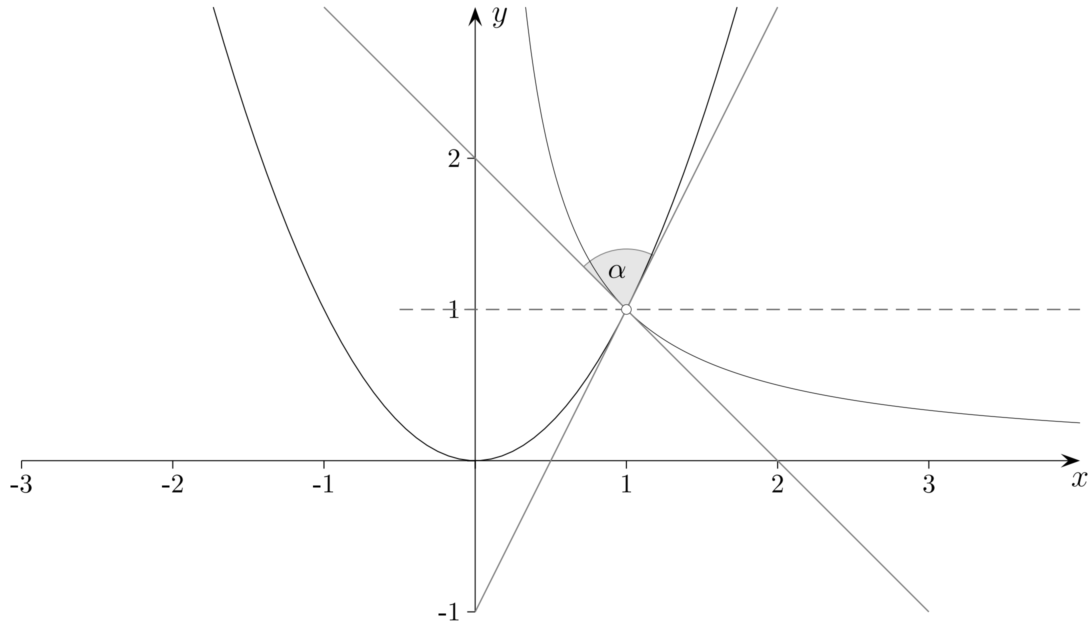
Schnittwinkel von Graphen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen?

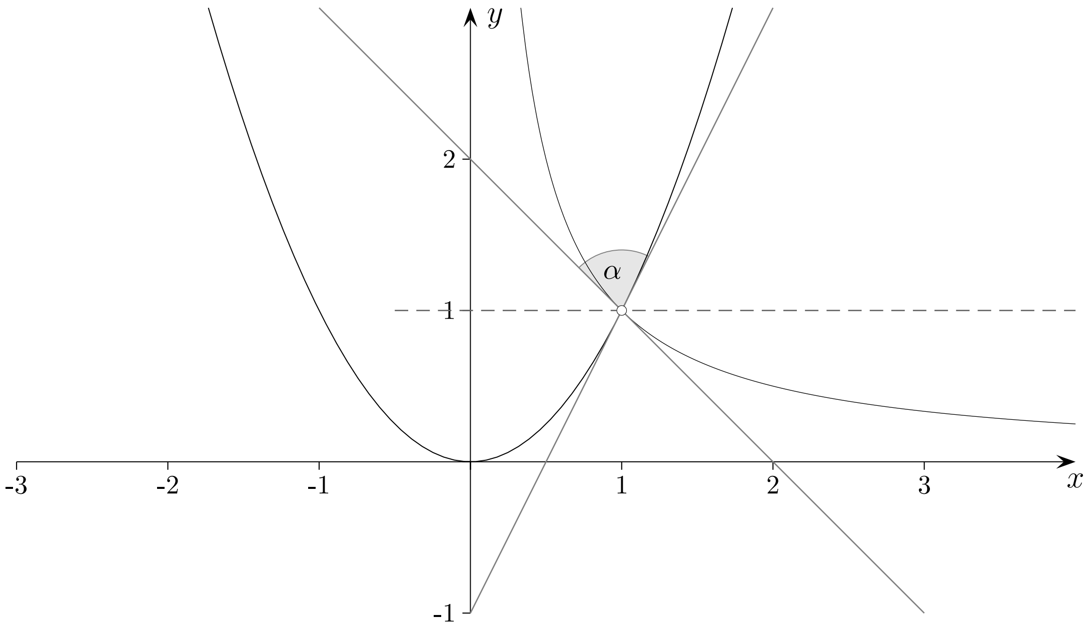


Schnittwinkel von Graphen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen?



Lösung:

$f'(1) = 2$
$g'(1) = -1$
$\tan(\alpha_1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 63{,}4^\circ$
$\tan(\alpha_2) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = -45^\circ$

$\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 63{,}4^\circ = 71{,}6^\circ$

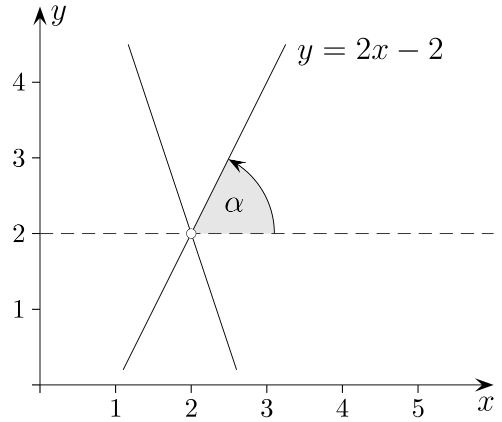
Variation der Aufgabe
$g(x) = x + 2$
Unter welchen Winkeln schneiden sich die Graphen von f und g?

Lösung:

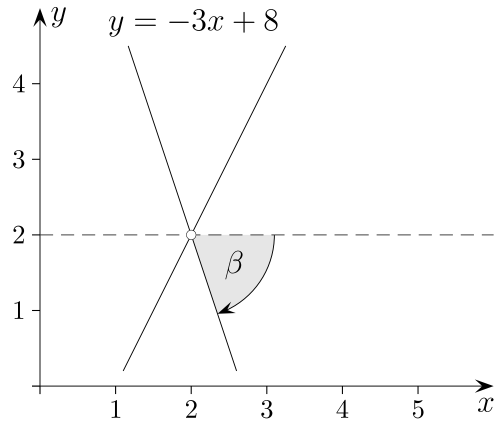
$x_1 = -1,\ \alpha = 71{,}6^\circ$

$x_2 = 2,\ \beta = 31{,}0^\circ$

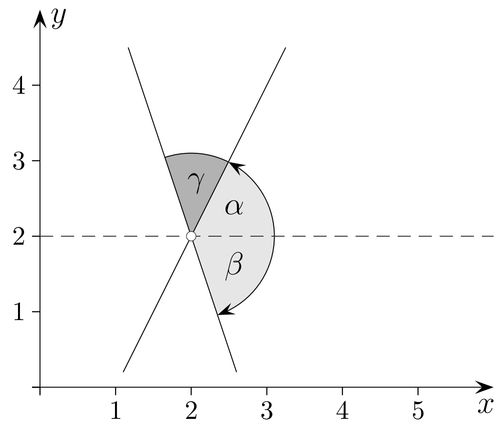
Orientierte Winkel



$$\alpha = \arctan(2) = 63{,}43°$$

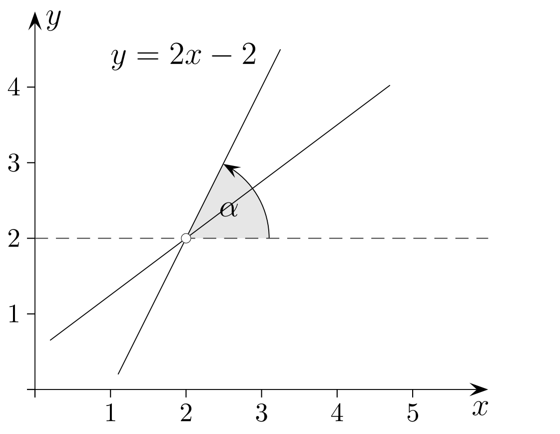


$$\beta = \arctan(-3) = -71{,}57°$$

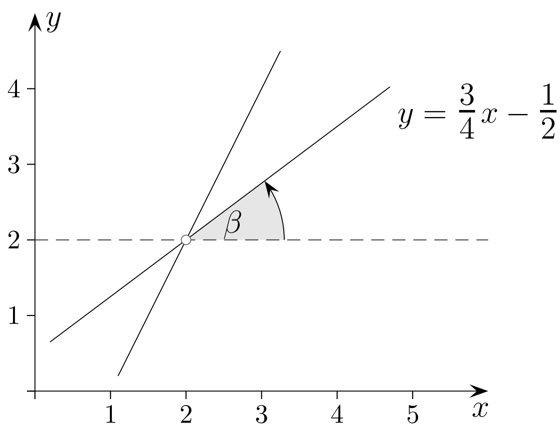


$$\gamma = 180° - 71{,}57° - 63{,}43° = 45{,}0°$$

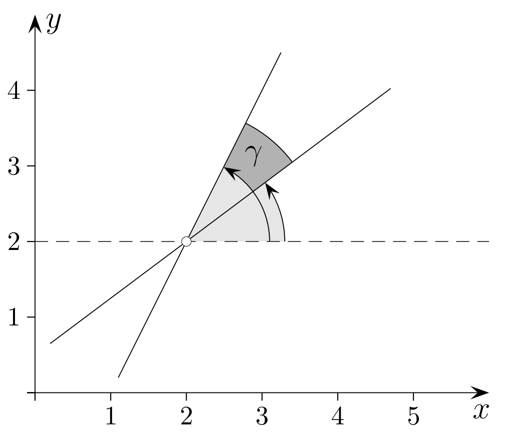
Winkel



$\alpha = \arctan(2) = 63{,}43°$

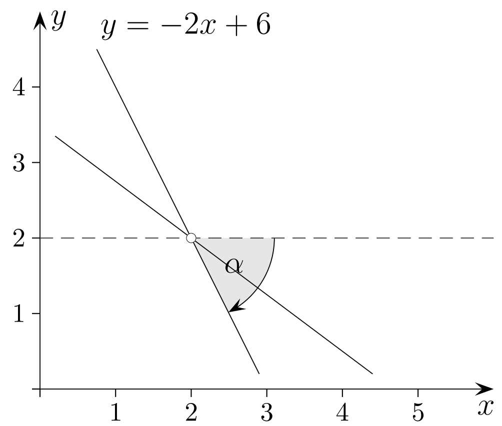


$\beta = \arctan(\frac{3}{4}) = 36{,}87°$

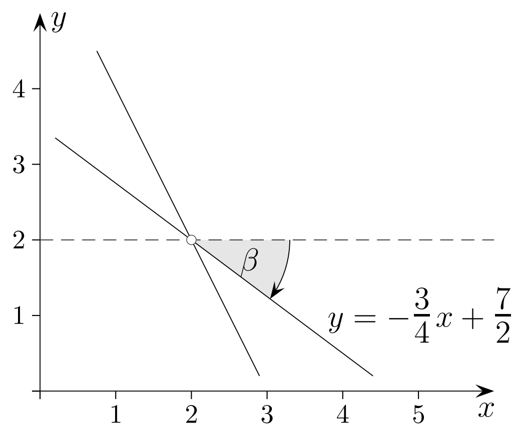


$\gamma = 63{,}43° - 36{,}87° = 26{,}6°$

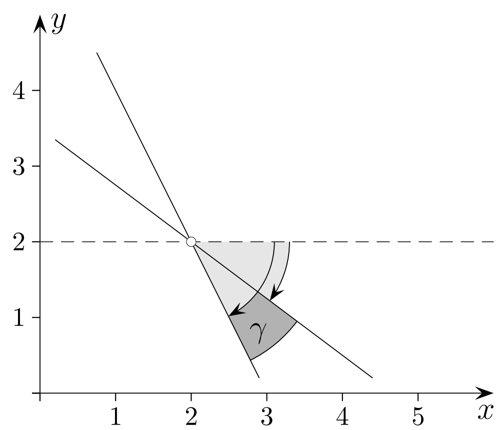
Winkel



$\alpha = \arctan(-2) = -63{,}43°$



$\beta = \arctan(-\frac{3}{4}) = -36{,}87°$



$\gamma = 63{,}43° - 36{,}87° = 26{,}6°$

Schnittwinkel von Graphen

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen der Funktionen?

a) $f(x) = 2x + 3, \;\; g(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 8, \;\; g(x) = -x^2 + 10$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; g(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = x(2 - x), \;\; g(x) = -x + \dfrac{9}{4}$

Der Schnittwinkel α zwischen Geraden (Tangenten) mit den Steigungen m_1 und m_1 (Ableitungen an einer Stelle) kann mit

$$\alpha = \left|\, \tan^{-1}(m_2) - \tan^{-1}(m_1) \right|$$

ermittelt werden.
Die Reihenfolge ist wegen der Betragsstriche unerheblich.
Für $\alpha > 90°$ gehe man zu $180° - \alpha$ über.

Alternativ kann

$$\tan\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

verwendet werden.
Mit dieser Formel wird stets der kleinere Winkel von α und $180° - \alpha$ berechnet.
Die Reihenfolge ist unerheblich.
Gilt für die Steigungen $m_1 m_2 = -1$, so schneiden sich die Geraden rechtwinklig.

Für die Herleitung der Formel wird das Additionstheorem des Tangens benötigt.

Schnittwinkel von Graphen

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen der Funktionen?

a) $f(x) = 2x + 3, \;\; g(x) = x + 2$ — 18,4°

b) $f(x) = x^2 - 8, \;\; g(x) = -x^2 + 10$ — $x_s = \pm 3, \;\; 18{,}9°$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; g(x) = \dfrac{1}{x}$ — $x_s = 1, \;\; 71{,}6°$

d) $f(x) = x(2 - x), \;\; g(x) = -x + \dfrac{9}{4}$ — $x_s = \dfrac{3}{2}, \;\; 0°$ (Tangente)

Startseite