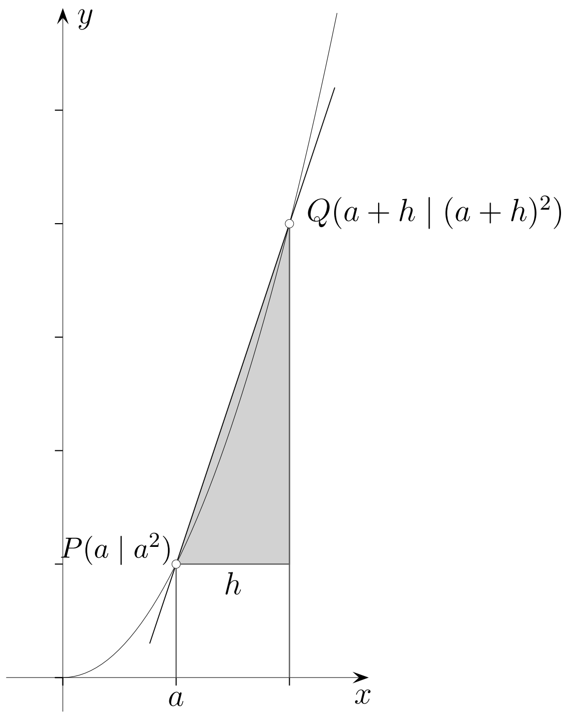
Die Folge (der Intervallgrenzen) strebt gegen a,
die Folge konvergiert gegen a,
der Grenzwert ist a,
der Limes ist a,
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Tangentensteigung h-Methode

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

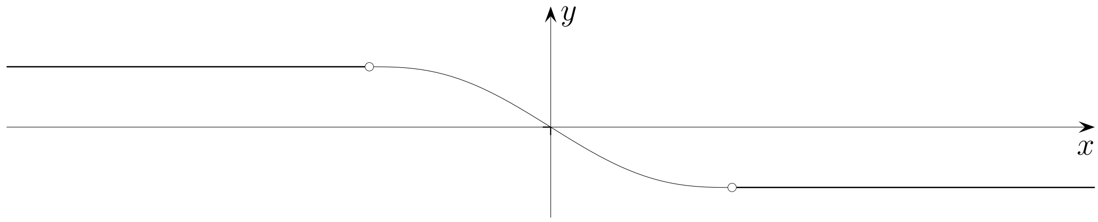
Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(a \mid a^2)$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung der Sekante durch $P(a \mid a^2)$ und $Q(a+h \mid (a+h)^2)$.

$$
\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{2ah + h^2}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= 2a + h \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h \to 0} (2a + h) \;=\; 2a
\end{aligned}
$$

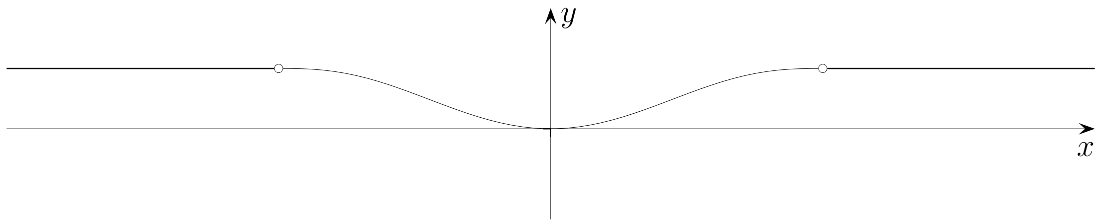


Ableitungsfunktion f'

a) Zwei geradlinig verlaufende Straßenabschnitte unterschiedlicher Höhe werden durch eine Kurve verbunden. Skizziere die Ableitungsfunktion.
Diese Funktion gibt an jeder Stelle x die Steigung (d. h. Tangentensteigung) der Kurve an.

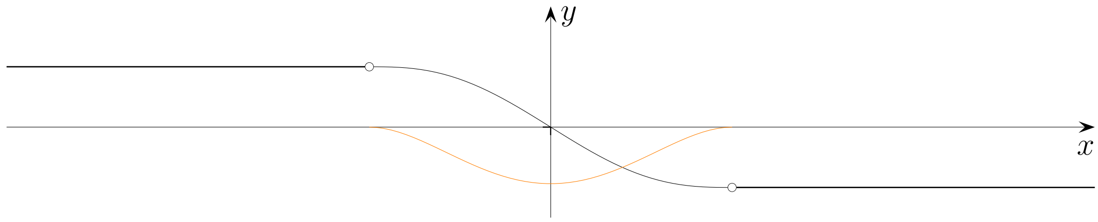


b) Skizziere für diesen Kurvenverlauf die Ableitungsfunktion.

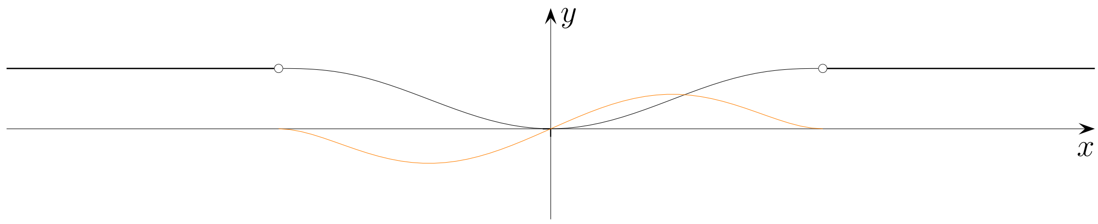


Ableitungsfunktion f'

a) Zwei geradlinig verlaufende Straßenabschnitte unterschiedlicher Höhe werden durch eine Kurve verbunden. Skizziere die Ableitungsfunktion.
Diese Funktion gibt an jeder Stelle x die Steigung (d. h. Tangentensteigung) der Kurve an.



b) Skizziere für diesen Kurvenverlauf die Ableitungsfunktion.

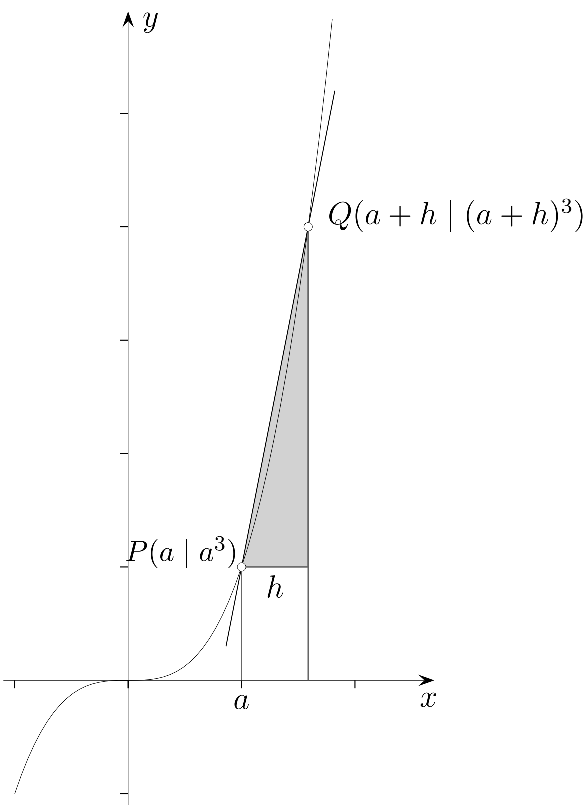


Tangentensteigung $\quad h$-Methode

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(a \mid a^3)$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung der Sekante durch $P(a \mid a^3)$ und $Q(a+h \mid (a+h)^3)$.

$$\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\
&= \frac{(a+h)(a+h)(a+h) - a^3}{h} \\
&= \frac{(a^3 + 3a^2h + \ldots h^2 + h^3) - a^3}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= 3a^2 + \ldots h + h^2 \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h \to 0} (3a^2 + \ldots h + h^2) \; = \; 3a^2
\end{aligned}$$

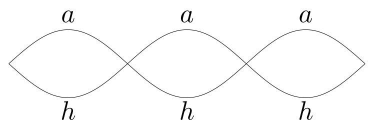


$(a+h)^3 = (a+h)(a+h)(a+h) = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$

Vereinfachung

$(a + h)^3 = (a + h)(a + h)(a + h) = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$

Es ist nicht erforderlich, die Klammern aufzulösen.
Wie kann der wesentliche Term $3a^2h$ ermittelt werden?



Die Produkte, die beim Ausmultiplizieren entstehen, entsprechen den Pfaden.
Aus jeder Klammer von $(a + h)(a + h)(a + h)$ wird a oder h ausgewählt.
a^3 entspricht dem Pfad aaa.
Zu $3a^2h$ (nur ein h!) gibt es die Pfade aah, aha und haa.

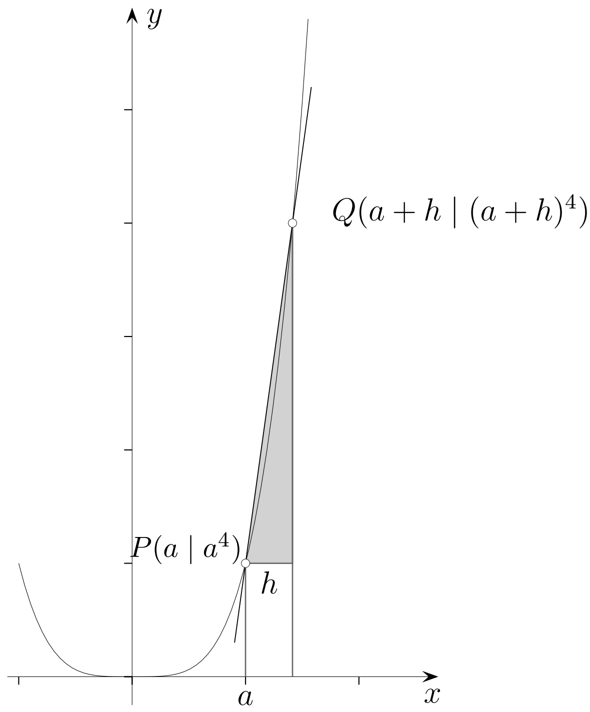
Wie lautet für $(a + h)^4$ der Term, der nur ein h enthält,
und wie der für $(a + h)^5$?

Tangentensteigung h-Methode

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(a \mid a^4)$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung der Sekante durch $P(a \mid a^4)$ und $Q(a+h \mid (a+h)^4)$.

$$\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{(a+h)^4 - a^4}{h} \\
&= \frac{(a+h)(a+h)(a+h)(a+h) - a^4}{h} \\
&= \frac{(a^4 + 4a^3h + \ldots h^2 + \ldots h^3 + h^4) - a^4}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= 4a^3 + \ldots h + \ldots h^2 + h^3 \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h \to 0} (4a^3 + \ldots h + \ldots h^2 + h^3) \ = \ 4a^3
\end{aligned}$$

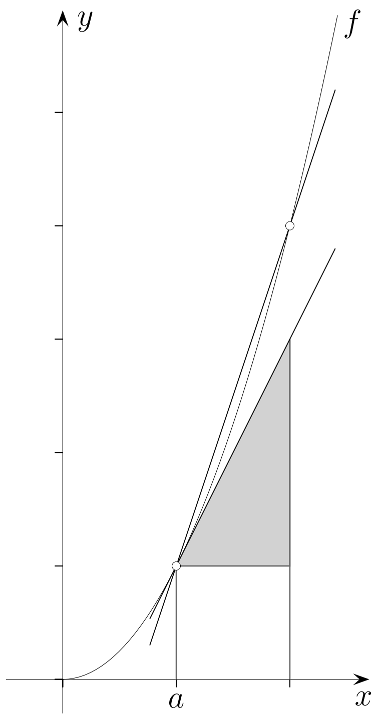


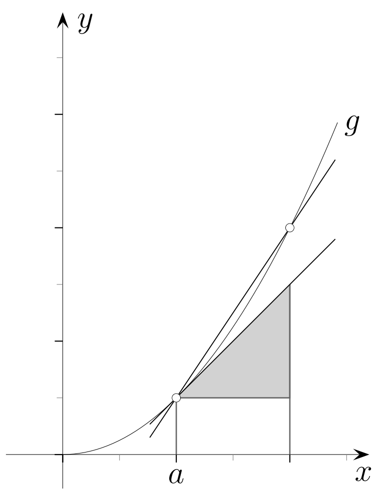
$(a+h)^4 = a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4$

Faktorregel

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Steigungen?
Verallgemeinere diesen.





Leite ab.

a) $f(x) = -5x^2$

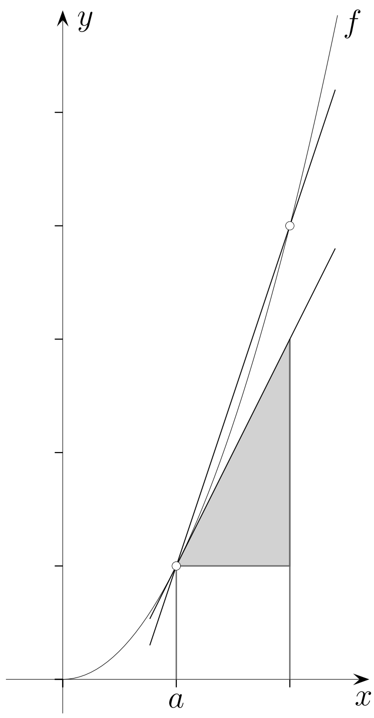
b) $f(x) = x \cdot x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$

Faktorregel

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

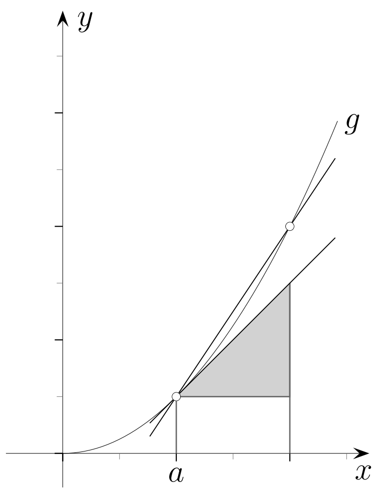
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Steigungen?
Verallgemeinere diesen.



Der Graph von f wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Achsenrichtung gestaucht.
Die Steigung an der Stelle a halbiert sich.

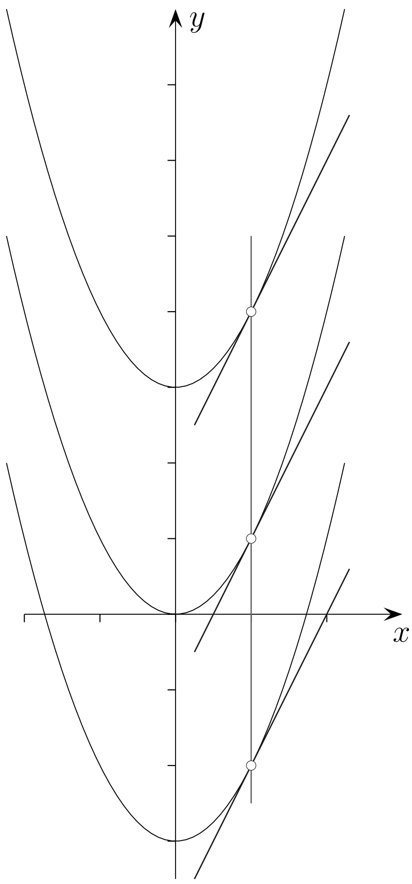
$$f'(x) = 2x$$
$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

$$g(x) = k\,f(x)$$
$$g'(x) = k\,f'(x)$$



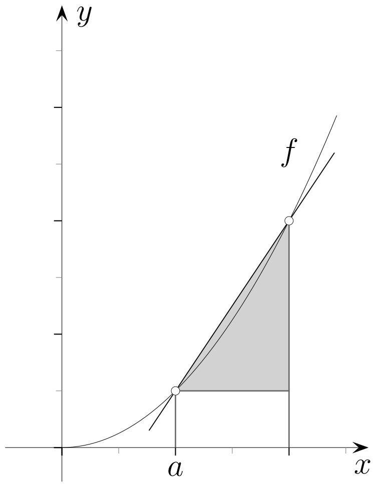
Zahl als Summand

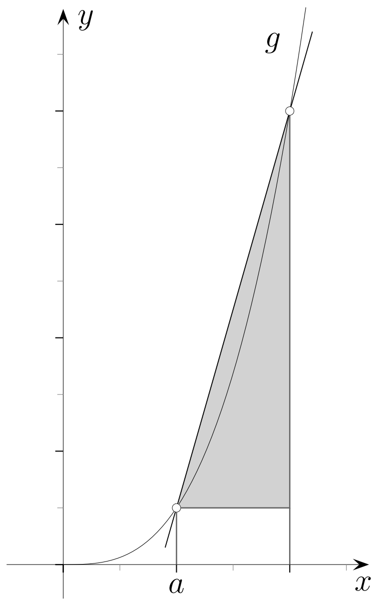
$f(x) = x^2 + 3$
$f'(x) = ?$
Welches Schicksal widerfährt dem konstanten Summanden?

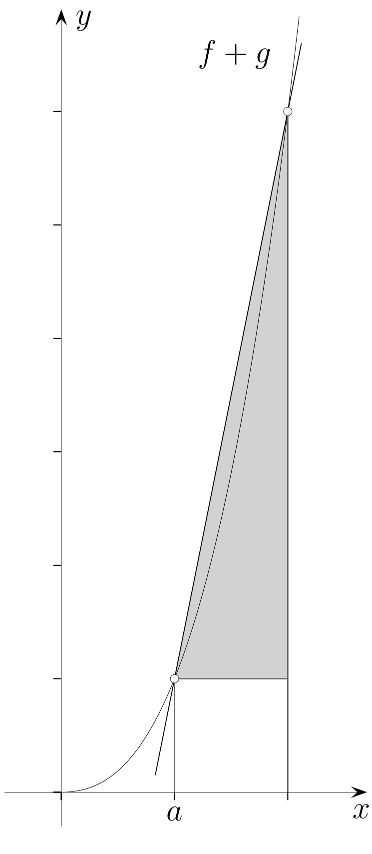


Summenregel

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ und $k(x) = f(x) + g(x)$.
Wie lautet $k'(x)$? Verallgemeiner dies.







Leite ab.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

b) $f(x) = x^2 + x - 6$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$

Die Ableitung f' kann z. B. mit (Y1 = $f(x)$)
Y2 = nDeriv(Y1, X, X) gezeichnet werden.

Steigung an einer Stelle mit dem GTR:
MATH | 8: nDeriv aufrufen
(derivation, Ableitung).
nDeriv(*Funktionsterm oder z.B. Y1, X, Stelle*), X ist der Variablenname.

Quintessenz

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

Zahl als Summand fällt raus.

Faktorregel: Zahl als Faktor bleibt erhalten.

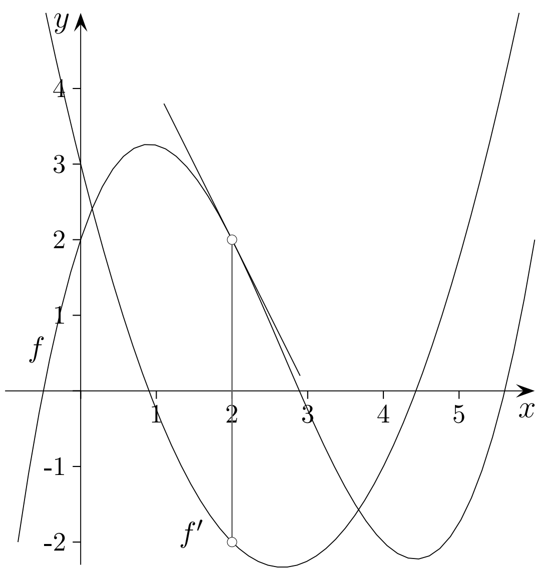
Potenzregel:
$f(x) = x^n$
$f'(x) = n\,x^{n-1}$

Ableitung (Steigung) $m = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3$$

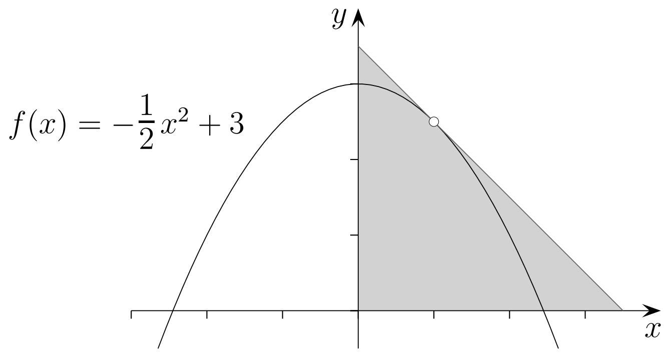
Diese Zeile wird übersprungen.

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 4x + 3$$

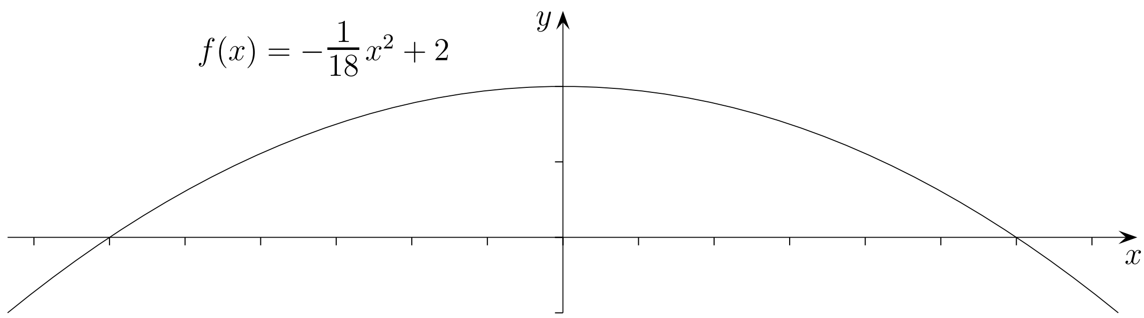


Die Ableitung f' gibt für jede Stelle a die Steigung m der Tangente
im Punkt $P(a \mid f(a))$ an, es ist $m = f'(a)$.
Das Vorzeichen von $f'(a)$ gibt Auskunft über das Steigen und Fallen von f.

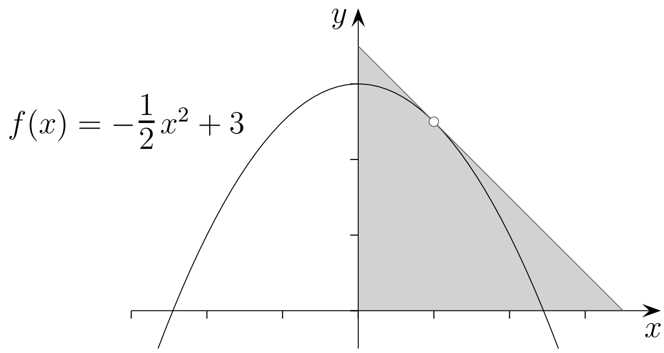
1. Wie groß ist die Fläche, die die Tangente an der Stelle $x = 1$ mit den Koordinatenachsen einschließt?



2. Welcher max. Steigungswinkel muss beim Fahren über den Hügel bewältigt werden?



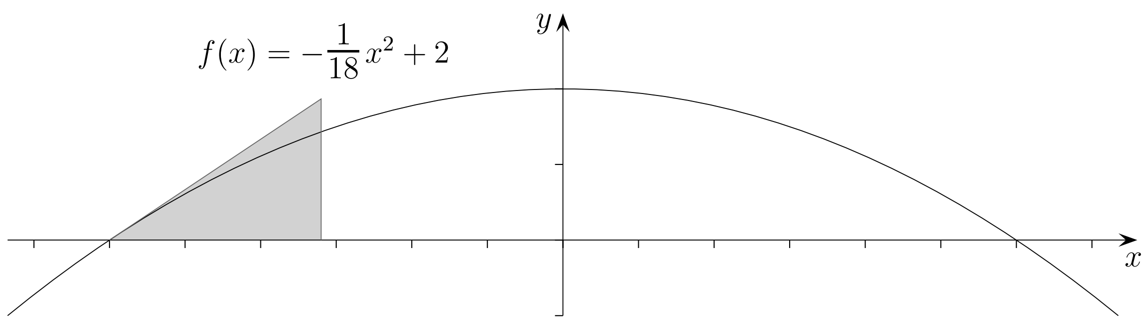
1. Wie groß ist die Fläche, die die Tangente an der Stelle $x = 1$ mit den Koordinatenachsen einschließt?



Tangentengleichung: $y = -x + \frac{7}{2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{8}$

2. Welcher max. Steigungswinkel muss beim Fahren über den Hügel bewältigt werden?



$f'(-6) = \frac{2}{3}$

$\alpha = 33{,}7°$

Ergänzung:
Wie groß ist der Steigungswinkel an der Stelle $x = 3$? $-18,4°$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

   Bestimme

   a) die Nullstellen

   b) die x- und y-Koordinate des Scheitels.

   c) Bestimme die Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

   Bestimme

   a) die Nullstellen

   b) die x- und y-Koordinaten der Punkte mit waagerechten Tangenten.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + 3$.

Bestimme

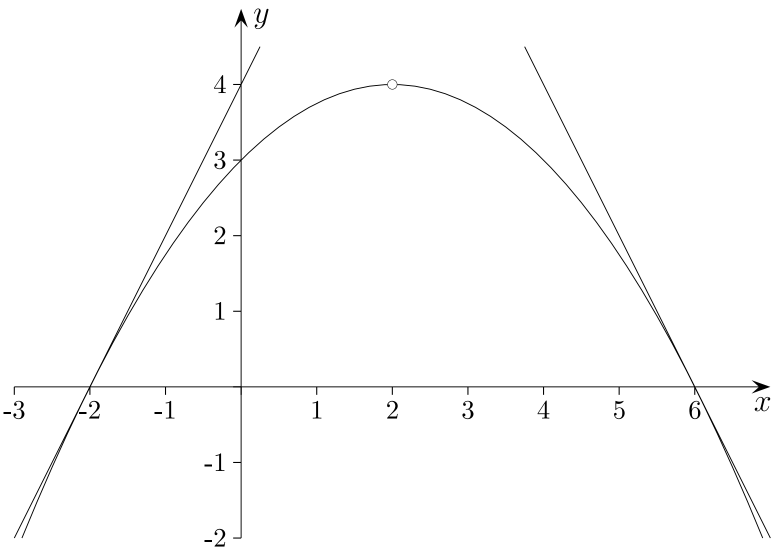
a) die Nullstellen $\quad x_1 = -2,\ x_2 = 6$

b) die x- und y-Koordinate des Scheitels. $\quad S(2 \mid 4)$

c) Bestimme die Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen.

Tangente an der Stelle x_1: $\quad y = 2x + 4$

Tangente an der Stelle x_2: $\quad y = -2x + 12$



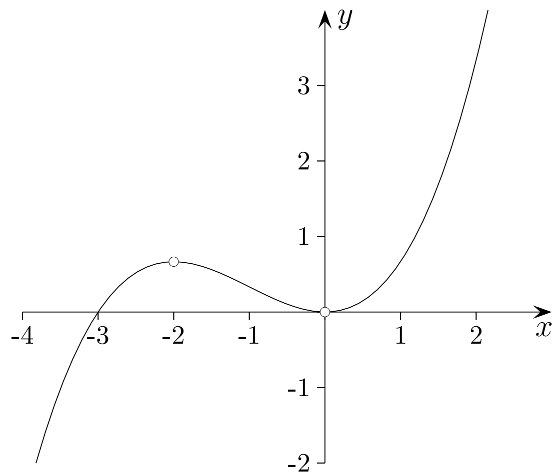
4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$.

Bestimme

a) die Nullstellen $\quad x_1 = -3,\ x_2 = 0$

b) die x- und y-Koordinaten der Punkte mit waagerechten Tangenten.

$E_1\left(-2 \mid \frac{2}{3}\right),\quad E_2(0 \mid 0)$



5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$.

   Bestimme

   a) die Nullstellen

   b) die x- und y-Koordinaten der Punkte mit waagerechten Tangenten.

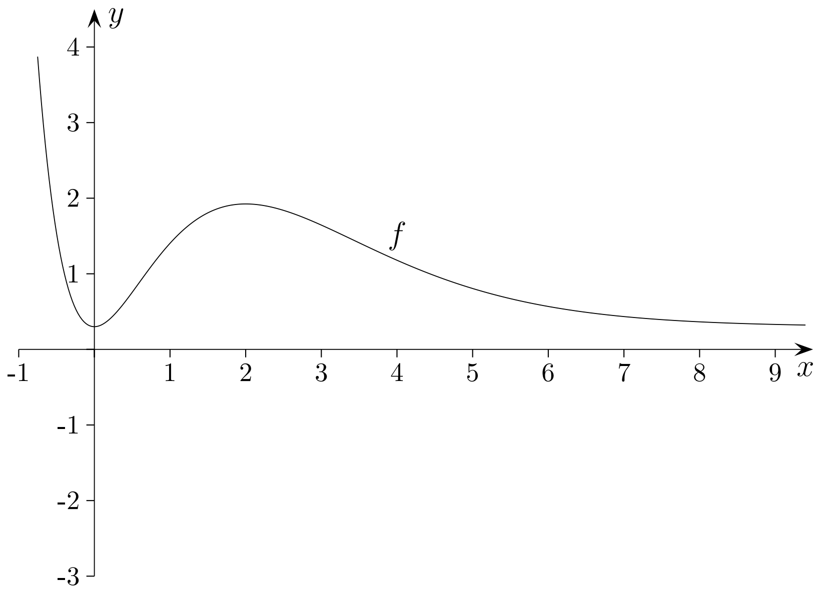
6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

   a) Ermittle die Steigungen in den Nullstellen.

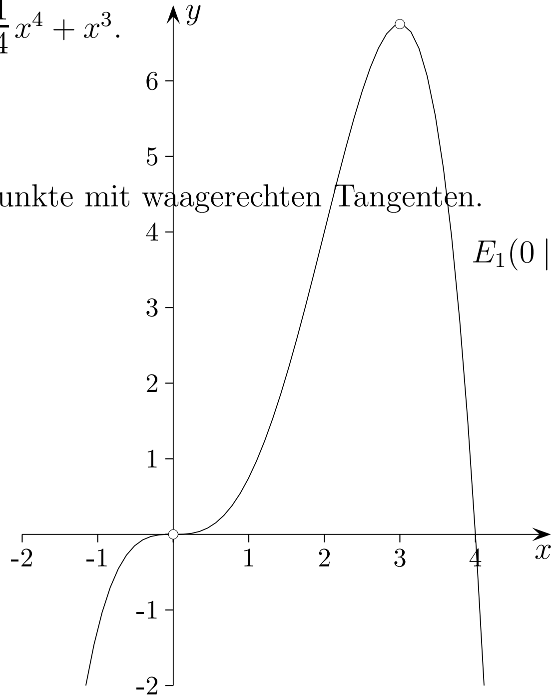
   b) An welcher Stelle beträgt die Steigung 1, an welcher Stelle -1?

   c) Untersuche, ob die Gerade $y = -6x + 20$ eine Tangente ist.

7. Skizziere die Ableitungsfunktion von f.



5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$.



Bestimme

a) die Nullstellen $\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 4$

b) die x- und y-Koordinaten der Punkte mit waagerechten Tangenten. $\qquad E_1(0 \mid 0),\quad E_2\left(3 \mid \frac{27}{4}\right)$

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

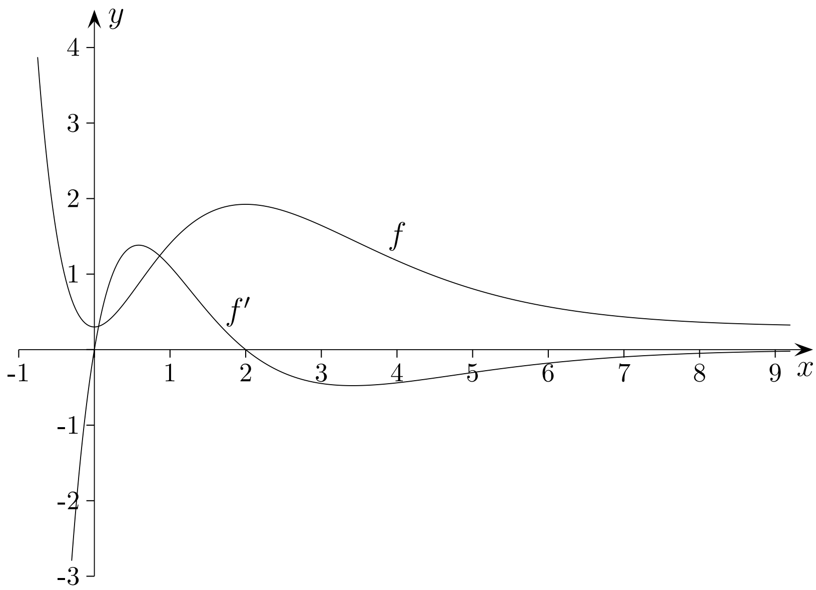
a) Ermittle die Steigungen in den Nullstellen. $\qquad f'(-1) = 4,\ f'(3) = -4$

b) An welcher Stelle beträgt die Steigung 1, an welcher Stelle -1? $\qquad f'(\frac{1}{2}) = 1,\ f'(\frac{3}{2}) = -1$

c) Untersuche, ob die Gerade $y = -6x + 20$ eine Tangente ist.

keine Tangente, Tangente an der Stelle $x = 4$ lautet: $y = -6x + 19$

7. Skizziere die Ableitungsfunktion von f.



1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$.

   Bestimme die x-Koordinaten der

   a) Nullstellen

   b) Punkte mit waagerechten Tangenten.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3x$

   a) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(-1 \mid ?)$.

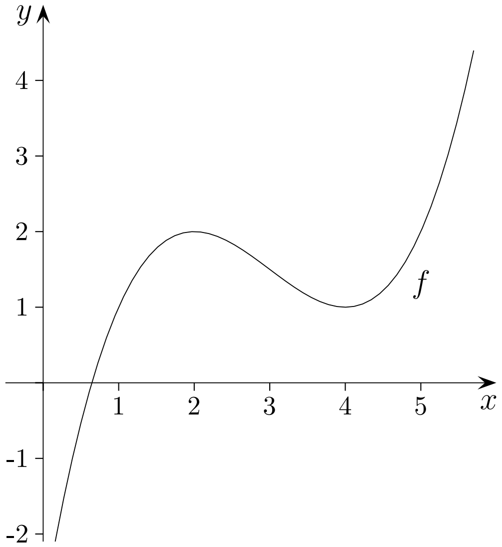
   b) Gib die x-Koordinaten derjenigen Punkte an, in denen die Funktion Tangenten besitzt, die parallel zur Geraden $y = 15x + 1$ verlaufen.

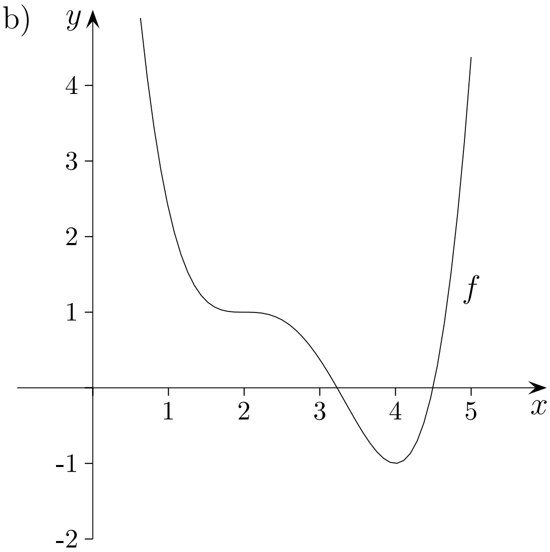
3. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

   a) Gibt es eine Stelle, an der f und g dieselbe Steigung haben?

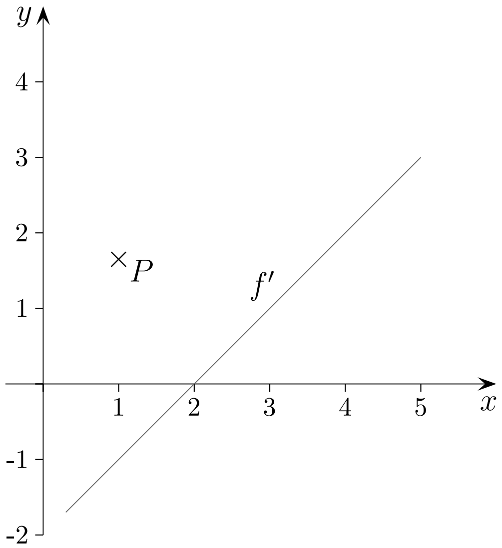
   b) An welchen Stellen hat f Tangenten, die mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschließen?

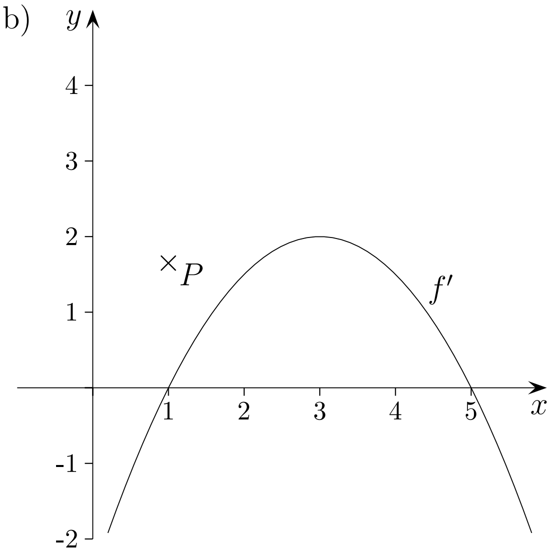
4. Gegeben ist der Graph der Funktion f . Skizziere auf diesem Zettel f'.

a) 

b) 

5. Gegeben ist der Graph von f' . Skizziere auf diesem Zettel f.
Der Punkt P soll auf dem Graphen von f liegen.

a) 

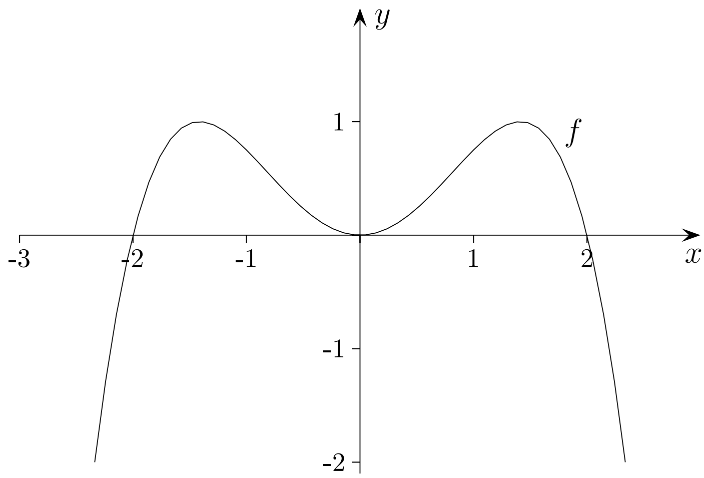
b) 

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$.

   Bestimme die x-Koordinaten der

   a) Nullstellen $\qquad x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 2$

   b) Punkte mit waagerechten Tangenten. $\qquad E_1(0 \mid 0),\ E_{2/3}\left(\pm\sqrt{2} \mid 1\right)$



2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3x$

   a) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(-1 \mid ?)$. $\qquad y = 6x + 2$

   b) Gib die x-Koordinaten derjenigen Punkte an, in denen die Funktion Tangenten besitzt, die parallel zur Geraden $y = 15x + 1$ verlaufen. $\qquad x_{1/2} = \pm 2$

3. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

   a) Gibt es eine Stelle, an der f und g dieselbe Steigung haben? $\qquad -2x = 2x - 5,\quad x = \frac{5}{4}$

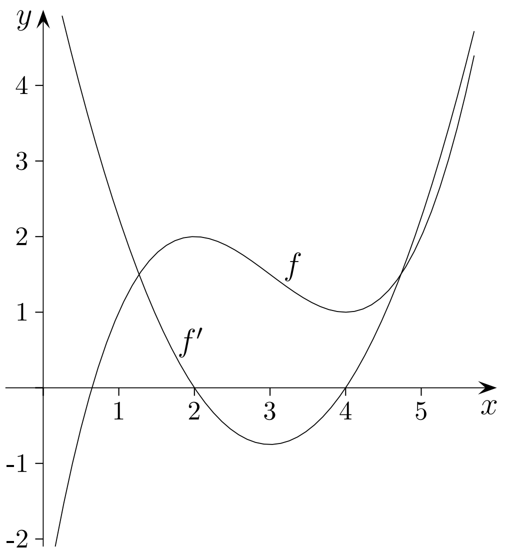
   b) An welchen Stellen hat f Tangenten, die mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ einschließen?

   $$-2x = 1,\quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

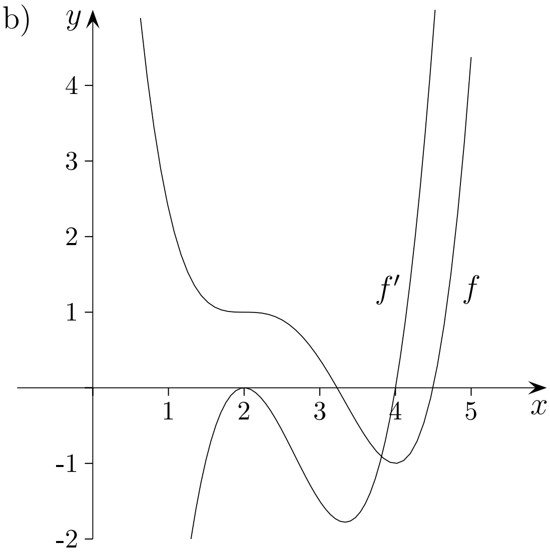
   $$-2x = -1,\quad x_2 = \frac{1}{2}$$

4. Gegeben ist der Graph der Funktion f . Skizziere auf diesem Zettel f'.

a)

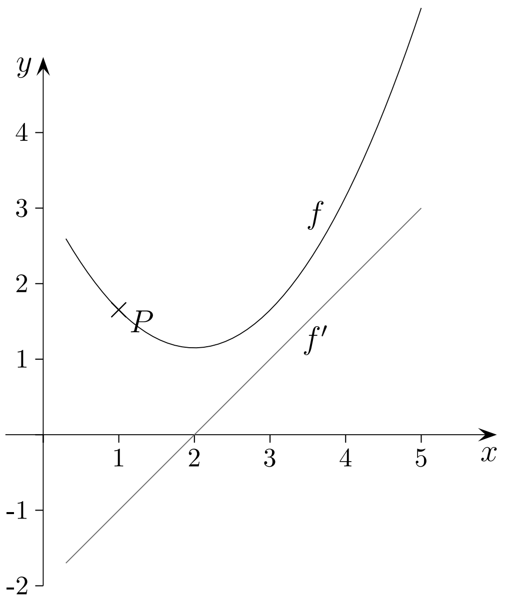


b)

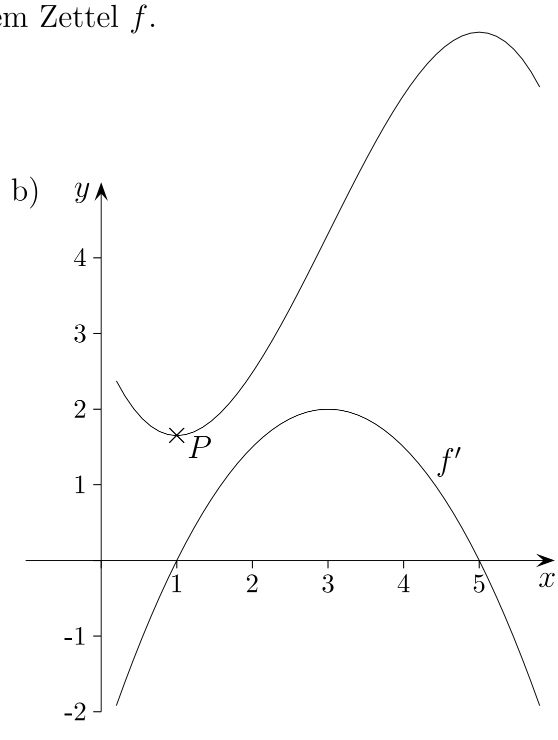


5. Gegeben ist der Graph von f' . Skizziere auf diesem Zettel f.
Der Punkt P soll auf dem Graphen von f liegen.

a)



b)



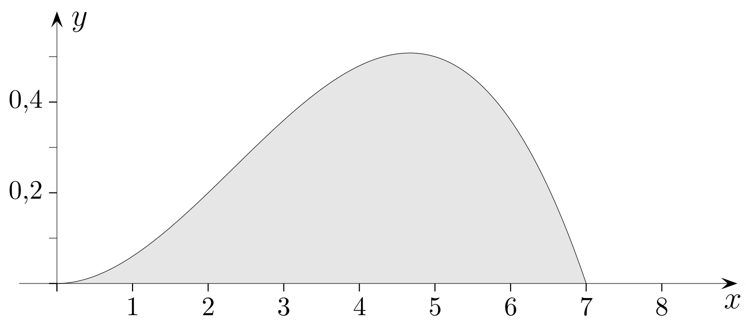
Bergwanderung

Ein Wanderer steigt auf einen Berg, dessen Silhouette durch $f(x) = 0{,}07x^2 - 0{,}01x^3$ gegeben ist (Angaben in km).

a) Welche Querschnittslänge hat der Berg?

b) Wie hoch ist der Berg?

c) Wie groß ist der Anstieg maximal, wenn der Wanderer von Westen (von Osten) kommt?



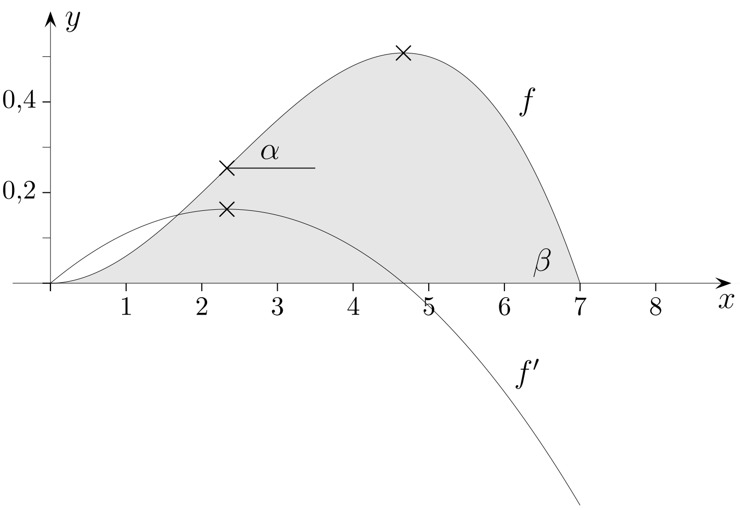
Bergwanderung

Ein Wanderer steigt auf einen Berg, dessen Silhouette durch
$f(x) = 0{,}07x^2 - 0{,}01x^3$ gegeben ist (Angaben in km).

a) Welche Querschnittslänge hat der Berg?

b) Wie hoch ist der Berg?

c) Wie groß ist der Anstieg maximal, wenn der Wanderer von Westen (von Osten) kommt?



Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(7 \mid 0)$

$Max(4{,}667 \mid 0{,}508)$

Wendepunkt $(2{,}333 \mid 0{,}254)$

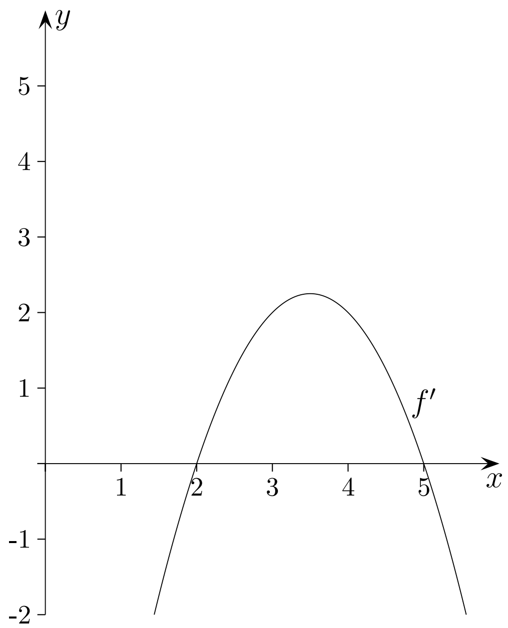
<u>maximaler Anstieg, Winkel</u>

$\alpha = \arctan(f'(2{,}333)) = 9{,}3°$

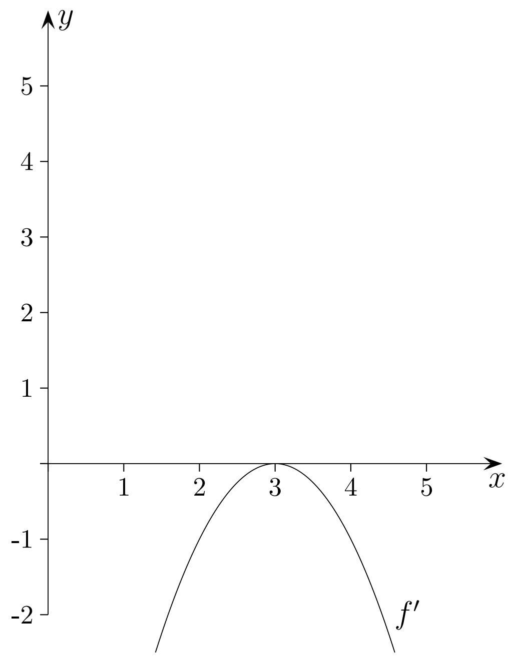
$\beta = \arctan(f'(7)) = -26{,}1°$

Gegeben ist der Graph von f'.
Skizziere auf diesem Blatt einen möglichen Verlauf von f.

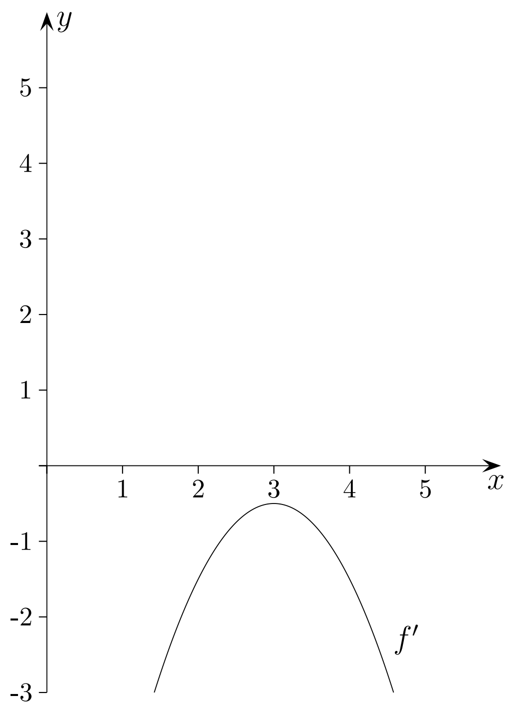
a)



b)



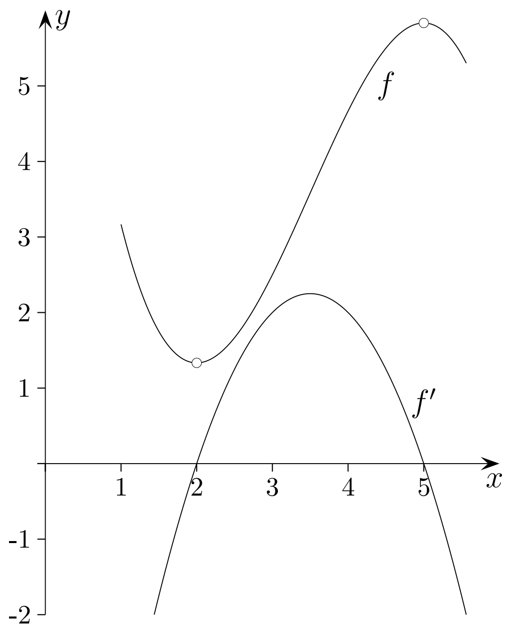
c)



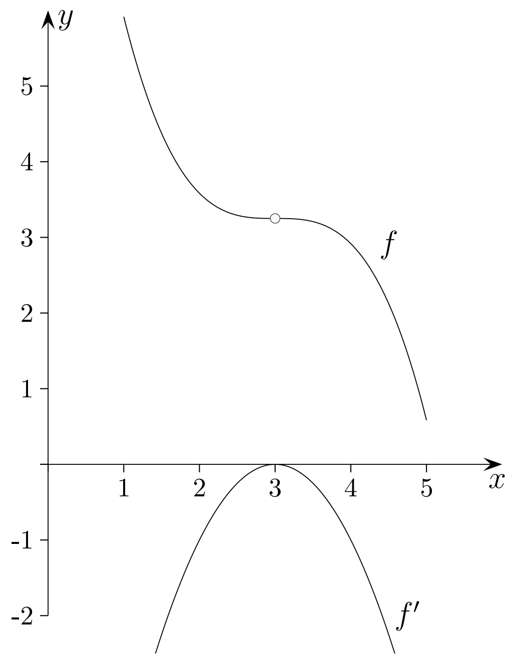
Gegeben ist der Graph von f'.
Skizziere auf diesem Blatt einen möglichen Verlauf von f.

f hat an der Stelle $x = 3$ einen Sattelpunkt.

a)

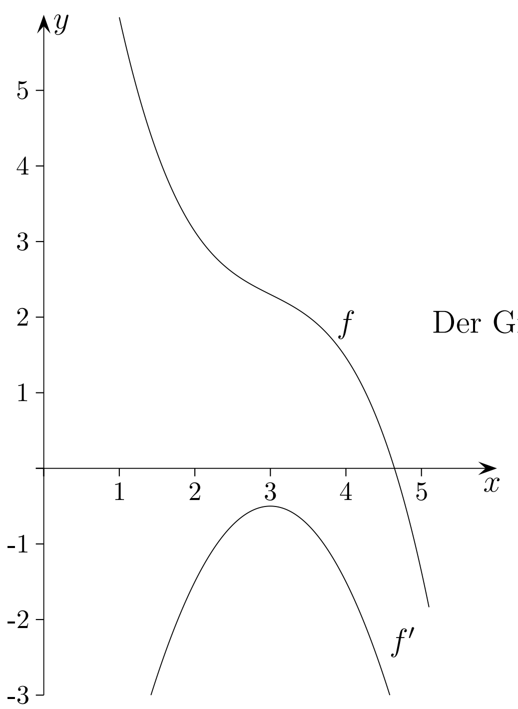


b)



Für f' liegt an der Stelle $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ vor und an der Stelle $x = 5$ von $+$ nach $-$.
Das bedingt für f ein Minimum und an der Stelle $x = 2$ und ein Maximum an der Stelle $x = 5$.

c)



Der Graph von f ist monoton fallend.