Summenformel für arithmetische Reihen

Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis n?

$$\left.\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & ... & + & 2 & + & 1 \\ \hline \end{array}\right\}+$$

Idee: Reihe umkehren

$$s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Diese Überlegung lässt sich auf beliebige arithmetische Reihen verallgemeinern:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & + & (a_1+d) & + & (a_1+2d) & + & ... & + & (a_n-d) & + & a_n \\ a_n & + & (a_n-d) & + & (a_n-2d) & + & ... & + & (a_1+d) & + & a_1 \\ \hline \end{array}\right\}+$$

$$s_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

$$\begin{aligned} & a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2\,d \\ & \vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)\,d \end{aligned}$$

Summenformel für geometrische Reihen

Zunächst wieder ein Beispiel:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccccccccccl} s_8 & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & 16 & + & 32 & + & 64 & + & 128 & & & \mid \cdot 2 \\ s_8\cdot 2 & = & & & 2 & + & 4 & + & 8 & + & 16 & + & 32 & + & 64 & + & 128 & + & 256 & \\ \hline \end{array}\right\}-$$

$$\begin{aligned} s_8 - s_8\cdot 2 &= 1-256 \\ s_8\,(1-2) &= 1-256 \\ s_8 &= 255 \end{aligned}$$

Nun der allgemeine Fall:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccccccl} s_n & = & a_1 & + & a_1\,q & + & a_1\,q^2 & + & ... & + & a_1\,q^{n-2} & + & a_1\,q^{n-1} & & & \mid \cdot q \\ s_n\cdot q & = & & & a_1\,q & + & a_1\,q^2 & + & ... & + & a_1\,q^{n-2} & + & a_1\,q^{n-1} & + & a_1\,q^n & \\ \hline \end{array}\right\}-$$

$$\begin{aligned} s_n - s_n\cdot q &= a_1 - a_1\,q^n \\ s_n\,(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ s_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1 \\ a_2 &= a_1\,q \\ a_3 &= a_1\,q^2 \\ & \vdots \\ a_n &= a_1\,q^{n-1} \end{aligned}$$

beachte: n ist die Anzahl der Summanden

© Roolfs

Die unendliche geometrische Reihe

Es wird angenommen, dass ein Anteil m jeder Generation durch Mutation eines bestimmten Gens an Retinoblastom (einer Art Augenkrebs bei Kindern) erkrankt; weiter wird vermutet, dass ein Teil r der Erkrankten das Gen an die nächste Generation vererbt. Wie groß ist der Anteil der Erkrankten (gemeint ist der Anteil der Träger des defekten Gens) in der heutigen Generation, falls $m = \frac{2}{10^5}$ und $r = \frac{3}{10}$ sind?

Lösung:

In der heutigen Generation entsteht ein Anteil $m = \frac{2}{10^5}$ durch Mutation. In der vorigen Generation entstand derselbe Anteil m durch Mutation, hiervon wurde der Anteil r auf die heutige Generation vererbt, zusammen ergibt das einen Anteil von $m + m \cdot r$. Die vorvorige Generation liefert zur heutigen einen Anteil von $m \cdot r^2$, usw. Insgesamt erhalten wir für die heutige Generation einen Anteil s:

$$s = m + m \cdot r + m \cdot r^2 + m \cdot r^3 + \ \dots$$

Die Summe von n Summanden beträgt:

$$s_n = \frac{m \cdot (1 - r^n)}{1 - r}.$$

Je weiter wir in der Folge s_n fortschreiten, umso genauer wird s approximiert, daher bestimmen wir den Grenzwert:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{m}{1-r} = \frac{2{,}9}{10^5}$$

Der Anteil ist ungefähr um die Hälfte größer als die Mutationsrate.

Die Konvergenz einer unendlichen geometrischen Reihe soll an einem weiteren Beispiel gezeigt werden.

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ \dots$$

Werden n Summanden addiert, ergibt dies

$$s_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}, \qquad \text{also} \qquad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Anzahl der Summanden	Näherung für s
5	1,93 ...
10	1,998 ...
15	1,99993 ...
20	1,999998 ...
25	1,99999994 ...
30	1,999999998 ...

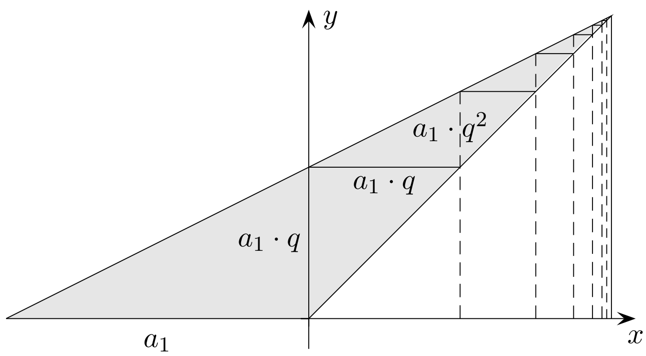
Beachte: *2 besitzt die Darstellung* $2 = 1{,}\overline{9}$

Die allgemeine unendliche geometrische Reihe lautet:

$$s = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 \ \dots$$

Mit $s_n = \frac{a_1\,(1-q^n)}{1-q}$ ist $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$,

falls $-1 < q < 1$ ist, da dann $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt.



Aus der nebenstehenden Grafik ergibt sich eine andere Möglichkeit, die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe, d. h. den Grenzwert der Teilsummenfolge, zu ermitteln und zwar mit der Schnittstelle zweier Geraden:

$$y = x \qquad \text{und} \qquad y = q \cdot x + a_1 \cdot q$$

Die nebenstehende Rechnung ergibt: $s = \frac{a_1}{1-q}$

$$\begin{aligned} x &= q \cdot x + a_1 \cdot q \\ x - q \cdot x &= a_1 \cdot q \\ x(1-q) &= a_1 \cdot q \\ x &= \frac{a_1 \cdot q}{1-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= a_1 + \frac{a_1 \cdot q}{1-q} = \frac{a_1\,(1-q)}{1-q} + \frac{a_1 \cdot q}{1-q} \\ s &= \frac{a_1}{1-q} \end{aligned}$$

1. Bestimme die Summe:

   a) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \ \dots$

   b) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ \dots$

© Roolfs

Unendliche geometrische Reihen

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0{,}\overline{3}\\ &= 0{,}33333\ldots\\ &= \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}\ldots\end{aligned}$$

Die vier Darstellungen erfassen dieselbe Zahl.
Eine unendliche Reihe stellt ein Verfahren dar, um eine Zahl auf beliebig viele Stellen zu berechnen.
Später ist es möglich,

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ \ldots \qquad \text{zu beweisen.}$$

Umgekehrt kann zu einer geometrischen Reihe die Summe als Bruch ermittelt werden.

$$\begin{aligned}s &= 0{,}\overline{4}\\ &= 0{,}44444\ldots\\ &= \frac{4}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}\ldots\end{aligned}$$

Wir notieren den allgemeinen Fall:

$$\left.\begin{aligned}s &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots && \mid\cdot q\\ s\cdot q &= \phantom{a_1 +{}} a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots\end{aligned}\right\}-$$

$$\begin{aligned}s - s\cdot q &= a_1\\ s\,(1-q) &= a_1\\ s &= \frac{a_1}{1-q}\end{aligned}$$

Für das Beispiel ist $s=\frac{4}{9}$.

Die Summenformel für eine unendliche geometrische Reihe kann auf eine zweite Weise gewonnen werden.

Die Addition der ersten n Summanden ergibt: $s_n = \dfrac{a_1\,(1-q^n)}{1-q}$

Für $n\to\infty$ (n strebt gegen Unendlich) folgt $s_n \to \dfrac{a_1}{1-q}$ oder etwas kürzer:

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ (Limes, Grenzwert), da für $-1<q<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt.

a) Wandle $0{,}\overline{13}$ in einen Bruch um.

b) Berechne $s = 3-\frac{3}{4}+\frac{3}{16}-\ \ldots$ und s_6, s_7, s_{10}, s_{11}.

Medikamenteneinnahme

Herr A. nimmt täglich morgens 3 mg eines Medikaments ein. 20 % dieses Medikaments werden während eines Tages abgebaut. Erfasse den Verlauf der Medikamentenkonzentration im Körper.

Sei $m_0 = 3$ und m_1 die Konzentration am nächsten Tag unmittelbar nach der Einnahme.

$$m_1 \;=\; m_0 \cdot q + 3 \;=\; 3 \cdot q + 3\,, \qquad \text{mit} \quad q \;=\; 1 - \frac{1}{5} \;=\; \frac{4}{5} \;=\; 0{,}8. \qquad \text{Weiter gilt:}$$

$$m_2 \;=\; m_1 \cdot q + 3 \;=\; 3 \cdot q^2 + 3 \cdot q + 3$$

$$m_3 \;=\; m_2 \cdot q + 3 \;=\; 3 \cdot q^3 + 3 \cdot q^2 + 3 \cdot q + 3$$

$$\vdots$$

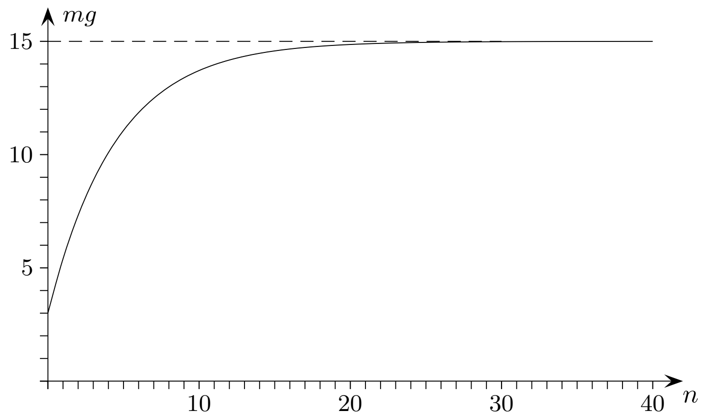
$$m_n \;=\; m_{n-1} \cdot q + 3 \;=\; 3 \cdot q^n + 3 \cdot q^{n-1} + \;\ldots\; + 3 \cdot q^2 + 3 \cdot q + 3 \qquad \textit{beachte: } n+1 \textit{ Summanden}$$

Für m_n erhalten wir zusammengefasst (geometrische Reihe):

$$m_n \;=\; \frac{3 \cdot (1 - 0{,}8^{n+1})}{1 - 0{,}8} \;=\; 15 \cdot (1 - 0{,}8^{n+1}) \;=\; 15 - \underbrace{15 \cdot 0{,}8^{n+1}}_{\longrightarrow\, 0}$$

strebt gegen null

n	m_n
0	3
1	5,4
10	13,712
20	14,862
30	14,985
40	14,998



m_n nähert sich für größer werdendes n immer mehr dem Wert 15. Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = 15$

Die allgemeine unendliche geometrische Reihe lautet:

$$s \;=\; a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \;\ldots$$

Mit $\quad s_n \;=\; \dfrac{a_1\,(1 - q^n)}{1 - q} \qquad$ ist $\qquad s \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n \;=\; \dfrac{a_1}{1 - q}\,,$

falls $\quad -1 < q < 1\;$ ist, da dann $\quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n \;=\; 0 \quad$ gilt.

Für die Medikamenteneinnahme besteht ein Gleichgewichtszustand für $s(1 - q) = a_1$.
Hieraus ist die Grenze sofort zu erkennen. Erläutere dies.

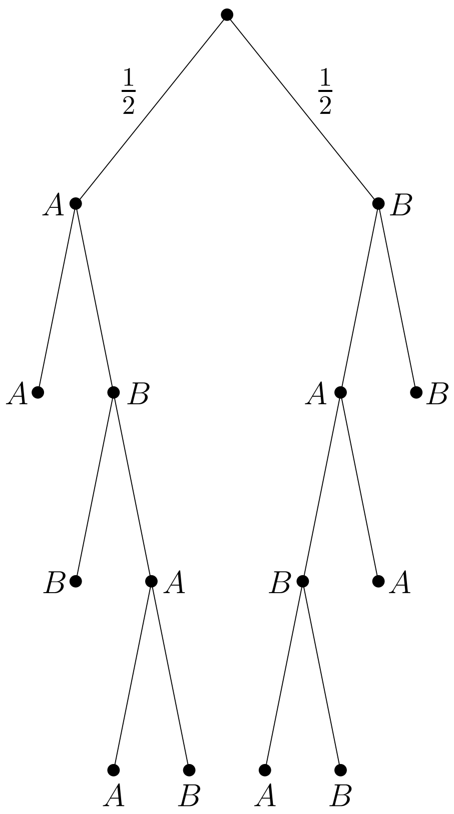
© Roolfs

Laplace-Münze

Eine Laplace-Münze wird so oft geworfen, bis zweimal hintereinander die gleiche Seite oben liegen bleibt. Insgesamt wird aber höchstens n-mal geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_n ($n = 2, 3, 4$), bei n-maligem Werfen aufeinanderfolgend zwei gleiche Seiten zu erhalten?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich, falls die maximale Anzahl der Würfe nicht mehr begrenzt wird?



$n = 2$

AA	AB	BA	BB
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P_2 = \frac{1}{2}$

ersetzen durch

$n = 3$

ABB	ABA	BAB	BAA
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

ersetzen durch

$n = 4$

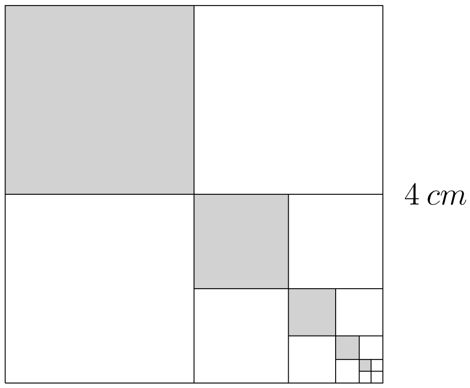
$ABAA$	$ABAB$	$BABA$	$BABB$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$P_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

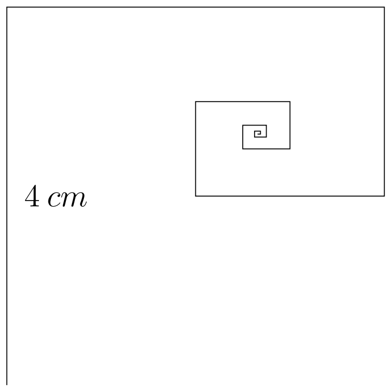
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$

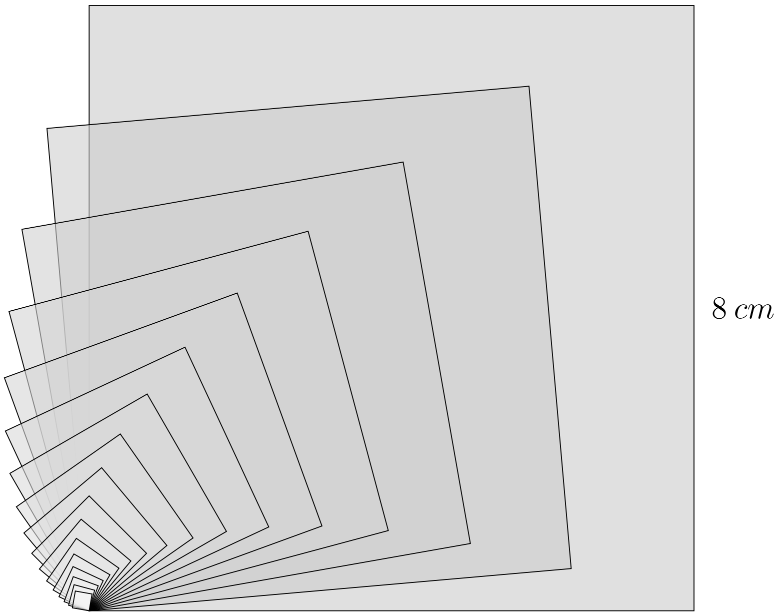
Wenn die maximale Anzahl der Würfe nicht mehr begrenzt wird,
werden schließlich mit der Wahrscheinlichkeit 1 zwei gleiche Seiten geworfen.
Das hatten wir auch so erwartet.

1. Stelle dir vor, dass die Unterteilungen unbegrenzt fortgesetzt werden.
   Bestimme die Summe aller Flächeninhalte der grauen Quadrate.



2. Die Spirale wird unbegrenzt fortgesetzt.
   Bestimme ihre Länge.
   Welchem Punkt strebt sie zu?





Die Quadratlängen nehmen jeweils um $\frac{1}{5}$ ab.