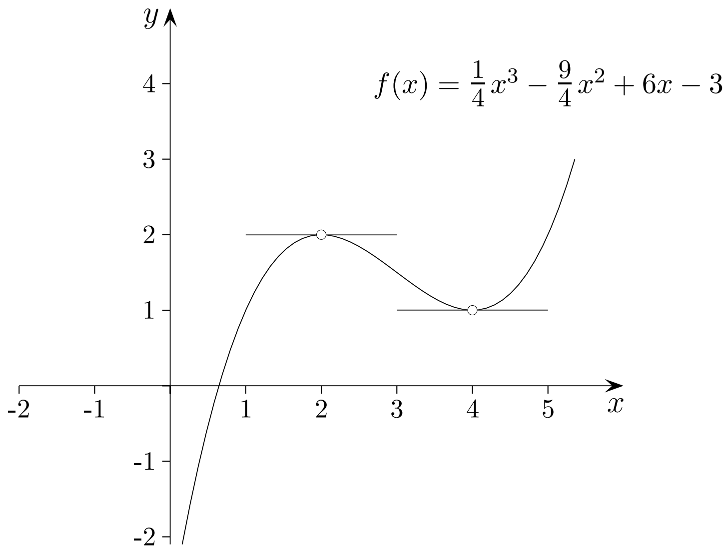
Notwendige und hinreichende Bedingungen

1. Extrema:

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums an der Stelle x_0 ist das Vorliegen einer waagerechten Tangente, d. h. also $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend für die Existenz eines Extremums, es könnte auch ein Sattelpunkt vorliegen.

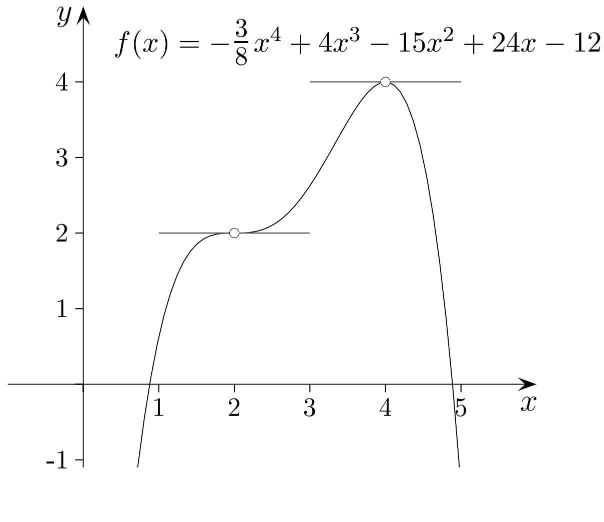


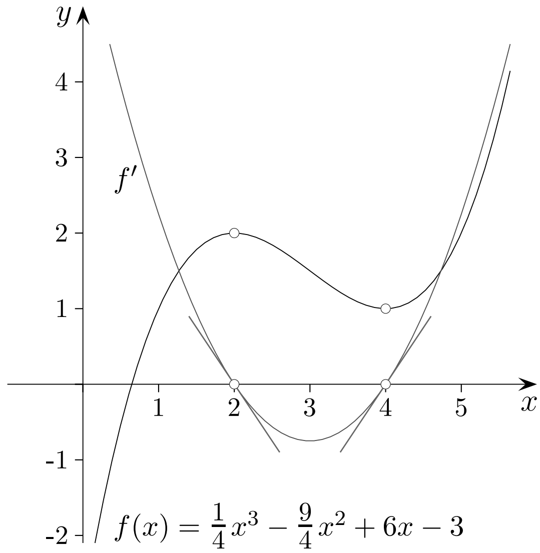
notwendig: Was brauche ich?
hinreichend: Was reicht aus?

Hinreichend wäre:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ für ein Maximum und
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ für ein Minimum.

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$ sind nicht notwendig für die Existenz eines Extremums, siehe das Gegenbeispiel $f(x) = x^4$.





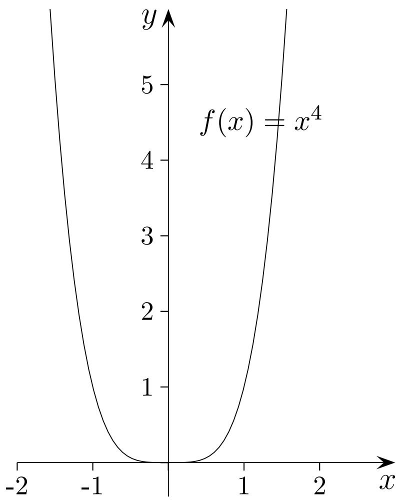
Notwendige und hinreichende Bedingungen

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist, können wir nicht entscheiden, ob ein Extremum vorliegt, dies würde sich aus einer Untersuchung noch höherer Ableitungen ergeben, was aber in der Schule unterbleibt. Durch die Untersuchung auf Wendepunkte wird die Situation ohnehin in vielen Fällen geklärt.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \end{aligned}$$

$Min(0 \mid 0)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= 0 \end{aligned}$$



2. Wendepunkte:

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle x_0 (dem Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt) ist das Vorliegen einer waagerechten Tangente an den Graphen von f' an dieser Stelle, d. h. $f''(x_0) = 0$.

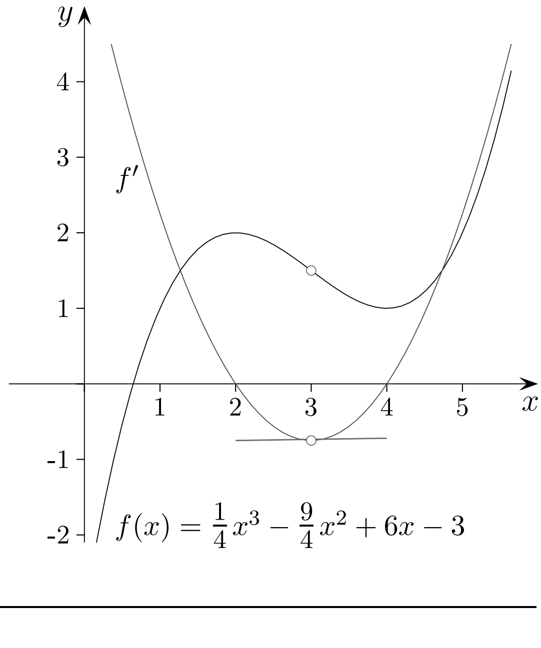
Diese Bedingung ist nicht hinreichend, siehe $f(x) = x^4$.

Hinreichend (und notwendig) für die Existenz eines Wendepunktes wäre, dass f' an der Stelle x_0 ein Extremum hat (Begründung?), hinreichend wäre also

$f''(x_0) = 0 \quad$ und $\quad f'''(x_0) > 0 \quad$ (Minimum von f') oder
$f''(x_0) = 0 \quad$ und $\quad f'''(x_0) < 0 \quad$ (Maximum von f'),

Die hinreichenden Bedingungen für einen Wendepunkt lauten zusammengefasst:
$f''(x_0) = 0 \quad$ und $\quad f'''(x_0) \neq 0$

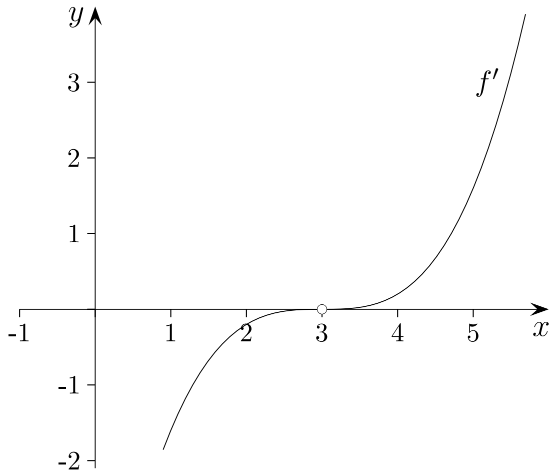
Ein Wendepunkt mit $f'(x_0) = 0$ heißt Sattelpunkt.



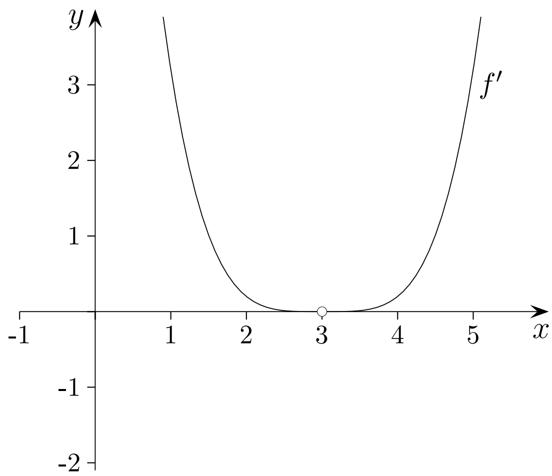
Nachdenkenswertes

Was kann über den Verlauf von f an der Stelle $x = 3$ ausgesagt werden?

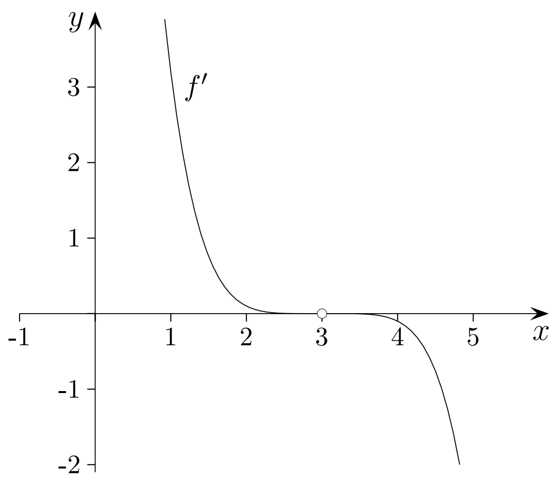
a)



b)



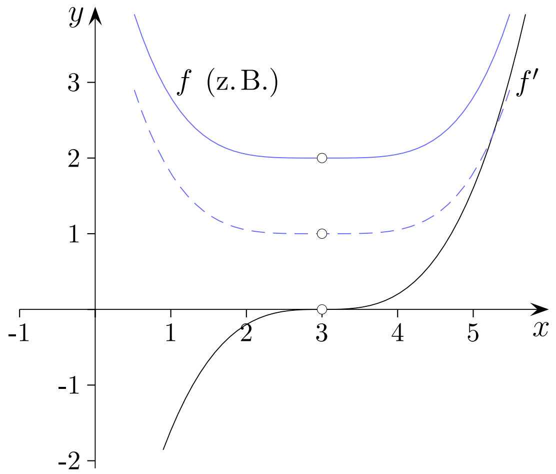
c)



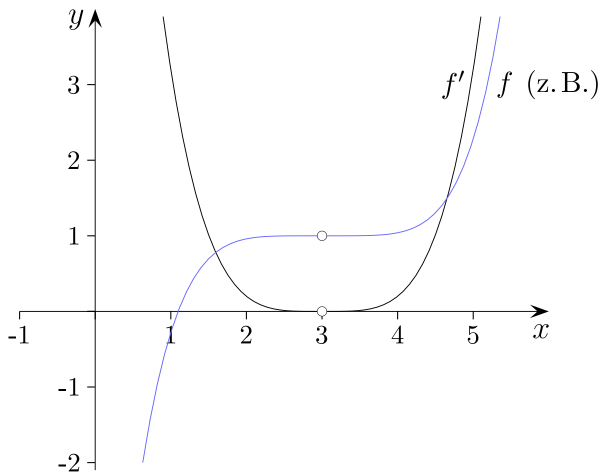
Vorzeichenwechsel von f' beachten

Was kann über den Verlauf von f an der Stelle $x = 3$ ausgesagt werden?

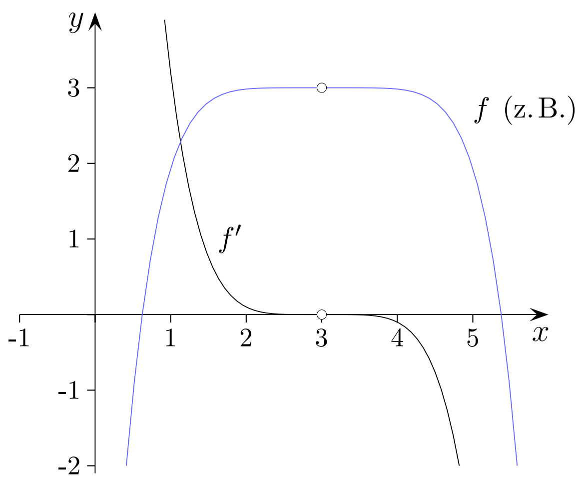
a)



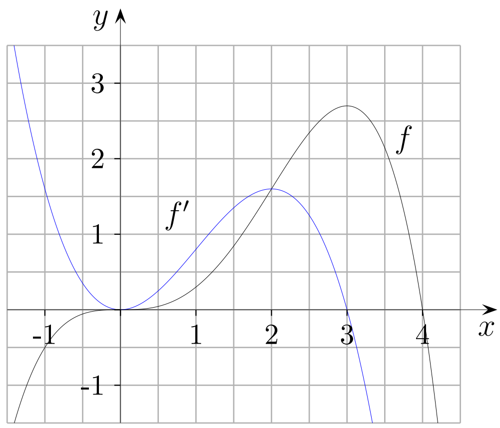
b)



c)



Vorzeichenwechsel



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^3(4 - x)$.
Um das Extremum ohne GTR nachzuweisen, ermitteln wir die
1. Ableitung: $\quad f'(x) = -\frac{2}{5}x^2(x - 3)$
An den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ wird f' gleich null.

Der algebraische Nachweis des Maximums kann auch ohne die 2. Ableitung erbracht werden. Hierzu ist neben $f'(x_2) = 0$ zu zeigen, dass f' in einer Umgebung von x_2 fällt, dass also in einer Umgebung von x_2 für kleinere Werte von x_0 $\quad f'(x) > 0$ und für größere Werte $f'(x) < 0$ gilt, dass also ein $+/-$ Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x_2 vorliegt.

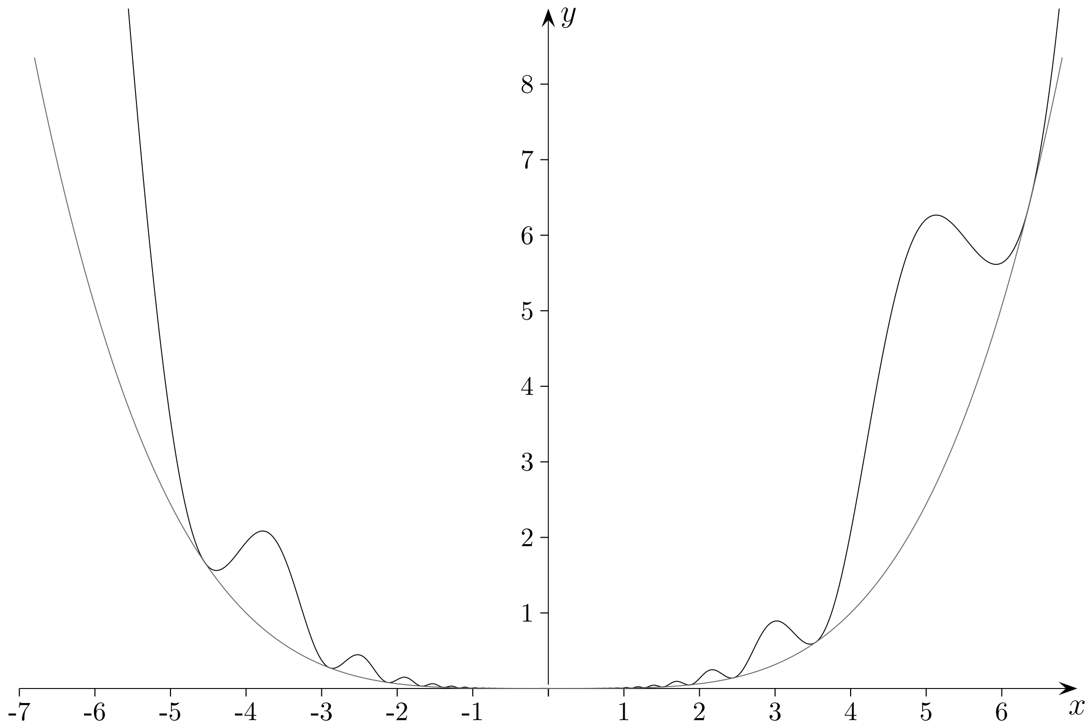
Dies kann übersichtlich in einer Vorzeichentabelle notiert werden:

$f'(x) = 0$	0		3	
$-x^2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$+$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	Sattelpunkt		*Max*	

Das Produkt $-x^2 \cdot (x - 3)$ bestimmt das Vorzeichen.

Wenn aus der Formulierung einer Aufgabe die Existenz eines Extremums (eines Wendepunkts) hervorgeht, reicht die notwendige Bedingung aus, um die entsprechende Stelle zu ermitteln.

Vorzeichenwechsel ist nicht notwendig



für ein Extremum, nur hinreichend.
Ein Vorzeichenwechsel liegt vor, wenn die Ableitung in einer linksseitigen Umgebung ≤ 0 ist und in einer rechtsseitigen Umgebung ≥ 0 (Minimum, für ein Maximum ist es umgekehrt).

$$f(x) = \begin{cases} (2 - \sin(50/x)) \cdot (x/4)^4 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \quad\quad x = 0 \end{cases}$$

f hat ein Minimum bei $x = 0$. Die Ableitung hat aber keinen Vorzeichenwechsel bei $x = 0$ (zumindest plausibel).