

Exponentialfunktionen

1. Eine Lotosblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von $0,3 \text{ m}^2$. Die bedeckte Teichfläche verdoppelt sich von Monat zu Monat. Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche 8 m^2 ?

Kann das Wachstum durch eine Funktion der Art $y = k \cdot a^x$ beschrieben werden (k positiv, $a > 1$), so spricht man von einem exponentiellen Wachstum.

2. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur verdopple sich alle 4 Stunden. Zu Beginn der Beobachtung seien 300 Bakterien vorhanden.
 - a) Erläutere, dass das Wachstum der Bakterienkultur durch $y = 300 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$ beschrieben wird.
 - b) Wie viele Bakterien beinhaltet die Kultur 10 Stunden nach Beginn (vor Beginn) der Beobachtung?
 - c) Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) sind 10000 Bakterien vorhanden?
3. Die Temperatur eines 285°C heißen Körpers halbiert sich stündlich.
 - a) Stelle eine Funktion auf, die den Abkühlungsvorgang beschreibt.
 - b) Stelle den Abkühlungsvorgang grafisch dar.
 - c) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges?
 - d) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers 1°C ?

Kann die Abnahme einer Größe durch eine Funktion der Art $y = k \cdot a^x$ beschrieben werden (k positiv, $0 < a < 1$), so spricht man von einer exponentiellen Abnahme.

4. Auf dem Graphen der Funktion $y = k \cdot a^x$ liegen die Punkte $A(6 \mid 874,8)$ und $B(10 \mid 70858,8)$. Bestimme die Konstanten a und k .

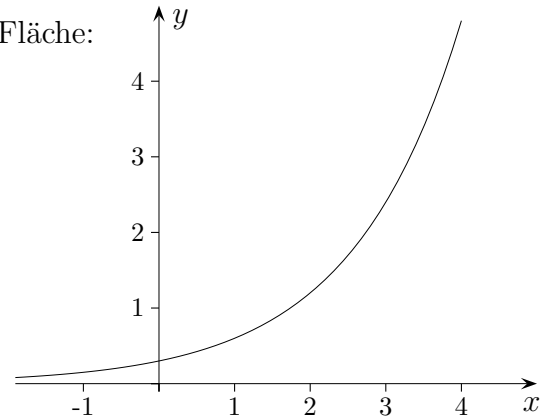
Exponentialfunktionen

1. Eine Lotusblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von $0,3 \text{ m}^2$. Die bedeckte Teichfläche verdoppelt sich von Monat zu Monat. Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche 8 m^2 ?

Wir ermitteln den Zusammenhang von der verstrichenen Zeit und der Größe der bedeckten Fläche:

Zeit x	bedeckte Fläche y (in m^2)
0	$0,3$
1	$0,3 \cdot 2$
2	$0,3 \cdot 2^2$
3	$0,3 \cdot 2^3$

Also gilt: $y = 0,3 \cdot 2^x$



$x = -1$ bedeutet einen Monat vor dem Beobachtungsbeginn.

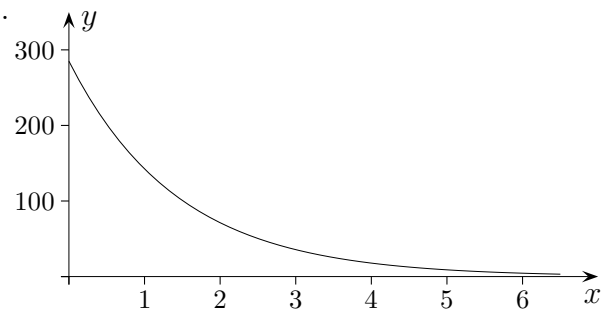
$$\begin{aligned} 0,3 \cdot 2^x &= 8 \\ x &= 4,74 \end{aligned}$$

2. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur verdoppelt sich alle 4 Stunden. Zu Beginn der Beobachtung seien 300 Bakterien vorhanden.
 - a) Erläutere, dass das Wachstum der Bakterienkultur durch $y = 300 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$ beschrieben wird.
 - b) Wie viele Bakterien beinhaltet die Kultur 10 Stunden nach Beginn (vor Beginn) der Beobachtung? 1697 (53)
 - c) Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) sind 10000 Bakterien vorhanden? 20,24

3. Die Temperatur eines 285°C heißen Körpers halbiert sich stündlich.

a) Stelle eine Funktion auf, die den Abkühlungsvorgang beschreibt. $y = 285 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) Stelle den Abkühlungsvorgang grafisch dar.



- c) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges?
- d) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers 1°C ? 8,2 $8,9^\circ\text{C}$

Exponentialfunktionen

4. Auf dem Graphen der Funktion $y = k \cdot a^x$ liegen die Punkte $A(6 \mid 874,8)$ und $B(10 \mid 70858,8)$.

Bestimme die Konstanten a und k .

$$70858,8 = k \cdot a^{10}$$

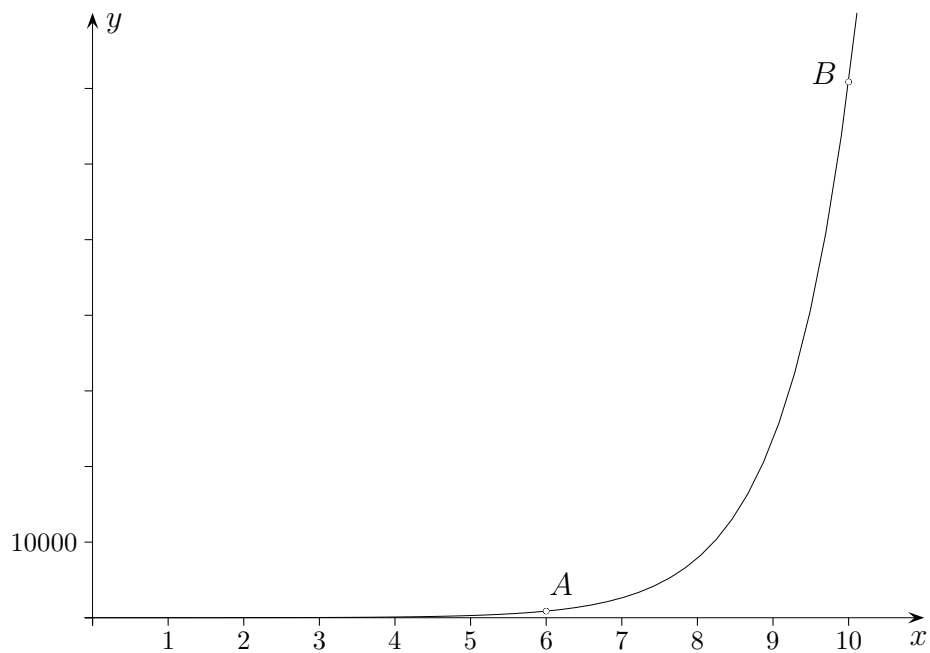
$$874,8 = k \cdot a^6$$

$$\frac{70858,8}{874,8} = a^4$$

$$81 = a^4$$

$$a = 3$$

$$k = 1,2$$



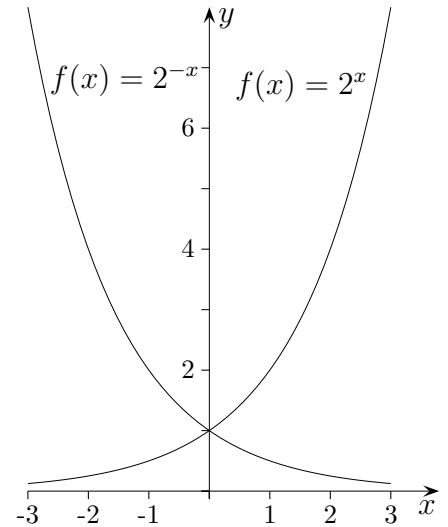
Graphen der Exponentialfunktionen (ohne GTR)

1. a) Zeichne die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 2^{-x}$.
b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Funktionen?

2. Skizziere den Graph und erläutere den Verlauf.
 - a) $f(x) = 2^x + 1$
 - b) $f(x) = -2^x$
 - c) $f(x) = -2^{-x}$
 - d) $f(x) = 3 - 2^{-x}$

Graphen der Exponentialfunktionen (ohne GTR)

1. a) Zeichne die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 2^{-x}$.
 b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Funktionen?



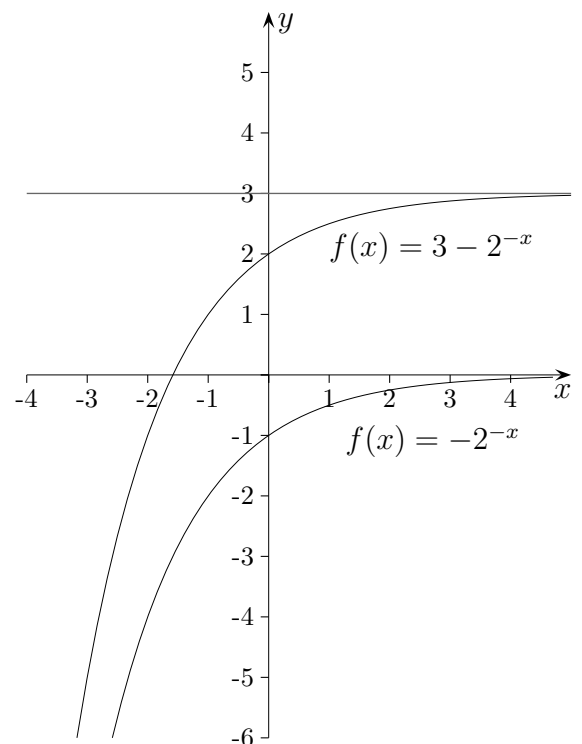
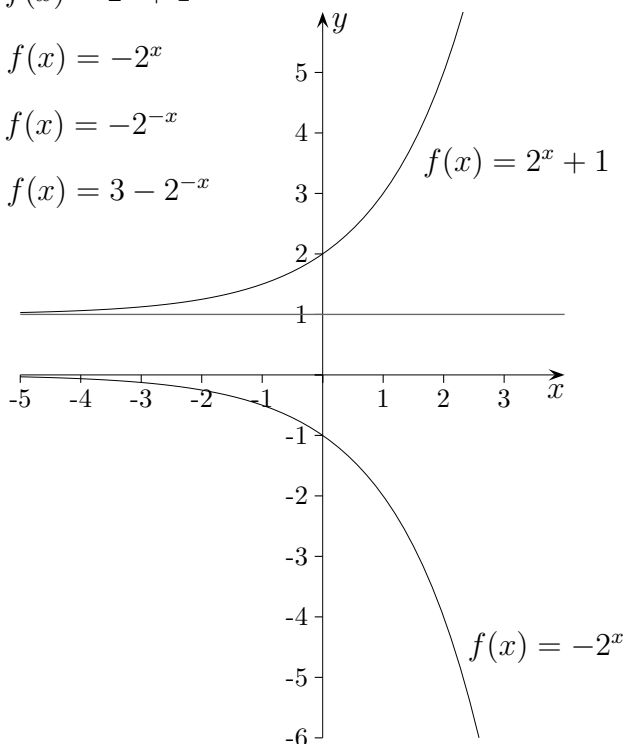
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2^1	2^2	2^3
2^{-x}	2^3	2^2	2^1	1	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}

- b) Die Graphen gehen durch Spiegelung an der y -Achse auseinander hervor. Der Graph von $f(x) = 2^x$ stellt ein exponentielles Wachstum dar, der Graph von $f(x) = 2^{-x}$ wegen $2^{-x} = (2^{-1})^x = (\frac{1}{2})^x$ einen exponentiellen Zerfall.

2. Skizziere den Graph und erläutere den Verlauf.

- a) $f(x) = 2^x + 1$
 b) $f(x) = -2^x$
 c) $f(x) = -2^{-x}$
 d) $f(x) = 3 - 2^{-x}$



Die Spiegelung des Graphen von $f(x) = 2^x$ an der x -Achse ergibt den Graphen von $f(x) = -2^x$.
 $f(x) = 3 - 2^{-x}$ ist die Funktion eines beschränkten Wachstums mit der Grenze $G = 3$.

Exponentielles Wachstum, exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall)

1. Wie lautet die Zinseszinsformel?

Welche Funktion $f(x) = \dots$ (Zeit x) erfasst die Veränderung eines Bestands (Anfangsbestand stets a) für

2. eine Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit,
3. eine Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten,
4. eine Halbierung pro Zeiteinheit,
5. eine Halbierung in jeweils 3 Zeiteinheiten (Halbwertszeit beträgt 3 Zeiteinheiten),
6. einen 15%-igen Zuwachs pro Zeiteinheit,
7. eine 15%-ige Abnahme pro Zeiteinheit (einen 15%-igen Zerfall),
8. einen 15%-igen Zuwachs in jeweils 3 Zeiteinheiten,
9. einen Zuwachs um ein Drittel des jeweiligen Bestands pro Zeiteinheit,
10. eine Abnahme um ein Zwölftel des jeweiligen Bestands pro Zeiteinheit?

Exponentielles Wachstum, exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall)

- | | |
|--|---|
| 1. $K_n = K_0 \cdot q^n$ | Zinseszinsformel, $q = 1 + \frac{p}{100}$ |
| 2. $f(x) = a \cdot 2^x$ | Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit, Anfangsbestand a |
| 3. $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ | Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten, Verdopplungszeit beträgt 3 Zeiteinheiten |
| 4. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | Halbierung des Bestands pro Zeiteinheit |
| 5. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ | Halbierung in jeweils 3 Zeiteinheiten, Halbwertszeit beträgt 3 Zeiteinheiten |
| 6. $f(x) = a \cdot 1,15^x$ | $1 + \frac{15}{100} = 1,15$, 15%-iger Zuwachs pro Zeiteinheit |
| 7. $f(x) = a \cdot 0,85^x$ | $1 - \frac{15}{100} = 0,85$, 15%-ige Abnahme pro Zeiteinheit, 15%-iger Zerfall |
| 8. $f(x) = a \cdot 1,15^{\frac{x}{3}}$ | 15%-iger Zuwachs in jeweils 3 Zeiteinheiten |
| 9. $f(x) = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x$ | $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, Zunahme um $\frac{1}{3}$ des Bestands pro Zeiteinheit |
| 10. $f(x) = a \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^x$ | $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$, Abnahme um $\frac{1}{12}$ des Bestands pro Zeiteinheit |

Um z.B. für $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ oder $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$

die jährliche Zuwachs- bzw. Abnahmerate (Zeit x in Jahren) zu ermitteln, ist die Funktion auf die Form $f(x) = a \cdot b^x$ zu bringen.

$$f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}} = a \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x = a \cdot 1,260^x \quad \text{jährliche Zunahme um 26,0\%}$$

$$f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} = a \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^x = a \cdot 0,794^x \quad \text{jährliche Abnahme um 20,6\%}$$

Etwas einfacher kann der Bestand nach einem Jahr ermittelt werden und dann der prozentuale Zuwachs bezüglich des Anfangsbestandes.

Wie geht der Graph von $g(x) = 2^{x+3} + 4$ aus dem Graphen von $f(x) = 2^x$ hervor?