

## Merkhilfe Differenzialrechnung

1. Symmetrie      Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse       $\iff$   
                         Punktsymmetrie zum Ursprung       $\iff$
2. Spiegelung      an der  $x$ -Achse:       $y = ?$   
                         an der  $y$ -Achse:       $y = ?$
3. Verschiebung      um  $c$  in  $x$ -Richtung:  
                         um  $d$  in  $y$ -Richtung:
4. Streckung      mit Faktor  $a$  in  $x$ -Richtung:  
                         mit Faktor  $b$  in  $y$ -Richtung:
5. Monotonie       $f$  streng monoton wachsend auf  $I$ , falls  
                          $f$  streng monoton fallend auf  $I$ , falls
6. Hochpunkt       $H(x_0 | f(x_0))$ , falls  
                         oder VZW
7. Tiefpunkt       $T(x_0 | f(x_0))$ , falls  
                         oder VZW
8. Graph von  $f$  linksgekrümmt auf  $I$ ,  
                         falls auf  $I$
9. Graph von  $f$  rechtsgekrümmt auf  $I$ ,  
                         falls auf  $I$
10. Wendepunkt       $W(x_0 | f(x_0))$ , falls  
                         oder VZW
11. Tangentengleichung
12. Normalengleichung

13. Steigung, Winkel
14. Schnittwinkel zwischen Geraden (Tangenten)
15. allgemeine Sinusfunktion  $f(x) = ?$  Amplitude  $|a|$ ,  
 Verschiebung um  $c$  in  $x$ -Richtung, Periode  $\frac{2\pi}{b}$ , Verschiebung um  $d$  in  $y$ -Richtung
16. Berührbedingungen, Funktionen  $f$  und  $g$ , Stelle  $x_0$
17. Bedingungen für das rechtwinklige Schneiden, Funktionen  $f$  und  $g$ , Stelle  $x_0$
18. stetige Verbindung von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$ ,  
 d.h. sprungfreier (nahtloser) Übergang  
 knickfreier (glatter) Übergang  
 krümmungsruckfreier Übergang
19. Krümmung, Krümmungskreis
20. maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks  
 maximale Differenz der Funktionswerte  
 minimale Entfernung zum Ursprung  
 maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks
21. Interpretation einer Funktionsgleichung
  - a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$
  - b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$
  - c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$
  - d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$
  - e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$
  - f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$
  - g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

22. exponentielles Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, zur Basis  $e$   
Differenzialgleichung
  
23. exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, Basis  $e$   
Differenzialgleichung
  
24. begrenztes Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung
  
25. begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung
  
26. linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z.B. Tropfinfusion)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung
  
27. logistisches Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung
  
28. Vergiftetes Wachstum  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

29. Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

30. Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
4. Grades	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

- a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades
- b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades
- c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades
- d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades
- e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades
- f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

31. Ortskurve für  $\text{Max}\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k^2\right)$

32. Asymptote

Ende der Merkhilfe Differenzialrechnung

[zum Anfang](#)

zur Merkhilfe

[Grundwissen](#)

[Integralrechnung](#)

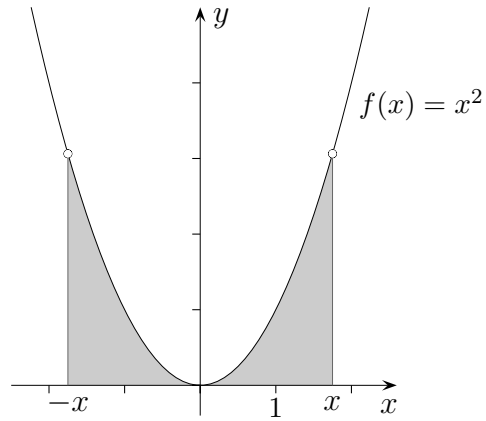
[Vektorrechnung](#)

[Stochastik](#)

[Homepage](#)



Symmetrie      Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse       $\iff f(-x) = f(x)$  für alle  $x$   
                  Punktsymmetrie zum Ursprung       $\iff$



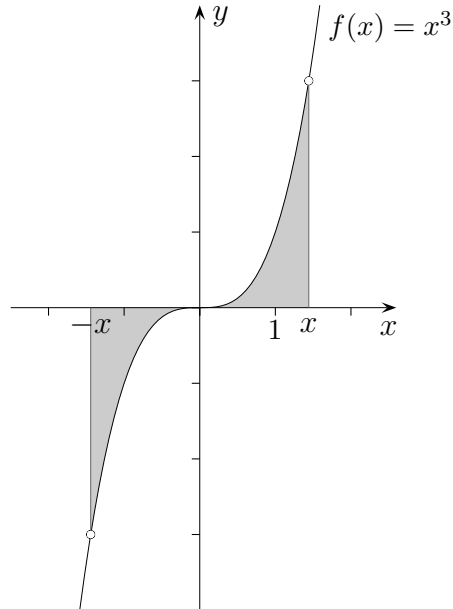
←

*Der Graph eines Polynoms mit nur geraden Exponenten ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.*

Beispiel:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 5$



Symmetrie      Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse       $\iff$   
 Punktsymmetrie zum Ursprung       $\iff f(-x) = -f(x)$  für alle  $x$



←

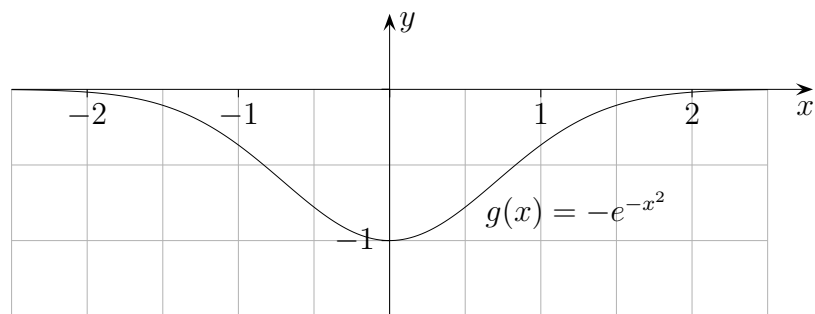
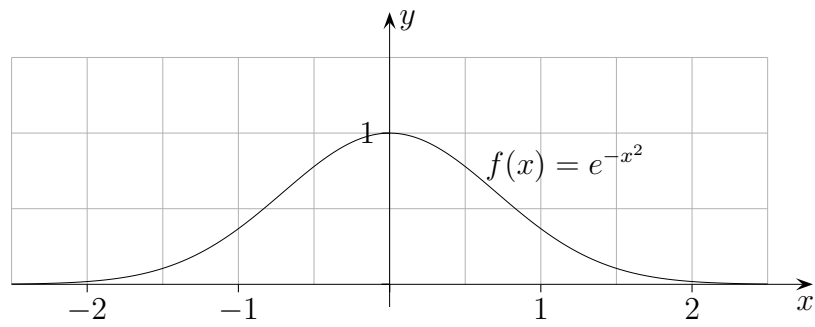
*Der Graph eines Polynoms mit nur ungeraden Exponenten ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn überdies der konstante Summand Null ist. Der Graph muss durch den Ursprung verlaufen.*

Beispiel:  $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

nicht punktsymmetrisch wäre:  $f(x) = x^5 - x^3 + 2$

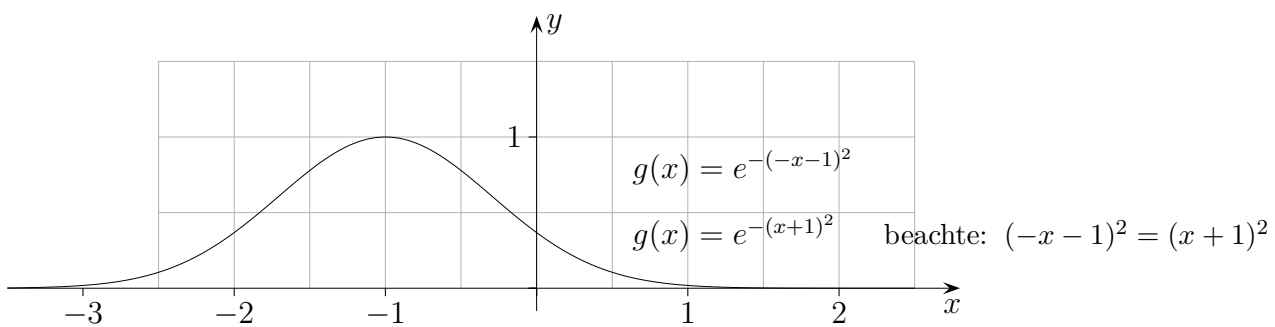
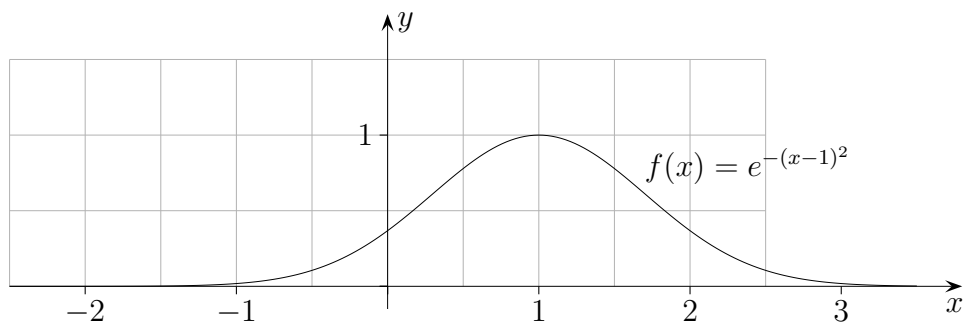
Spiegelung an der  $x$ -Achse:  $y = -f(x)$

an der  $y$ -Achse:  $y = ?$



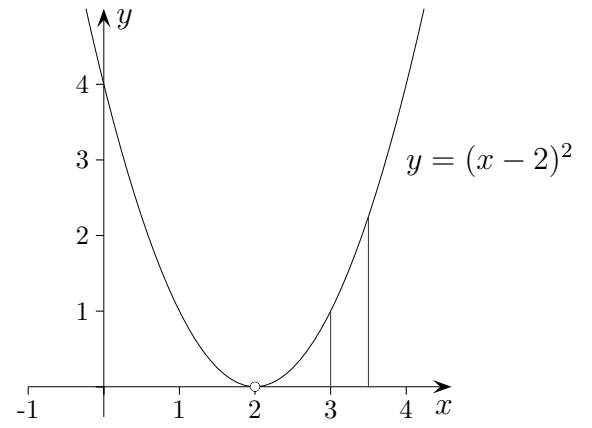
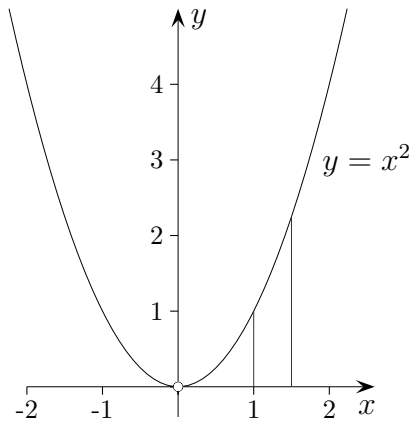
Spiegelung    an der  $x$ -Achse:     $y = ?$   
                   an der  $y$ -Achse:     $y = f(-x)$

←



Verschiebung um  $c$  in  $x$ -Richtung:  $y = f(x - c)$

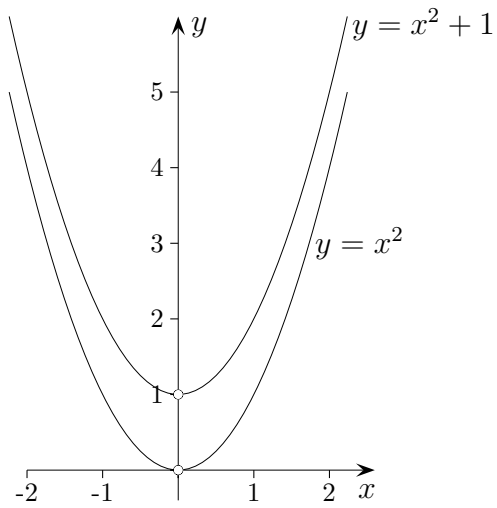
um  $d$  in  $y$ -Richtung:



Verschiebung um  $c$  in  $x$ -Richtung:

um  $d$  in  $y$ -Richtung:  $y = f(x) + d$

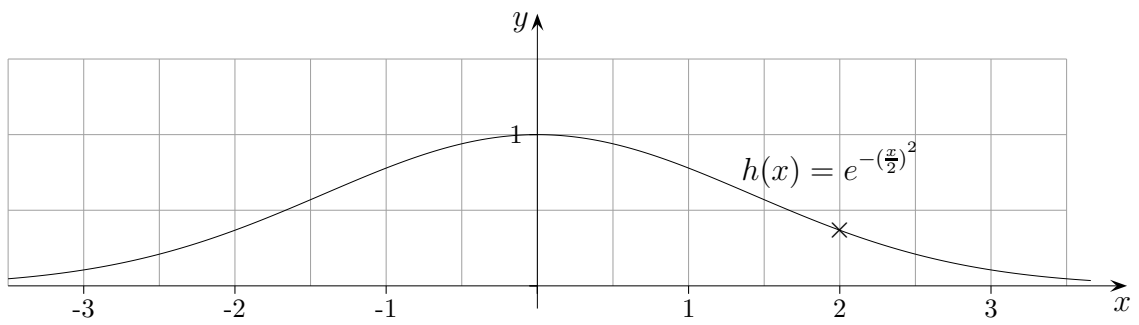
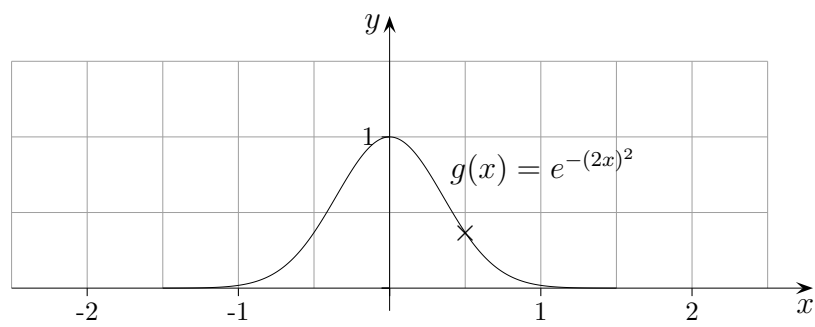
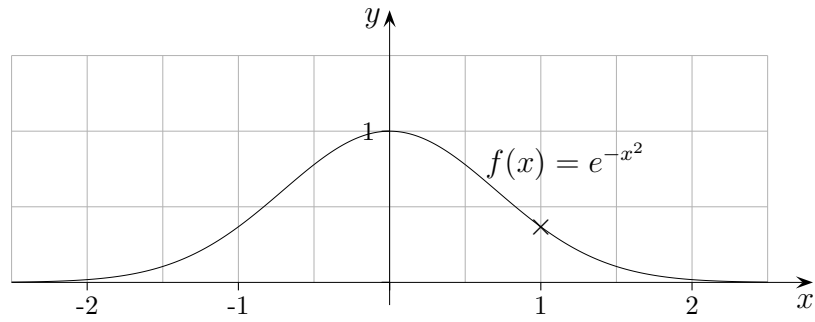
←



Streckung mit Faktor  $a$  in  $x$ -Richtung:  $y = f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$

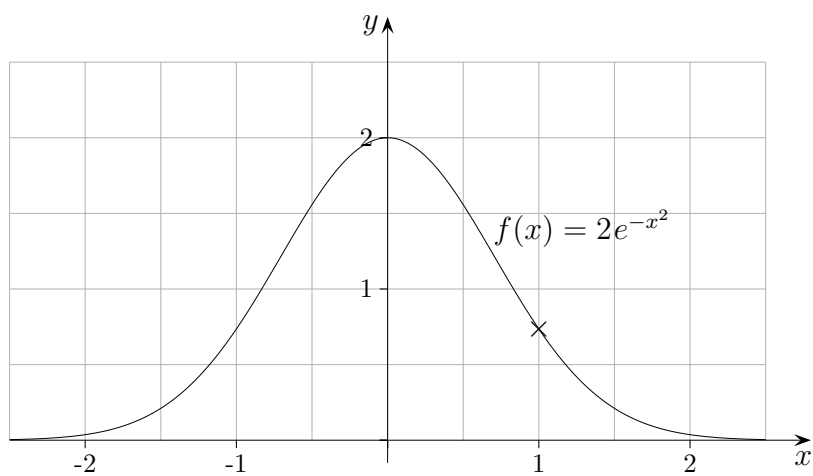
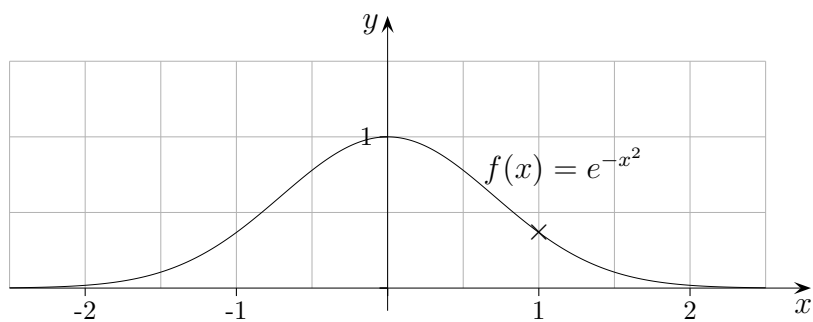
mit Faktor  $b$  in  $y$ -Richtung:

←



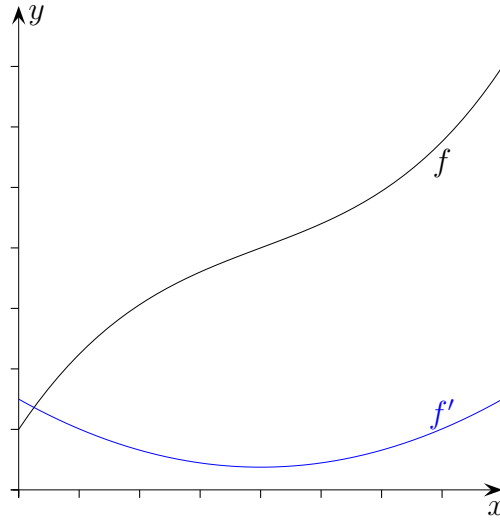
Streckung mit Faktor  $a$  in  $x$ -Richtung:

mit Faktor  $b$  in  $y$ -Richtung:  $y = b \cdot f(x)$



Monotonie  $f$  streng monoton wachsend auf  $I$ , falls  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$   
 $f$  streng monoton fallend auf  $I$ , falls

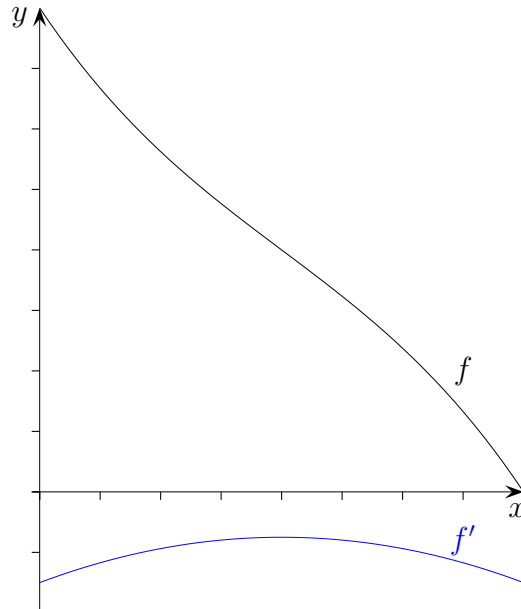
←



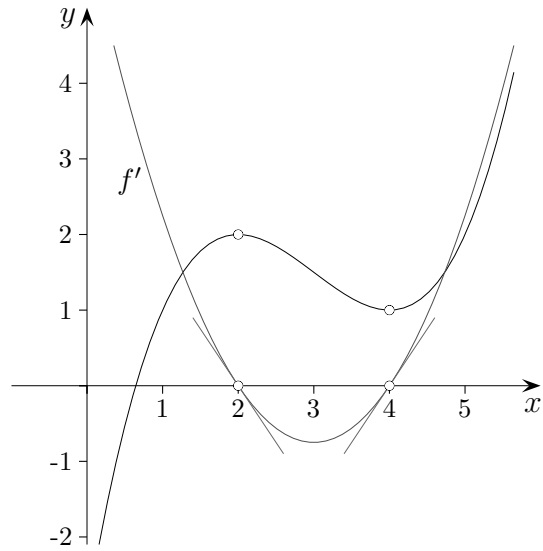


Monotonie  $f$  streng monoton wachsend auf  $I$ , falls  
 $f$  streng monoton fallend auf  $I$ , falls  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in I$

←



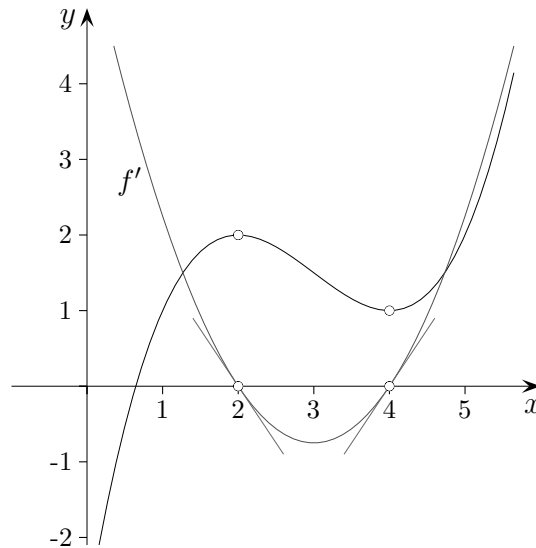
Hochpunkt  $H(x_0 | f(x_0))$ , falls  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$   
oder



←

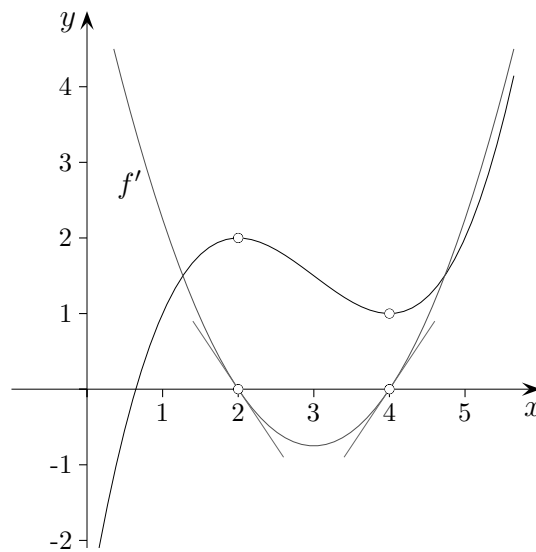
Hochpunkt  $H(x_0 | f(x_0))$ , falls

oder  $f'(x_0) = 0$  und Vorzeichenwechsel von  $+$  nach  $-$  von  $f'$  an der Stelle  $x_0$ ,  
 $f'(x_0 - h) > 0$  und  $f'(x_0 + h) < 0$  für eine Umgebung von  $x_0$



←

Tiefpunkt  $T(x_0 | f(x_0))$ , falls  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$   
 oder



←

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$$

Extrema:

notw. Bed.:  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = x^3 + 3x^2$$

$$x^3 + 3x^2 = 0$$

$$x^2(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

$$\text{Min}(-3 | -\frac{27}{4})$$

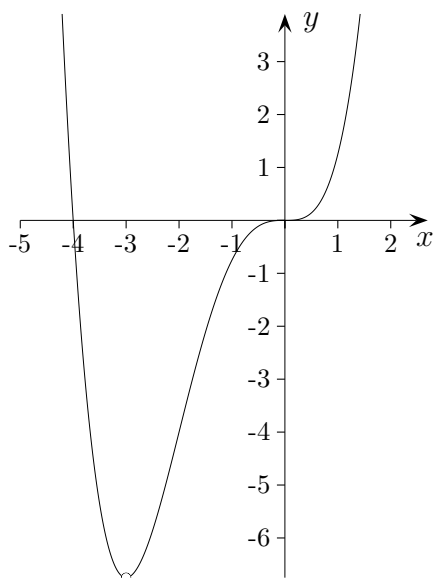
Minimum oder Maximum?

$$f''(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(0) = 0$$

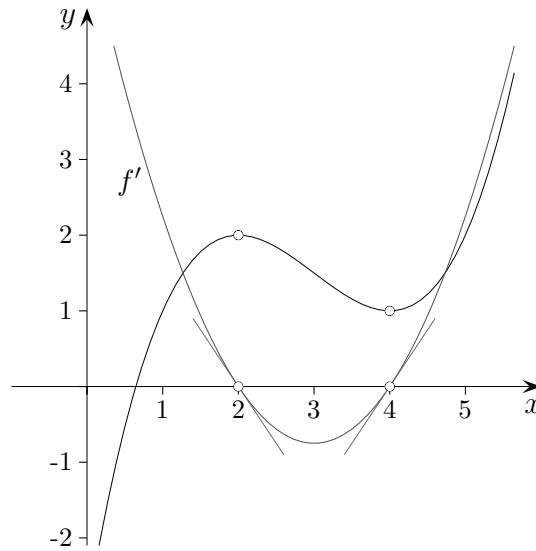
$$f''(-3) = 3 \cdot 9 - 18 > 0$$

Der  $y$ -Wert wird errechnet, indem der  $x$ -Wert in die Funktionsgleichung eingesetzt wird.



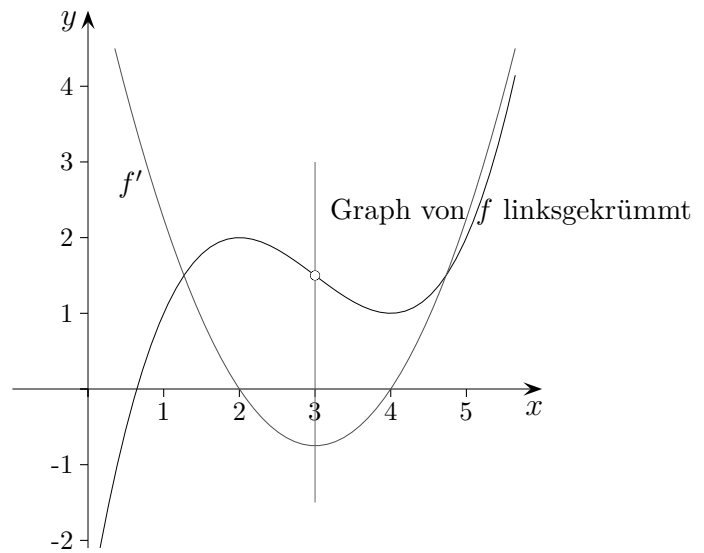
Tiefpunkt  $T(x_0 | f(x_0))$ , falls

oder  $f'(x_0) = 0$  und Vorzeichenwechsel von  $-$  nach  $+$  von  $f'$  an der Stelle  $x_0$ ,  
 $f'(x_0 - h) < 0$  und  $f'(x_0 + h) > 0$  für eine Umgebung von  $x_0$



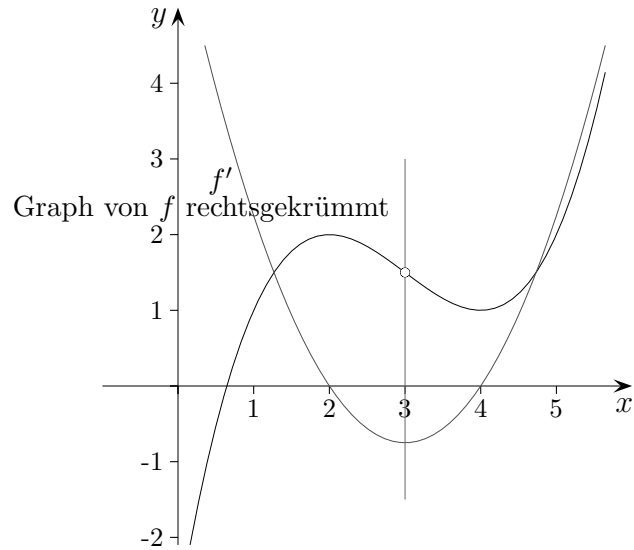
←

Graph von  $f$  linksgekrümmt auf  $I$ ,  
falls auf  $I$   $f''(x) > 0$  gilt.



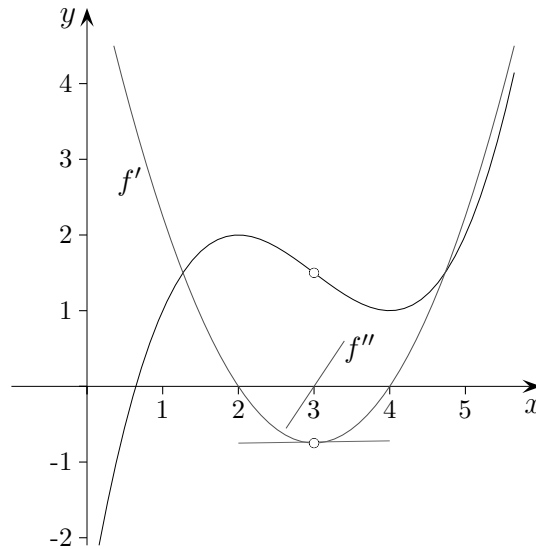
←

Graph von  $f$  rechtsgekrümmt auf  $I$ ,  
falls auf  $I$   $f''(x) < 0$  gilt.



←

Wendepunkt  $W(x_0 | f(x_0))$ , falls  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$   
 oder VZW



←

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$$

Wendepunkte:

notw. Bed.:  $f''(x) = 0$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$x(3x + 6) = 0$$

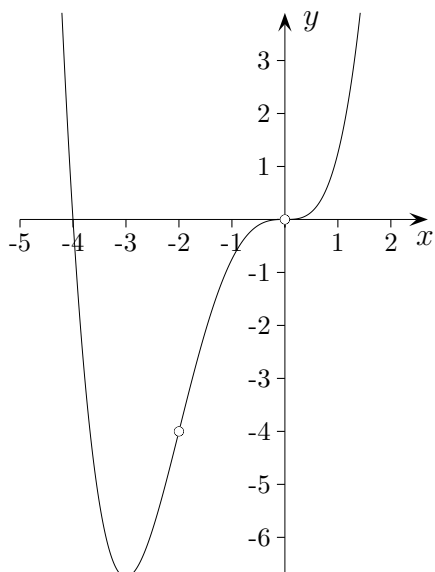
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

$$W_1(0 | 0), \quad W_2(-2 | -4)$$

$$f'''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

$$f'''(-2) = -6 \neq 0$$

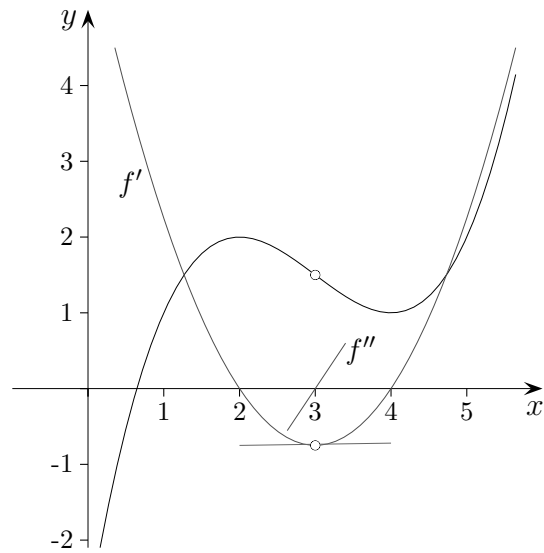




Wendepunkt  $W(x_0 | f(x_0))$ , falls

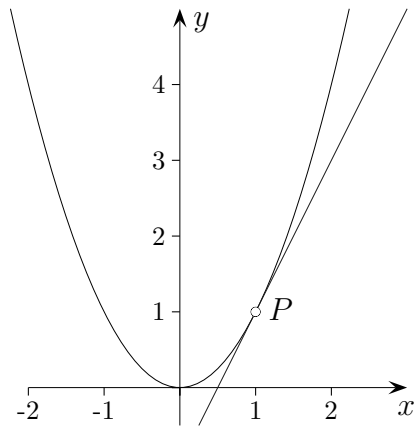
oder  $f''(x_0) = 0$  und Vorzeichenwechsel von  $f''$  an der Stelle  $x_0$ ,

$f''(x_0 - h) \gtrless 0$  und  $f''(x_0 + h) \lesseqgtr 0$  für eine Umgebung von  $x_0$

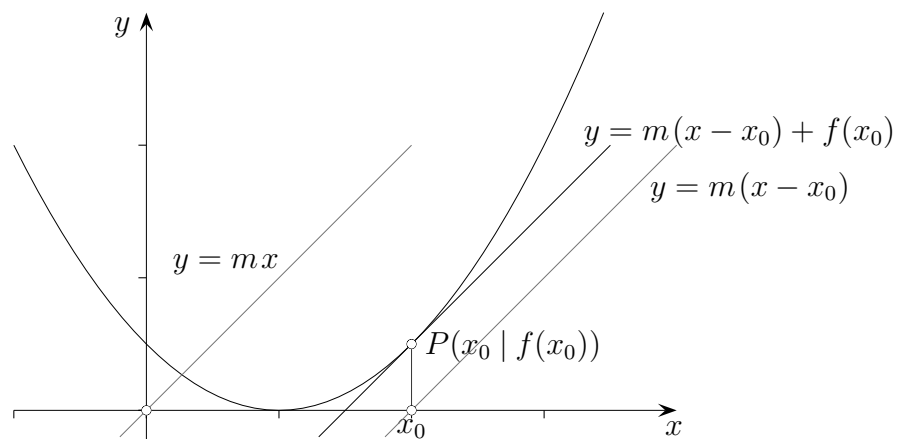


←

Tangentengleichung  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



←



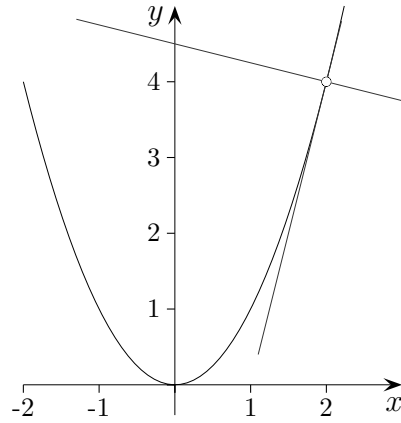
$$f(x) = ax^2, \quad P(3 \mid ?)$$

Gleichung der Tangente in P

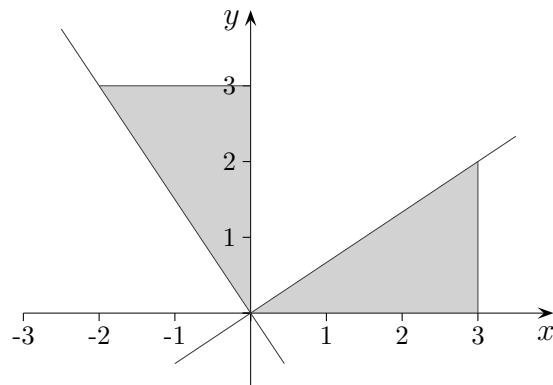
$$y = 6a(x - 3) + 9a$$

$$y = 6ax - 9a$$

Normalengleichung  $y = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$



←

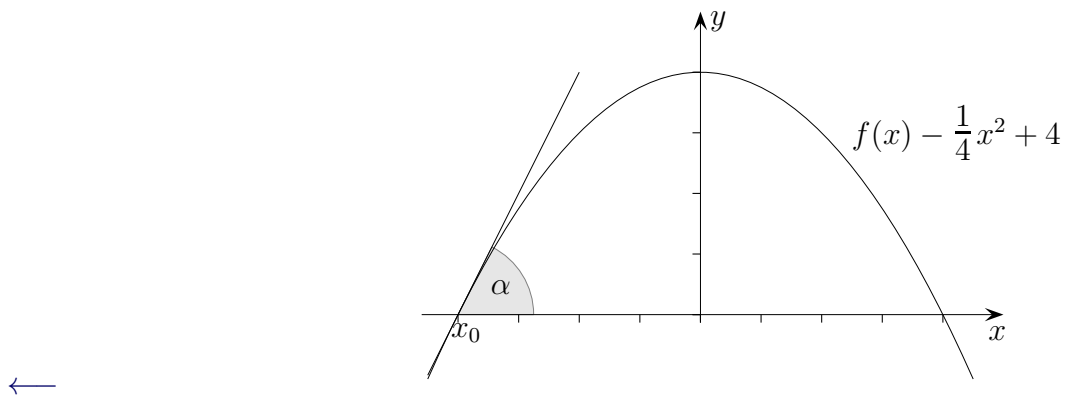


$$f(x) = ax^2, \quad P(3 | ?)$$

Gleichung der Normalen in  $P$

$$y = -\frac{1}{6a}(x - 3) + 9a$$

$$\tan \alpha = f'(x_0)$$
$$\alpha = \arctan f'(x_0)$$



Schnittwinkel  $\alpha$  der  $x$ -Achse und der Tangente an der Stelle  $x = -4$

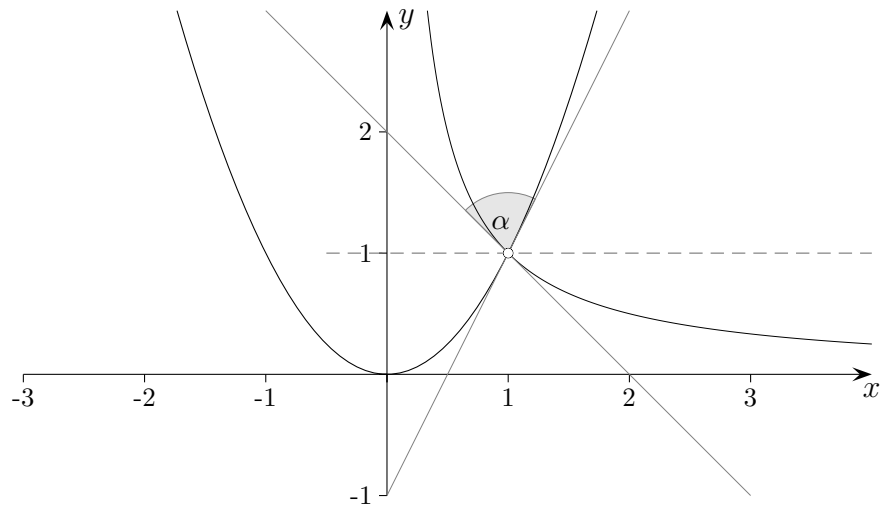
$$f'(-4) = 2$$

$$\tan(\alpha) = 2 \quad \implies \quad \alpha = 63,4^\circ$$

Schnittwinkel zwischen Geraden (Tangenten)

$$\alpha = \left| \tan^{-1}(m_2) - \tan^{-1}(m_1) \right|$$

Für  $\alpha > 90^\circ$  gehe man zu  $180^\circ - \alpha$  über.



←

Schnittwinkel  $\alpha$  der Graphen, d.h. der Tangenten an der Stelle  $x = 1$

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f'(1) = 2, \quad g'(1) = -1$$

$$\tan(\alpha_1) = 2 \quad \implies \quad \alpha_1 = 63,4^\circ$$

$$\tan(\alpha_2) = -1 \quad \implies \quad \alpha_2 = -45^\circ$$

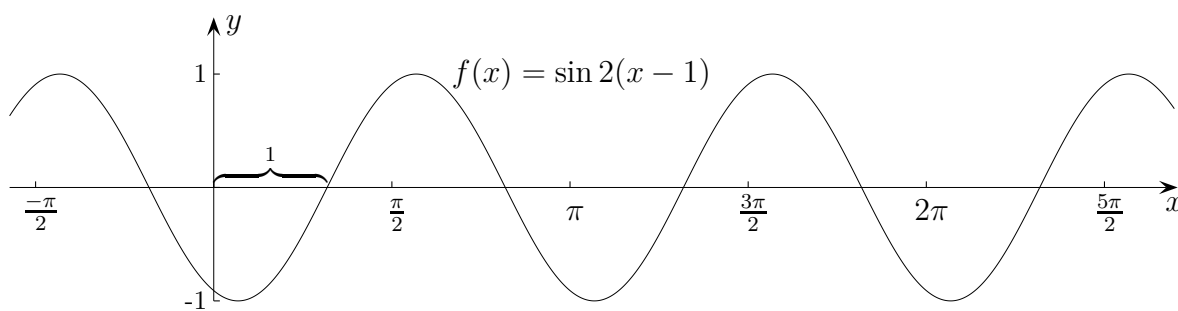
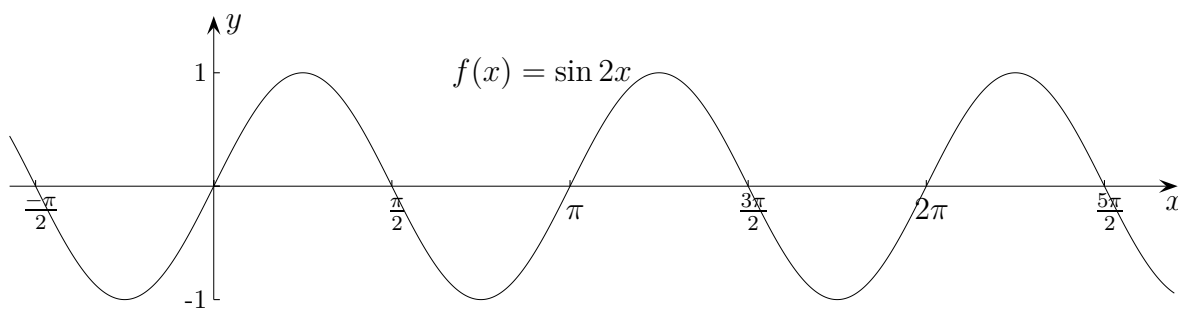
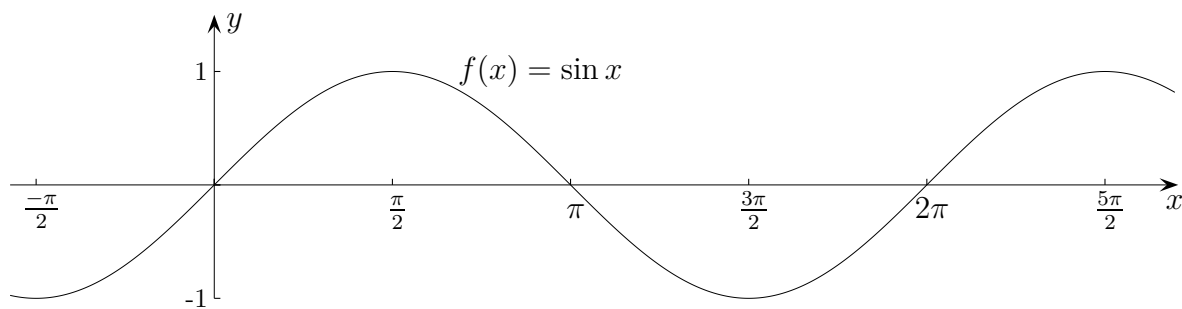
$$\beta = 63,4^\circ - (-45^\circ) = 108,4^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 108,4^\circ = 71,6^\circ$$

allgemeine Sinusfunktion  $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$

Amplitude  $|a|$ , Verschiebung um  $c$  in  $x$ -Richtung, Periode  $\frac{2\pi}{b}$ ,  
Verschiebung um  $d$  in  $y$ -Richtung

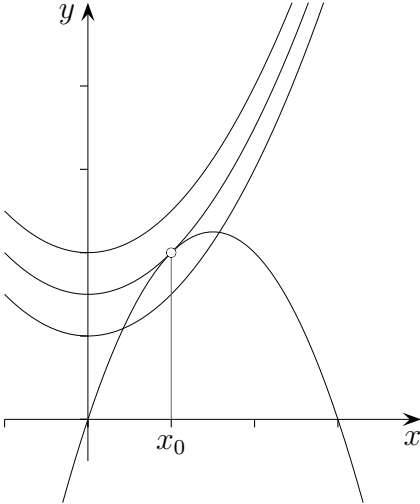
←



Berührbedingungen, Funktionen  $f$  und  $g$ , Stelle  $x_0$

1.  $f(x_0) = g(x_0)$

2.  $f'(x_0) = g'(x_0)$

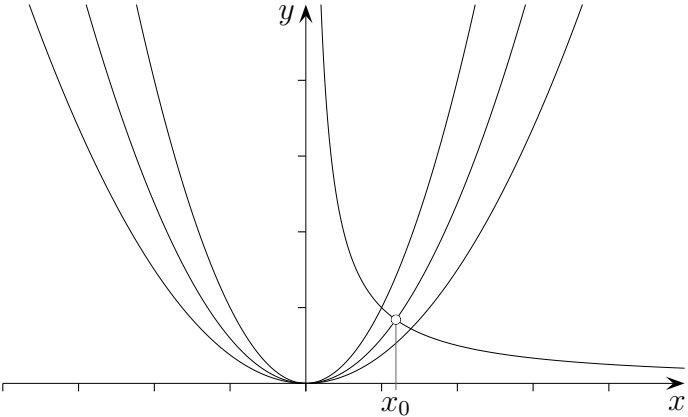


←

Bedingungen für das rechtwinklige Schneiden, Funktionen  $f$  und  $g$ , Stelle  $x_0$

1.  $f(x_0) = g(x_0)$

2.  $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$





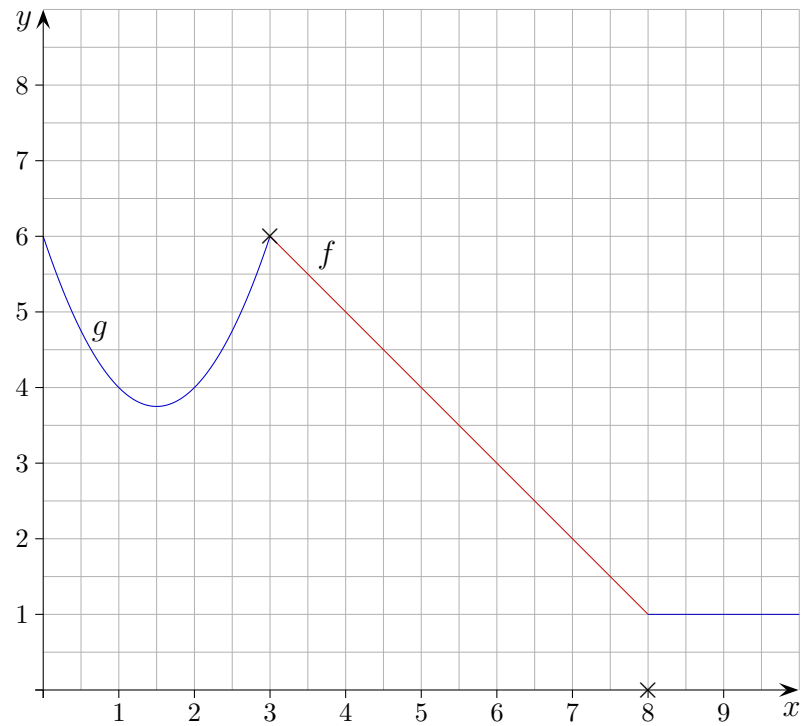
stetige Verbindung von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$ ,

d.h. sprungfreier (nahtloser) Übergang

$$f(x_0) = g(x_0)$$

knickfreier (glatter) Übergang

krümmungsruckfreier Übergang



stetige Verbindung von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$ ,

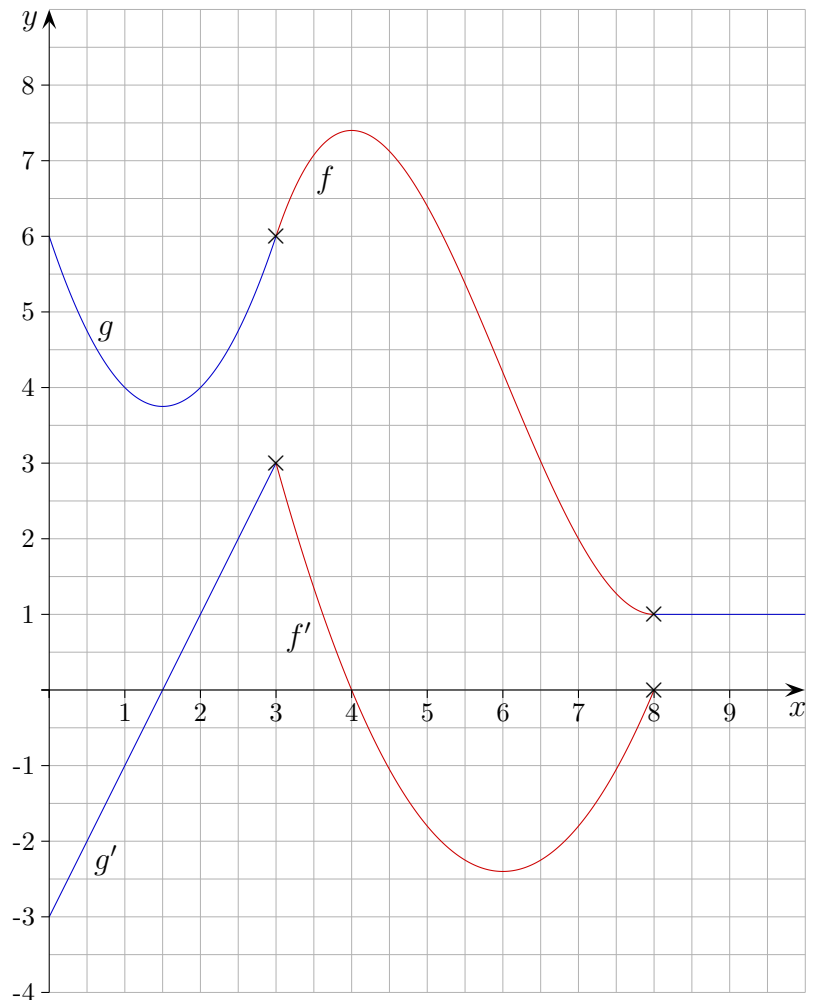
d.h. sprungfreier (nahtloser) Übergang

$$f(x_0) = g(x_0)$$

knickfreier (glatter) Übergang

$$f'(x_0) = g'(x_0) \quad \text{zusätzlich}$$

krümmungsruckfreier Übergang



←

stetige Verbindung von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$ ,

d.h. sprungfreier (nahtloser) Übergang

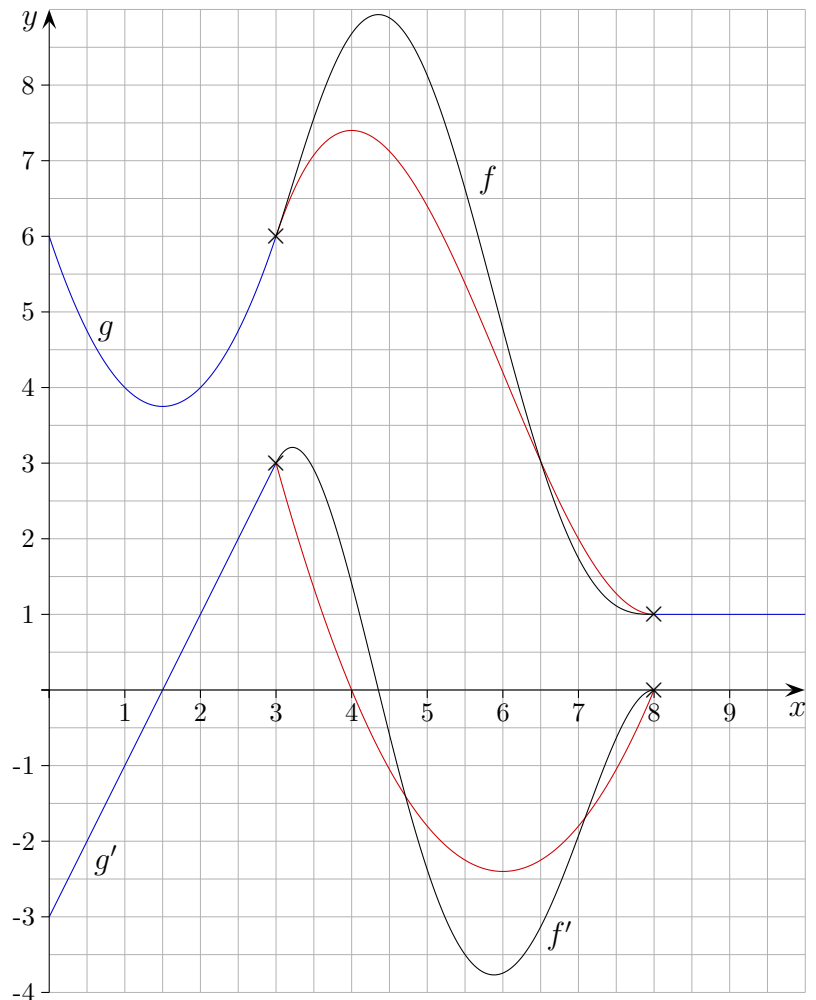
$$f(x_0) = g(x_0)$$

knickfreier (glatter) Übergang

$$f'(x_0) = g'(x_0) \quad \text{zusätzlich}$$

krümmungsruckfreier Übergang

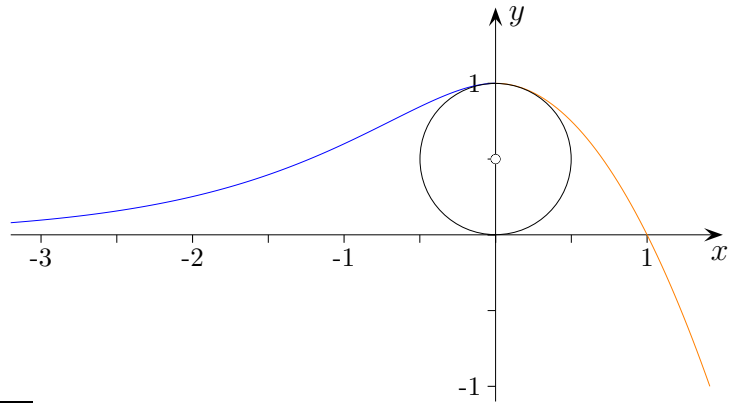
$$f''(x_0) = g''(x_0) \quad \text{zusätzlich}$$



←

Die Krümmung von Geraden ist null, desgleichen die an Wendestellen.  
 Kreise mit dem Radius  $r$  haben die konstante Krümmung  $\frac{1}{r}$ .  
 An Extremstellen (es reicht  $f'(x_0) = 0$ ) ist die Krümmung  $\kappa = f''(x_0)$ .  
 Der Radius des Krümmungskreises beträgt  $r = |\frac{1}{\kappa}|$ .

An einem krümmungssprungfreien (krümmungsruckfreien) Übergang stimmen für beide Teilfunktionen die Krümmungskreise überein.



Die allgemeine Krümmungs-Formel

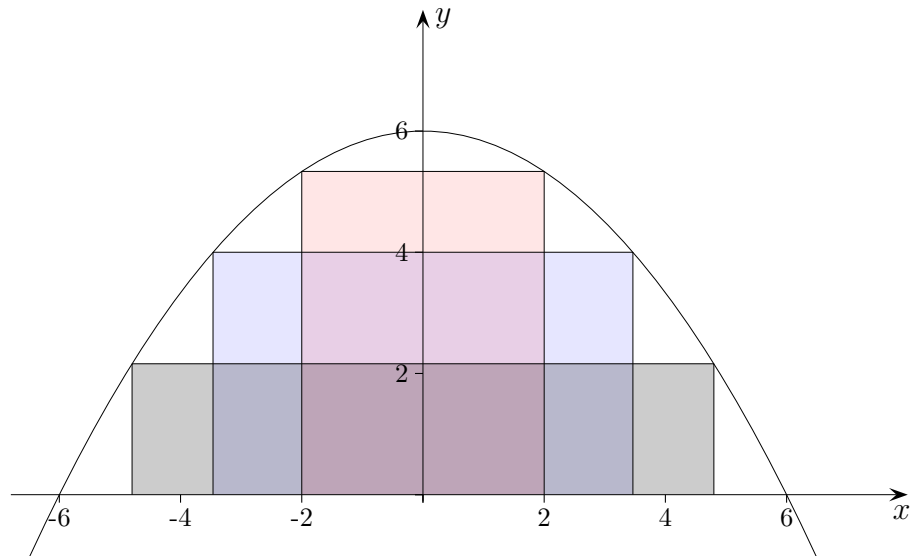
$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

muss nicht gewusst werden.

←

- maximaler Flächeninhalt eines eingeschriebenen Rechtecks
- maximale Differenz der Funktionswerte
- minimale Entfernung zum Ursprung
- maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

## Maximaler Flächeninhalt



Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$ .

Welches eingeschriebene Rechteck (Seiten parallel zu den Koordinatenachsen, siehe Grafik) hat maximalen Flächeninhalt?

←

$$a = 4\sqrt{3} = 6,928, b = 4$$

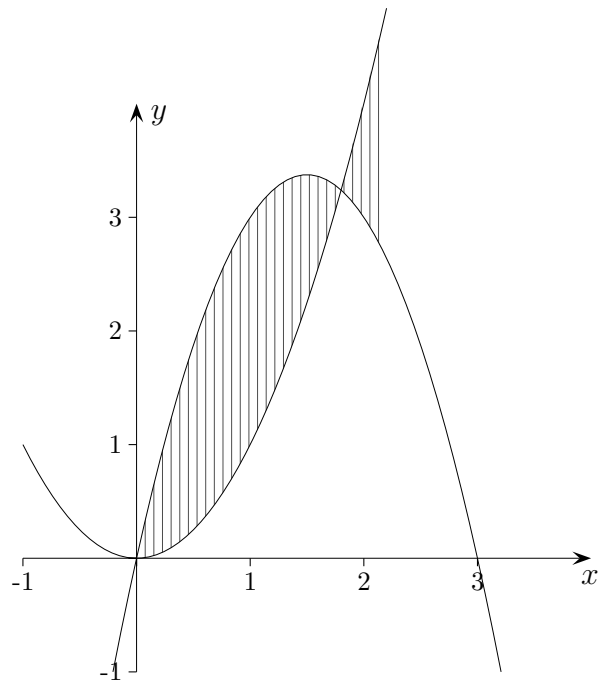
$$A_{\max} = 27,713 \text{ FE}$$

- maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks
- maximale Differenz der Funktionswerte
- minimale Entfernung zum Ursprung
- maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

## Maximale Differenz

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = -\frac{3}{2}x(x - 3)$ .

An welcher Stelle im Intervall  $[0 | 2,2]$  ist die Differenz der Funktionswerte maximal?



←

$$x_{\max} = 0,9 \quad \text{lokal}$$

$$d(x_{\max}) = 2,025 \quad \text{lokal}$$

$$d(0) = 0$$

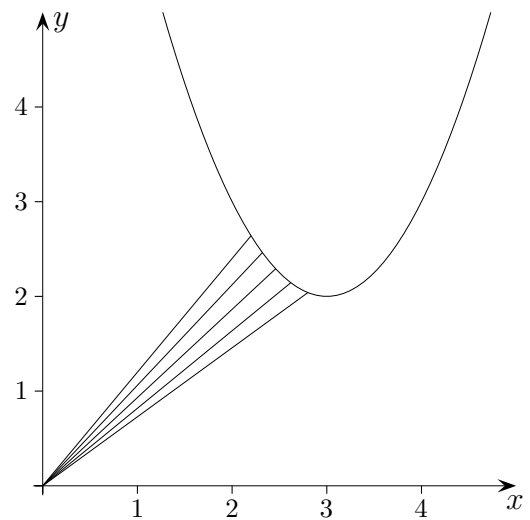
$$d(2,2) = 2,2 \quad \text{Betrag, Randextremum an der Stelle } x = 2,2$$

- maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks
- maximale Differenz der Funktionswerte
- minimale Entfernung zum Ursprung
- maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

## Minimale Entfernung

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ .

Welcher Punkt auf dem Graphen von  $f$  hat vom Ursprung minimale Entfernung?



←

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$$

$$P(2,462 \mid 2,289)$$

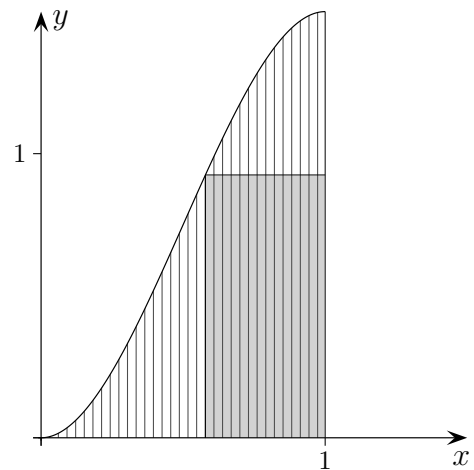
$$d(x_{\min}) = 3,362$$

- maximaler Flächeninhalt eines eingeschriebenen Rechtecks
- maximale Differenz der Funktionswerte
- minimale Entfernung zum Ursprung
- maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

## Maximaler Flächeninhalt

Gegeben ist die Funktion:  $f(x) = -3x^3 + \frac{9}{2}x^2$

Welches in die schraffierte Fläche gelegte Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?



←

$$A(x) = (1 - x) \cdot f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$x_{\max} = 0,578$$

$$A_{\max} = 0,390 \text{ FE}$$



## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

An der Stelle  $x_0$  ist der Funktionswert von  $f$  um 2 größer als der Funktionswert von  $g$ .

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

←

## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

An der Stelle  $x_0$  ist der Funktionswert von  $f$  3mal so groß wie der Funktionswert von  $g$ .

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

←

## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

Die Funktion  $f$  hat im Abstand 4 - in  $x_0$  und  $x_0 + 4$  - gleiche Funktionswerte.

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

←

## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

An der Stelle  $x_0$  ist der senkrechte Abstand der Funktionswerte von  $f$  und  $g$  5.

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

←

## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

Die mittlere Steigung (Änderung, Änderungsrate)  
auf dem Intervall  $[x_0; x_0 + 6]$  der Länge 6 beträgt 1.

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

←

## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

Die prozentuale mittlere Steigung auf dem Intervall  $[x_0; x_0 + 1]$  der Länge 1 beträgt 0,5.

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

←

## Interpretation einer Funktionsgleichung

a)  $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b)  $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c)  $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d)  $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e)  $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f)  $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0,5$

g)  $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0,2$

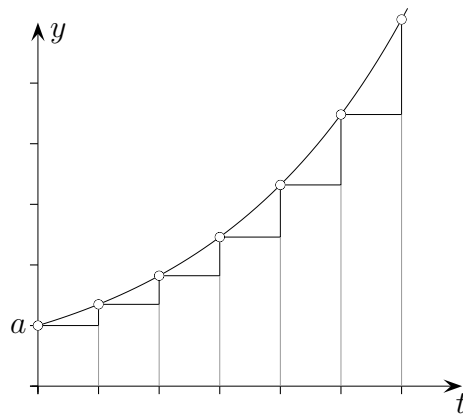
Die prozentuale Änderungsrate an der Stelle  $x_0$  beträgt 0,2.

←

exponentielles Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, zur Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + \frac{p}{100} f(n) \\ &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) f(n), \quad f(0) = a \end{aligned}$$

z.B.  $f(n+1) = 1,03f(n), \quad p = 3\%$



←

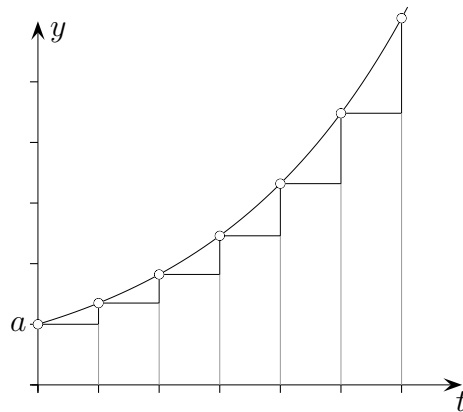


exponentielles Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, zur Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$f(n+1) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)f(n)$$

$$f(t) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t, \quad f(0) = a$$

z.B.  $f(t) = a \cdot 1,03^t, \quad p = 3\%$



←

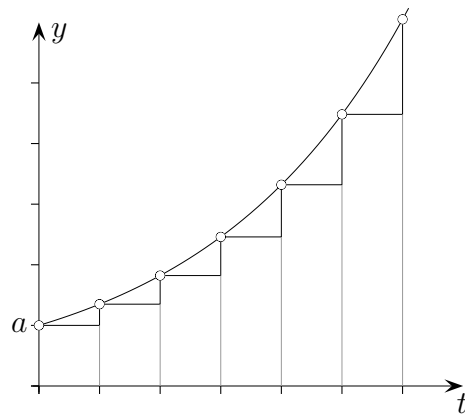
exponentielles Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, zur Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$f(t) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t, \quad f(0) = a$$

$$f(t) = ae^{kt}, \quad k > 0, \quad \text{Wachstumskonstante } k$$

$$e^k = 1 + \frac{p}{100}$$

$$k = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100} \quad \text{für kleines } p$$

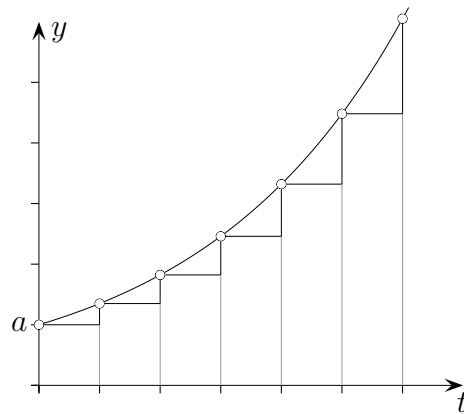


exponentielles Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, zur Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$f(t) = ae^{kt}, \quad k > 0 \quad \text{Wachstumskonstante } k$$

$$f'(t) = kf(t)$$

Beim exponentiellen Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit  $f'(t)$  proportional zum vorhandenen Bestand  $f(t)$ .

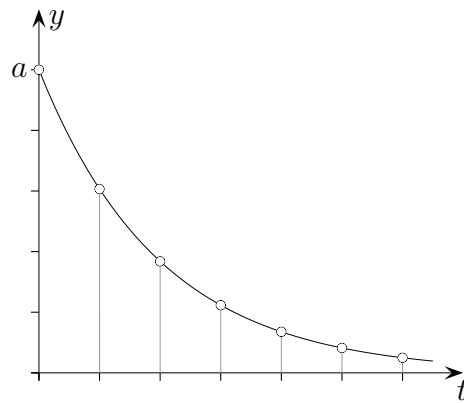


←

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) - \frac{p}{100} f(n) \\ &= \left(1 - \frac{p}{100}\right) f(n), \quad f(0) = a \end{aligned}$$

z.B.  $f(n+1) = 0,97f(n), \quad p = 3\%$



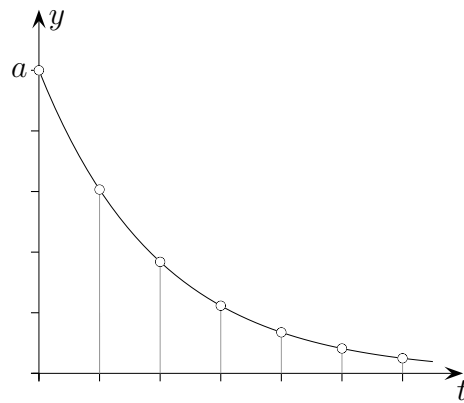
←

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$f(n+1) = \left(1 - \frac{p}{100}\right)f(n)$$

$$f(t) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t, \quad f(0) = a$$

z.B.  $f(t) = a \cdot 0,97^t, \quad p = 3\%$



←

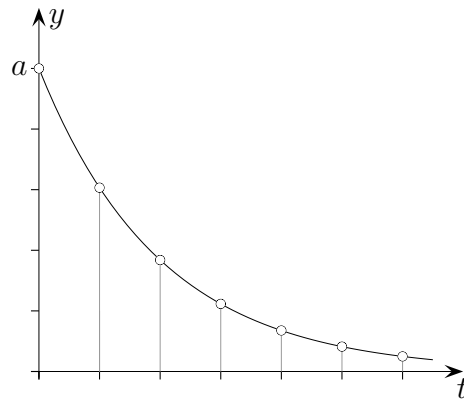
exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$f(t) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t, \quad f(0) = a$$

$$f(t) = ae^{-kt}, \quad k > 0 \quad \text{Abnahmekonstante } k$$

$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$$

$$k = -\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100} \quad \text{für kleines } p$$



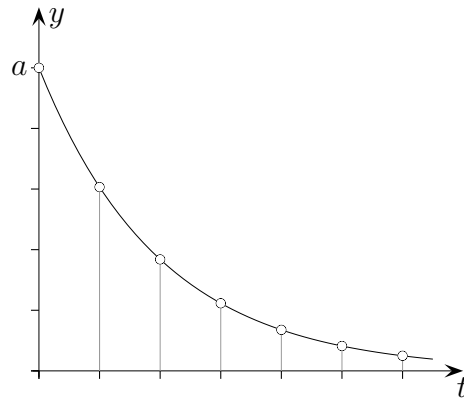
←

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung  
Funktionsgleichung, Basis  $e$   
Differenzialgleichung

$$f(t) = ae^{-kt}, \quad k > 0 \quad \text{Abnahmekonstante } k$$

$$f'(t) = -kf(t)$$

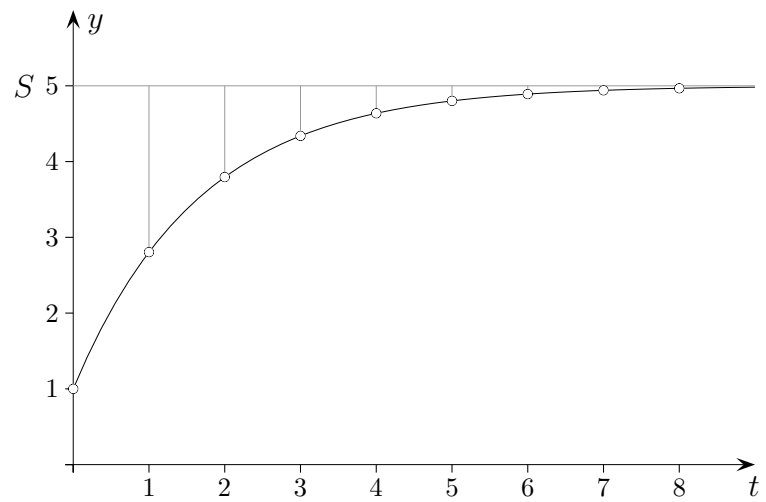
Bei exponentieller Abnahme ist die Abnahmegeschwindigkeit  $f'(t)$  proportional zum vorhandenen Bestand  $f(t)$ .



←

begrenzttes Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100}(S - f(n))$$



←

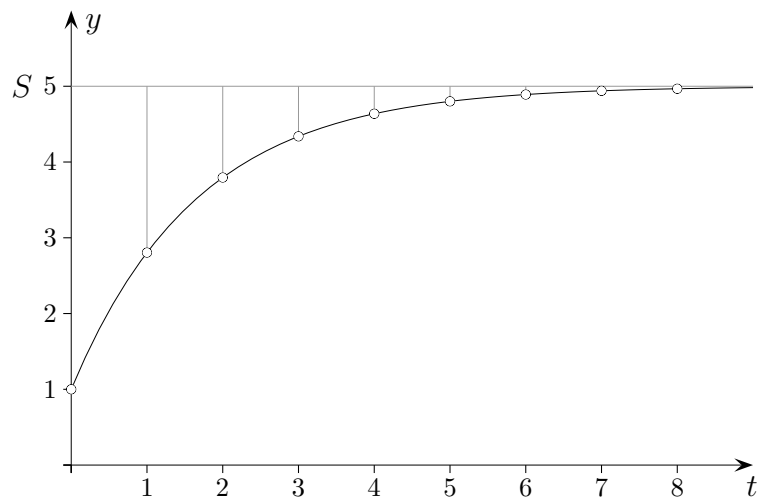


begrenzttes Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100}(S - f(n))$$

$$f'(t) = k(S - f(t)), \quad k > 0$$

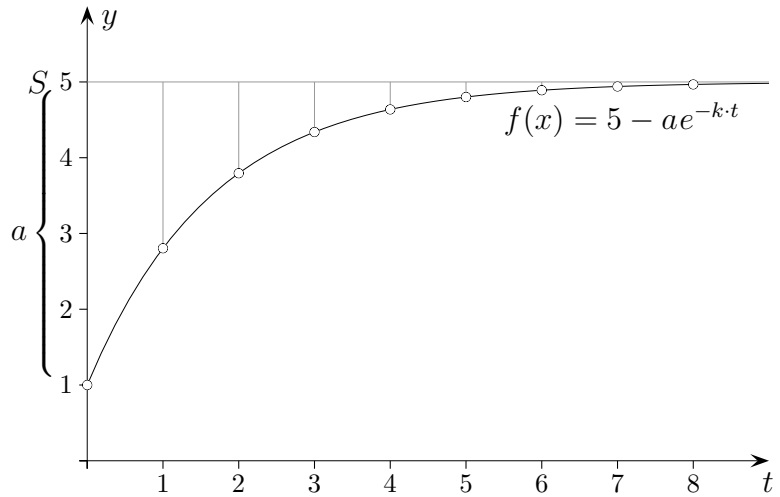
Beim (einfachen) beschränkten Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit  $f'(t)$  proportional zum Sättigungsmanko, d.h. dem Unterschied zwischen der aktuellen Sättigungsgrenze  $S$  und dem Bestand  $f(t)$ .



begrenzttes Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(t) = S - ae^{-kt}, \quad f(0) = S - a$$

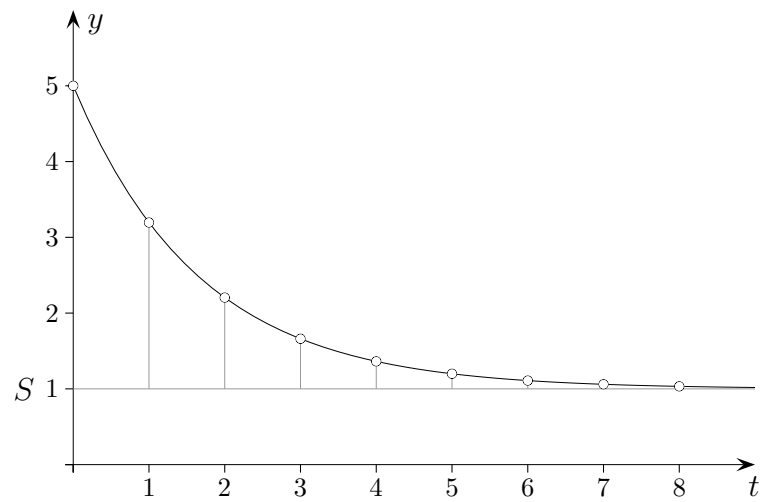
$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100} \quad \text{siehe exponentielle Abnahme}$$



←

begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) - \frac{p}{100}(f(n) - S)$$



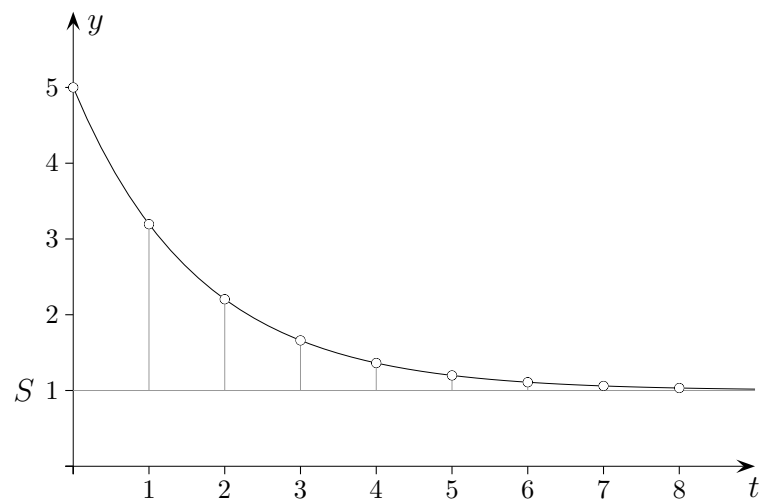
←

begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) - \frac{p}{100}(f(n) - S)$$

$$f'(t) = -k(f(t) - S), \quad k > 0$$

Bei beschränkter Abnahme ist die Abnahmegeschwindigkeit  $f'(t)$  proportional zum Sättigungsmanko, d. h. dem Unterschied zwischen dem aktuellen Bestand  $f(t)$  und der Sättigungsgrenze  $S$ .



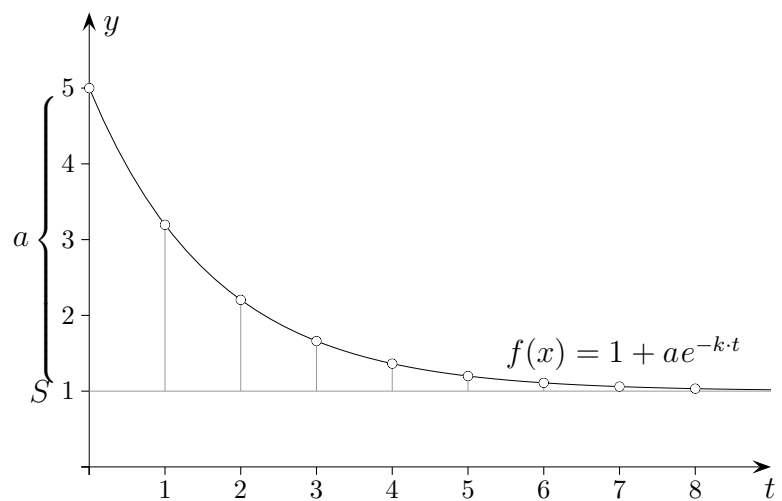
←

begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)  
 iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
 Differenzialgleichung  
 Funktionsgleichung

$$f'(t) = -k(f(t) - S), \quad k > 0$$

$$f(t) = S + ae^{-kt}, \quad f(0) = S + a$$

$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100} \quad \text{siehe exponentielle Abnahme}$$



←

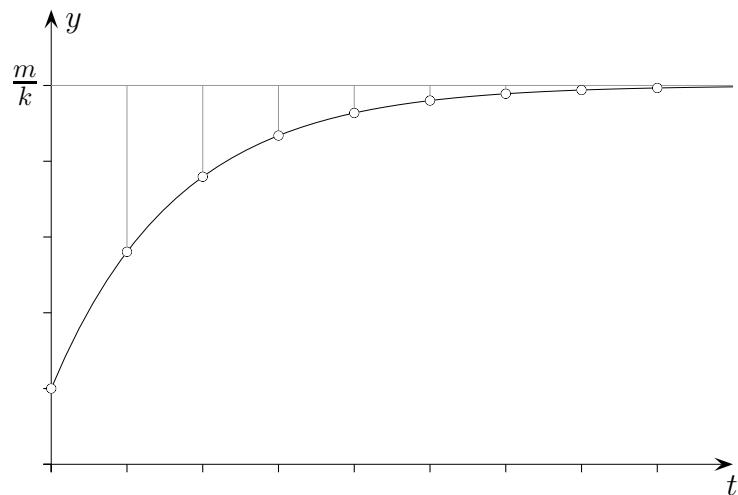
linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)

iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit

Differenzialgleichung

Funktionsgleichung

$$f(n+1) = -\frac{p}{100}f(n) + m$$



←

linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)

iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit

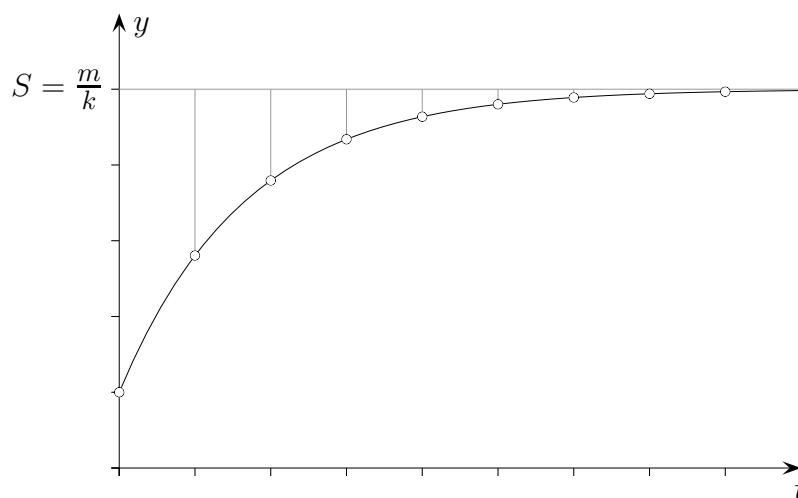
Differenzialgleichung

Funktionsgleichung

$$f(n+1) = -\frac{p}{100}f(n) + m$$

$$f'(t) = -kf(t) + m, \quad k > 0$$

$$f'(t) = k\left(\frac{m}{k} - f(t)\right)$$



←

Für  $S$  gilt:

*Abfluss* = *Zufluss*

$$k \cdot S = m$$

$$S = \frac{m}{k}$$

linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)

iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit

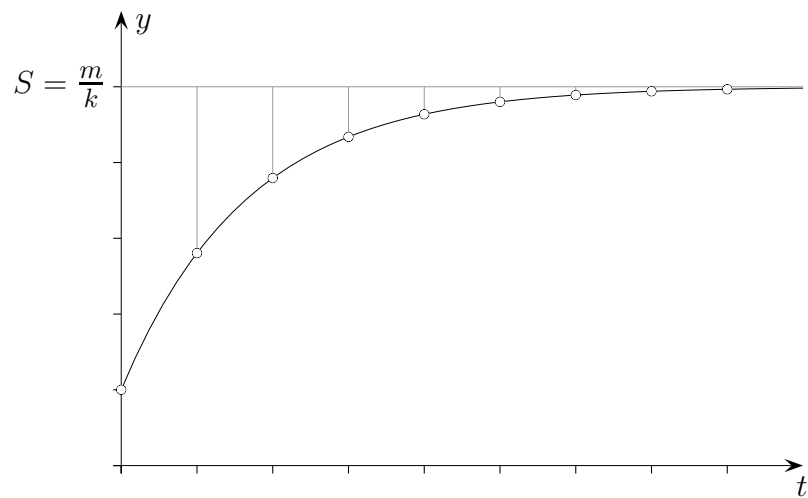
Differenzialgleichung

Funktionsgleichung

$$f'(t) = k\left(\frac{m}{k} - f(t)\right)$$

$$f(t) = \frac{m}{k} + ae^{-kt}, \quad f(0) = \frac{m}{k} + a$$

$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$$

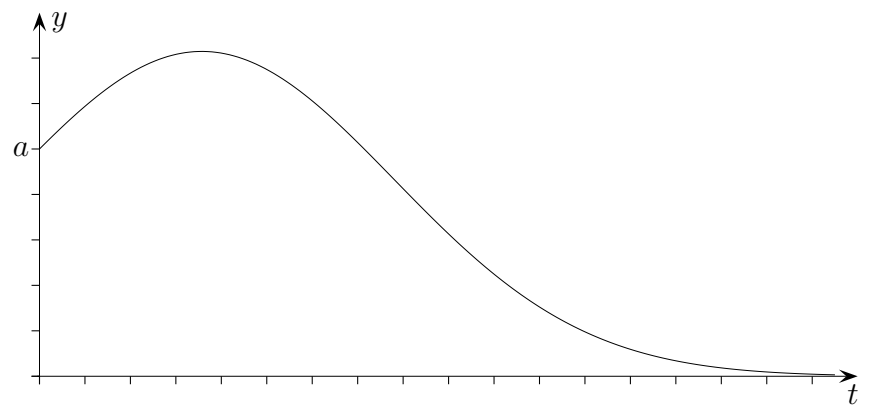




Vergiftetes Wachstum  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f'(t) = (g - st) \cdot f(t)$$

Geburtenrate  $g$   
Sterberate  $st$  (proportional zur Zeit)



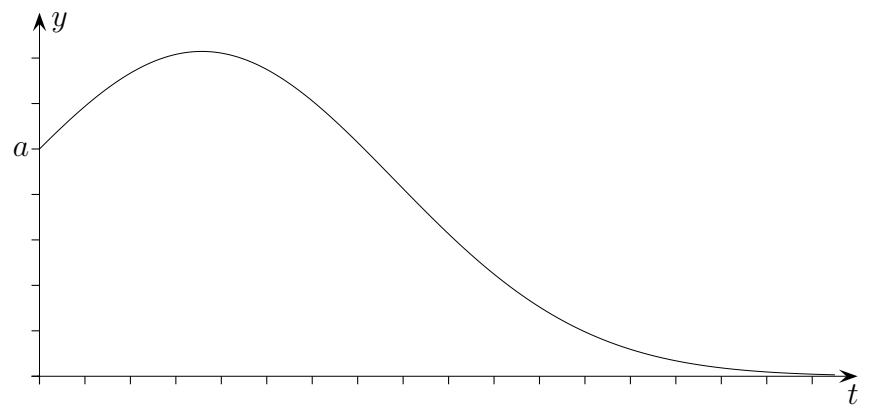
Vergiftetes Wachstum  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f'(t) = (g - st) \cdot f(t)$$

$$f(t) = a e^{gt - \frac{1}{2}st^2}$$

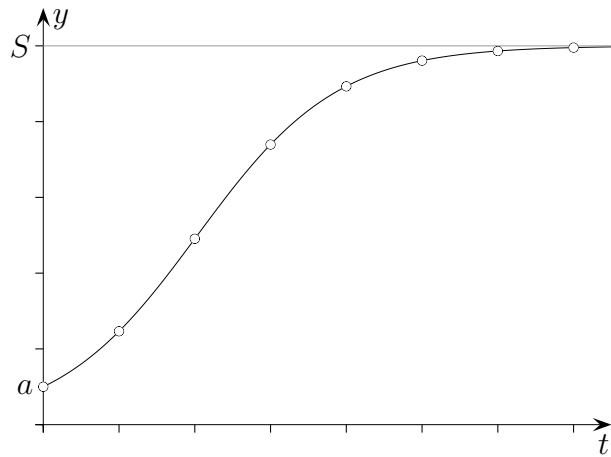
Geburtenrate  $g$

Sterberate  $st$  (proportional zur Zeit)



logistisches Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100} f(n)(S - f(n))$$



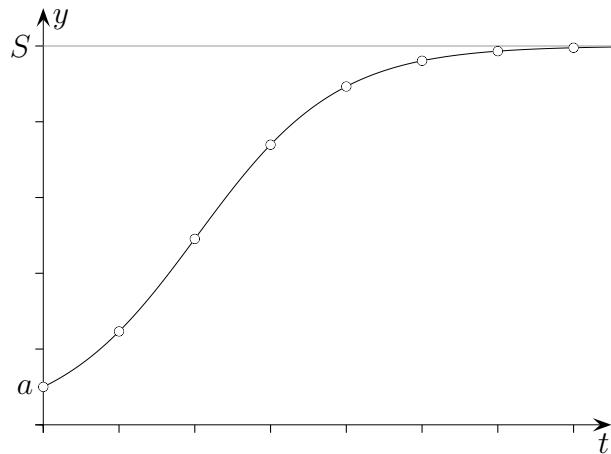
←

logistisches Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100} f(n)(S - f(n))$$

$$f'(t) = kf(t)(S - f(t))$$

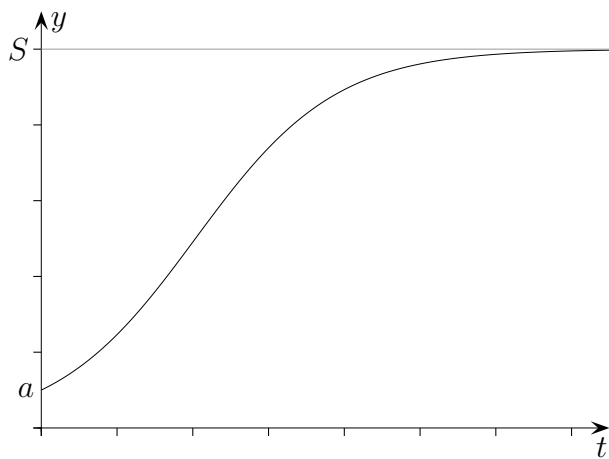
Beim logistischen Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit  $f'(t)$  proportional zum Bestand  $f(t)$  und zum Sättigungsmanko, d.h. dem Unterschied zwischen der Sättigungsgrenze  $S$  und dem aktuellen Bestand  $f(t)$ .



logistisches Wachstum  
iterativ,  $p\%$  pro Zeiteinheit  
Differenzialgleichung  
Funktionsgleichung

$$f'(t) = kf(t)(S - f(t))$$

$$f(t) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-kSt}}, \quad f(0) = a$$



←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$   $f(a) = b$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$   $f(a) = 0$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$   $f(a) = b$   
 $f'(a) = 0$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←



Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$   $f(a) = b$   
 $f''(a) = 0$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$   $f(a) = b$   
 $f''(a) = 0$   
 $f'(a) = 0$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$   $f(a) = b$   
 $f'(a) = m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$   $f(a) = ma + b$   
 $f'(a) = m$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$   $f'(a) = \tan(\alpha)$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

- a)  $P(a | b)$  liegt auf dem Graphen von  $f$
- b) Nullstelle  $x = a$
- c) Extremum  $E(a | b)$
- d) Wendepunkt  $W(a | b)$
- e) Sattelpunkt  $S(a | b)$
- f) in  $A(a | b)$  die Steigung  $m$
- g) Tangente  $y = mx + b$  an der Stelle  $x = a$
- h) Steigungswinkel an der Stelle  $x = a$  (z.B.)  $\alpha = -20^\circ$
- i) 12% Anstieg, d.h. 12  $m$  Höhenzunahme je 100  $m$  in  $x$ -Richtung  $m = 0,12$

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades  $f(x) = ax^2 + b$

b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl  
der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl  
der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

←



Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

$$f(x) = ax^3 + bx$$

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl  
der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

$$f(x) = ax^3 + bx$$

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl  
der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl  
der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

←

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

- a)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades
- b)  $y$ -achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades
- c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades
- d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades
- e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades
- f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

Die Anzahl der Bedingungen liefert einen Hinweis auf den (maximalen) Grad des Polynoms. Für  $n$  Bedingungen ist der Ansatz mit einem Polynom vom Grad  $n - 1$  sinnvoll.

Für einen symmetrischen Ansatz werden nur diejenigen Bedingungen gezählt, die sich entweder rechts oder links von der  $y$ -Achse (einschließlich) ergeben.

Wenn die Bedingungen nur notwendig sind, muss überprüft werden, ob die Funktion das Ausgangsproblem löst. Ein unterbestimmtes Gleichungssystem (Anzahl der Gleichungen ist kleiner als die Anzahl der Variablen) führt zu einer Funktionenschar.

←

Gegeben ist die Funktionenschar:

$$f_k(x) = 3x^2 - \frac{3}{k}x^3, \quad k > 0.$$

Für sie gilt:

$$\text{Max}\left(\underbrace{\frac{2}{3}k}_x \mid \underbrace{\frac{4}{9}k^2}_y\right)$$

Um die Funktion zu ermitteln, auf deren Graph (Ortskurve) die Maxima liegen, eliminieren wir  $k$ .

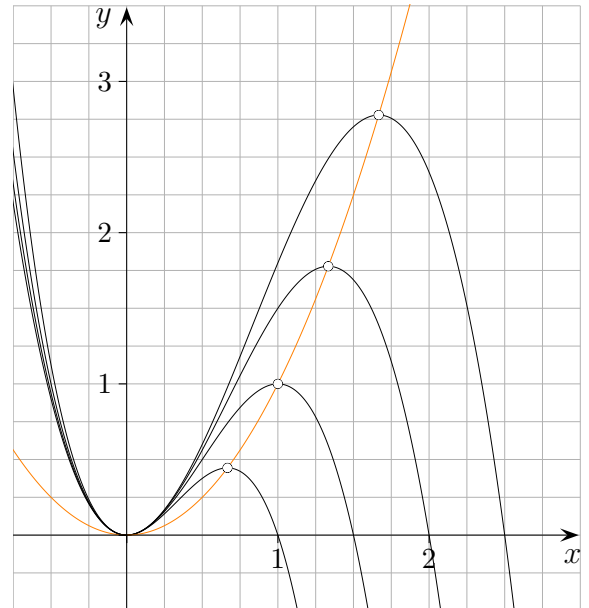
$$x = \frac{2}{3}k \quad \text{indem wir die 1. Gleichung nach } k$$

$$y = \frac{4}{9}k^2$$

auffösen und anschließend den Term für  $k$  in die 2. Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

$$y = x^2$$

←

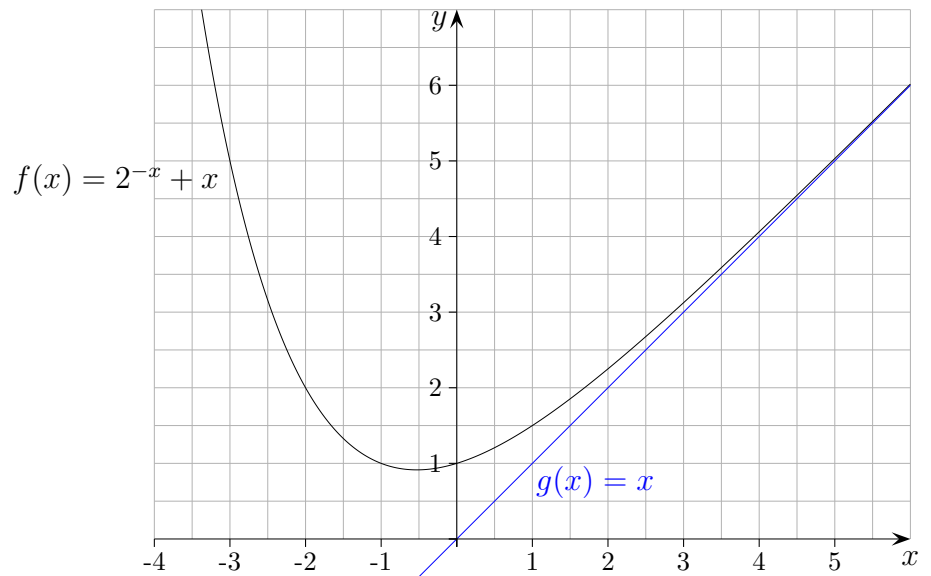


Eine Gerade  $g(x) = mx + b$  heißt *Asymptote* der Funktion  $f$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Eine Funktion kann zwei Asymptoten besitzen,  
 $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  sind beides zu untersuchen.

Der häufigste Fall ist, dass die Asymptote parallel zur  $x$ -Achse liegt. Die Asymptote  $y = a$  wird dann durch die Bestimmung von  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  bzw.  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  gewonnen.



←