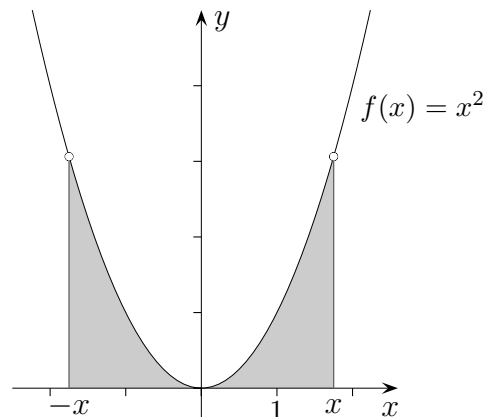


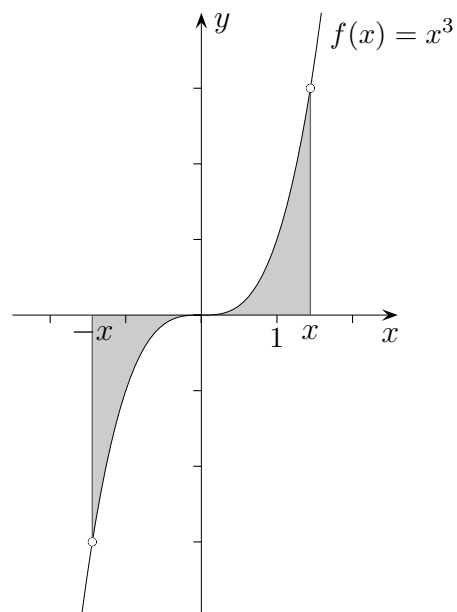
Symmetrie von Graphen



Wir untersuchen Funktionsgraphen auf Symmetrie.

- a) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Für x -Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, ergeben sich dieselben Funktionswerte.

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y -Achse, falls $f(x) = f(-x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich ist.

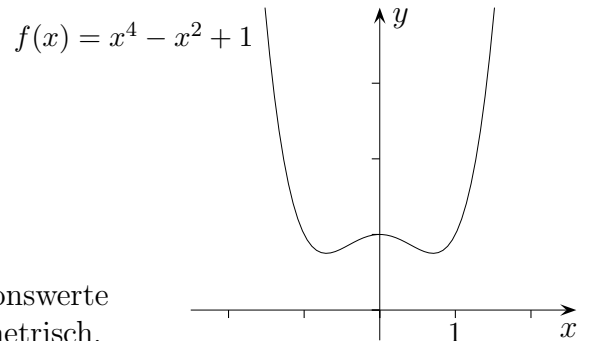


- b) Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für x -Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, haben die Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen.

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich ist.

Symmetrie

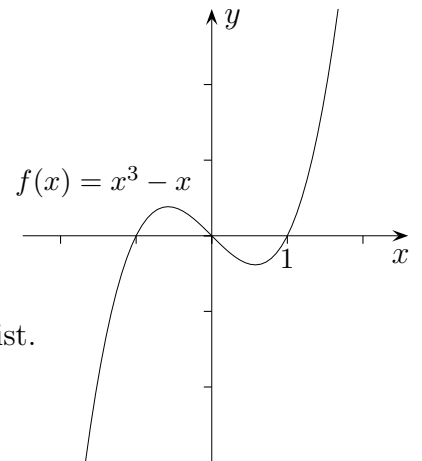
Die Symmetrie von Polynomen lässt sich leicht erkennen.



Wir betrachten das Beispiel: $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Aufgrund der geraden Exponenten stimmen die Funktionswerte für x und $-x$ überein, der Graph ist daher achsensymmetrisch.

Falls nur ungerade Exponenten vorhanden sind, wie z.B. für $f(x) = x^3 - x$, und der Graph durch den Ursprung verläuft, liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor, wie leicht nachzurechnen ist.



$$\begin{aligned} f(-x) &\stackrel{?}{=} -f(x) \\ (-x)^3 - (-x) &\stackrel{?}{=} -(x^3 - x) \\ -x^3 + x &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Der Graph eines Polynoms mit nur geraden Exponenten ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

Beispiel: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 5$

Der Graph eines Polynoms mit nur ungeraden Exponenten ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn überdies der konstante Summand Null ist.

Beispiel: $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

nicht punktsymmetrisch wäre: $f(x) = x^5 - x^3 + 2$

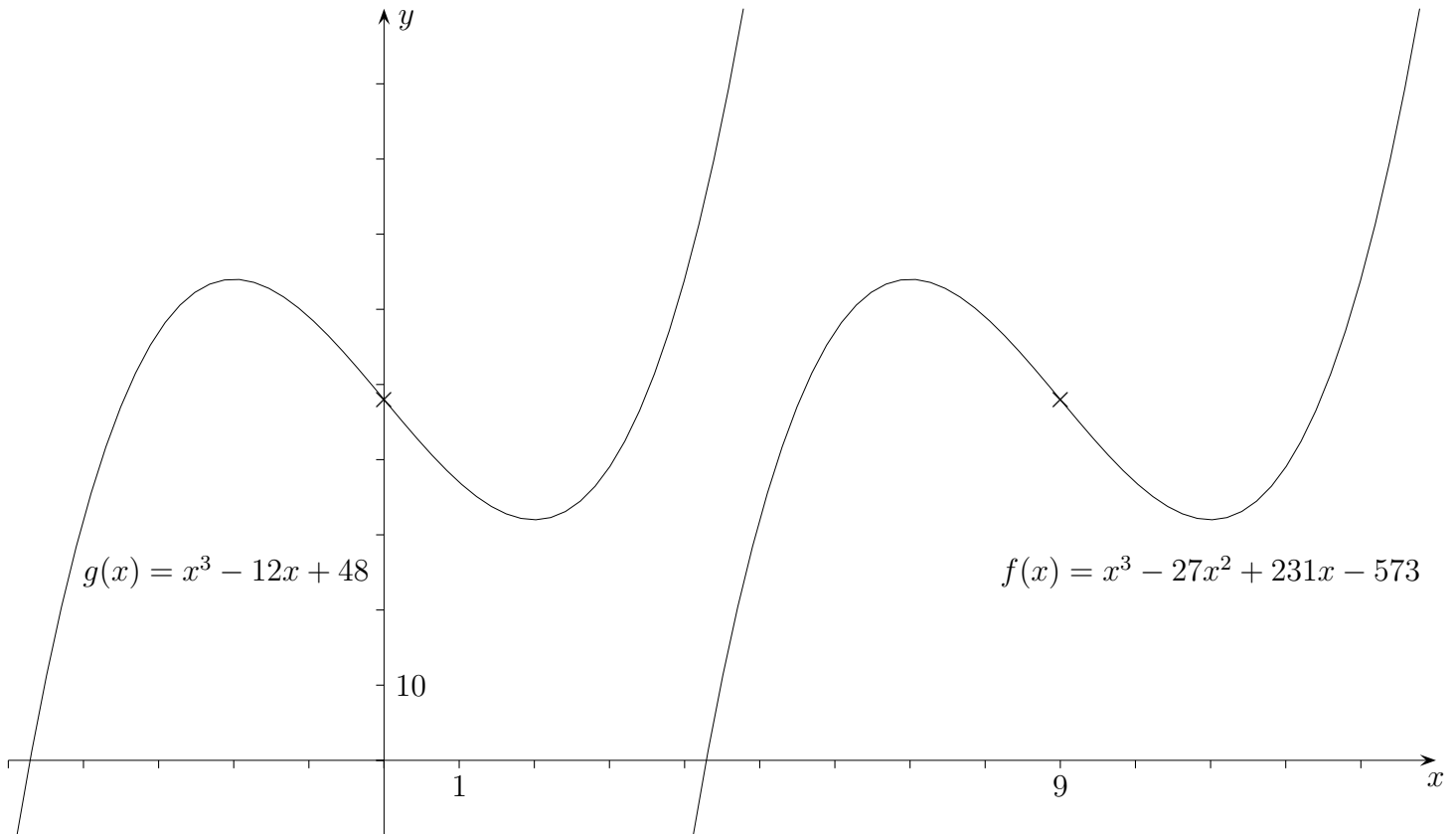
Von diesen Sätzen gelten auch die Umkehrungen, so dass also z.B. der Graph von $f(x) = x^4 + 3x^3$ aufgrund der gemischten Exponenten weder y -achsensymmetrisch, noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Man kann zeigen, dass ein Polynom 3. Grades stets punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.

Punktsymmetrie zum Wendepunkt

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f''(x) = 0 \implies x_w = -\frac{b}{3}$$



$$g(x) = f(x + x_w)$$

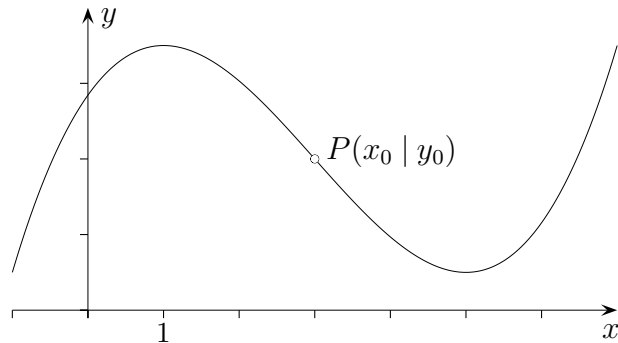
$$g(x) = x^3 - \left(c - \frac{b^2}{3}\right)x + y_w$$

$$y_w = \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$$

Aufg.

Erläutere die Beweisidee und führe den Nachweis genauer aus.

Punktsymmetrie



Erläutere:

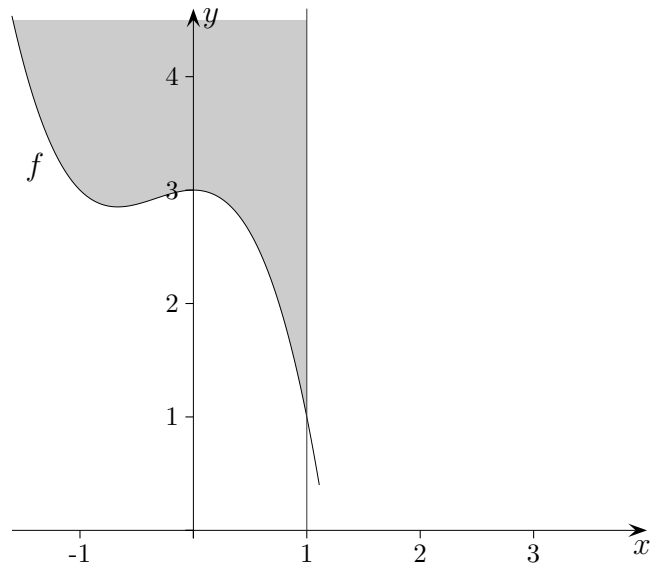
Der Graph von f ist genau dann punktsymmetrisch zu $P(x_0 | y_0)$, falls gilt:

$$f(x + x_0) - y_0 = -(f(-x + x_0) - y_0)$$
$$\iff f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$$

Hinweis:

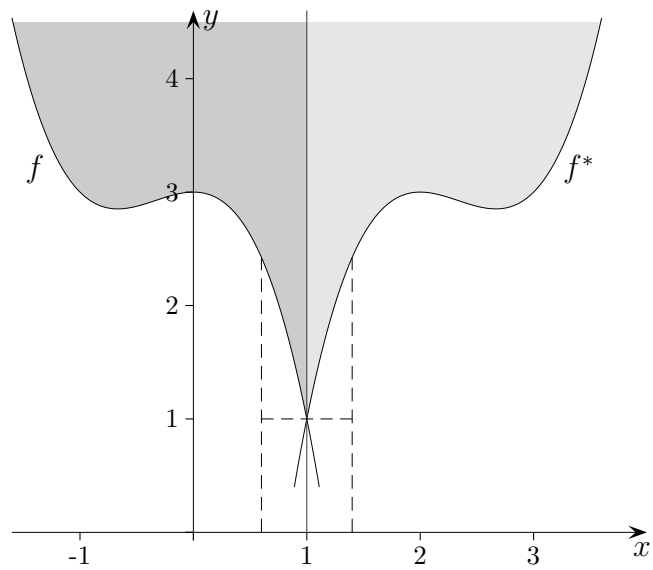
Für die Punktsymmetrie zum Ursprung kann $f(x) + f(-x) = 0$ unmittelbar gesehen werden. Ähnlich offensichtlich ist $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$ für die Punktsymmetrie zu $P(x_0 | y_0)$.

Graphen spiegeln



Der Graph von $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$ wird an der Geraden $x_s = 1$ gespiegelt.
Ermittle den zugehörigen Funktionsterm.

Graphen spiegeln



Der Graph von $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$ wird an der Geraden $x_s = 1$ gespiegelt.
Ermittle den zugehörigen Funktionsterm.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x_s - (x - x_s)) \\ &= f(2x_s - x) \\ &= -(2 - x)^3 - (2 - x)^2 + 3 \end{aligned}$$