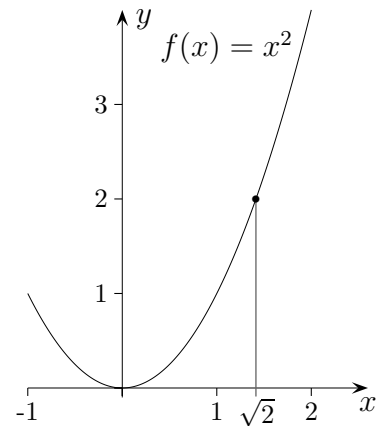


Stetigkeit



$\sqrt{2}$ ins Quadrat genommen ergibt 2. Nehmen wir für $\sqrt{2}$ eine Näherung, z. B. $\sqrt{2} = 1,41$, so liegt das Quadrat, nämlich 1,9881, in der Nähe von 2. Nehmen wir eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$, so läge das Quadrat der Näherung noch dichter an der 2.

Für jede Folge, die gegen $\sqrt{2}$ strebt, streben die Quadrate gegen 2, z.B.:

$$1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots \rightarrow \sqrt{2}$$

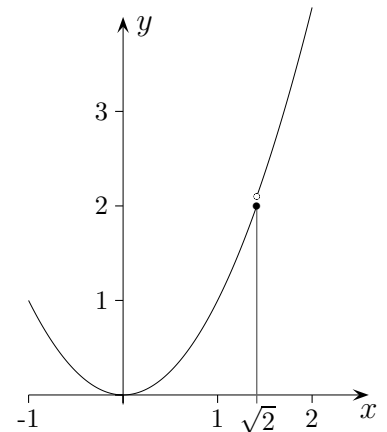
Folge der Quadrate:

$$1,96; 1,98; 1,9993; 1,99996; \dots \rightarrow 2$$

Was bedeutet diese uns vertraute Eigenschaft anschaulich für die Funktion $f(x) = x^2$?

Für Werte, die dicht bei $\sqrt{2}$ liegen, liegen die Funktionswerte dicht bei 2.

Diese Überlegungen gelten natürlich nicht nur für die Stelle $x = \sqrt{2}$, sondern für jeden x -Wert. Daher ist der Graph von $f(x) = x^2$ zusammenhängend, er kann ohne abzusetzen gezeichnet werden.



Zum Vergleich betrachte man die an der Stelle $x = \sqrt{2}$ unstetige Funktion

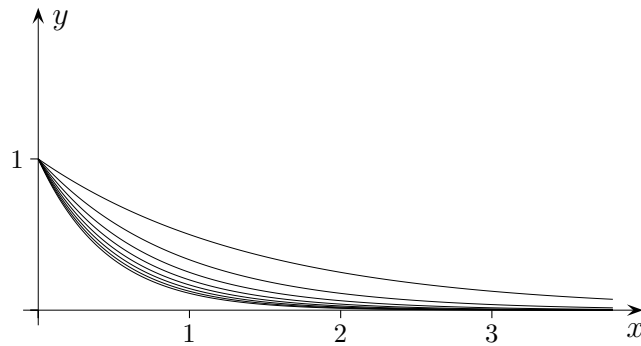
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq \sqrt{2} \\ x^2 + 0,1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Eine Funktion f ist stetig an einer Stelle a , wenn für jede Folge, die gegen a strebt, die Folge der Funktionswerte gegen $f(a)$ strebt.

Eine Funktion ist stetig, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Die uns bekannten Funktionen sind stetig, auch $f(x) = \frac{1}{x}$, jedoch ist diese Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

Stetigkeit



Die Stetigkeit kann bei Grenzprozessen verlorengehen, betrachte hierzu die Funktionen

$$f_n(x) = n^{-x}, \quad x \geq 0 \quad \text{und}$$

$$k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

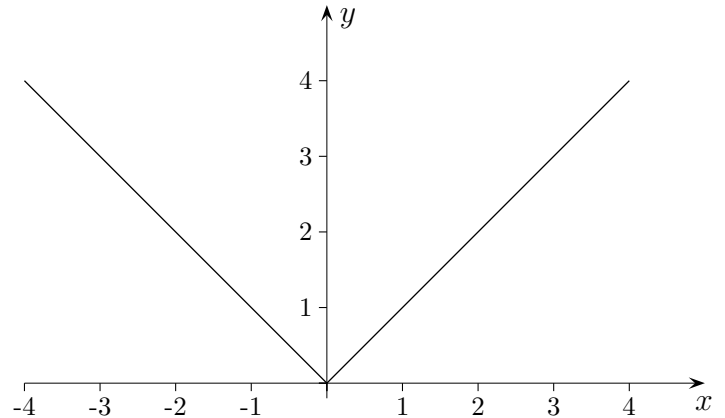
Stetigkeitsnachweise sind im allgemeinen recht schwierig. Es gilt zum Beispiel der Satz:

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Die Umkehrung des Satzes ist falsch.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$



An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$$

Auf eine Grenzwertbildung kann im Allgemeinen verzichtet werden, denn es gilt:

Eine zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ f_2(x) & x \geq a \end{cases}$$

mit $f_1(a) = f_2(a)$ ist an der Stelle a differenzierbar, falls $f_1'(a) = f_2'(a)$ ist. (Rechtsseitige und linksseitige Ableitungen müssen übereinstimmen.)

Aufg.

Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x - 4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x - 4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

2. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x - 4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

Zwischenergebnis:

$$1 = 4a + b$$

$$-4 = -4a$$

$$\implies a = 1 \text{ und } b = -3$$

2. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist?

Stetigkeit muss auch vorliegen.

Zwischenergebnis:

$$2a - b = -3$$

$$4 + a = b$$

$$\implies a = 1 \text{ und } b = 5$$