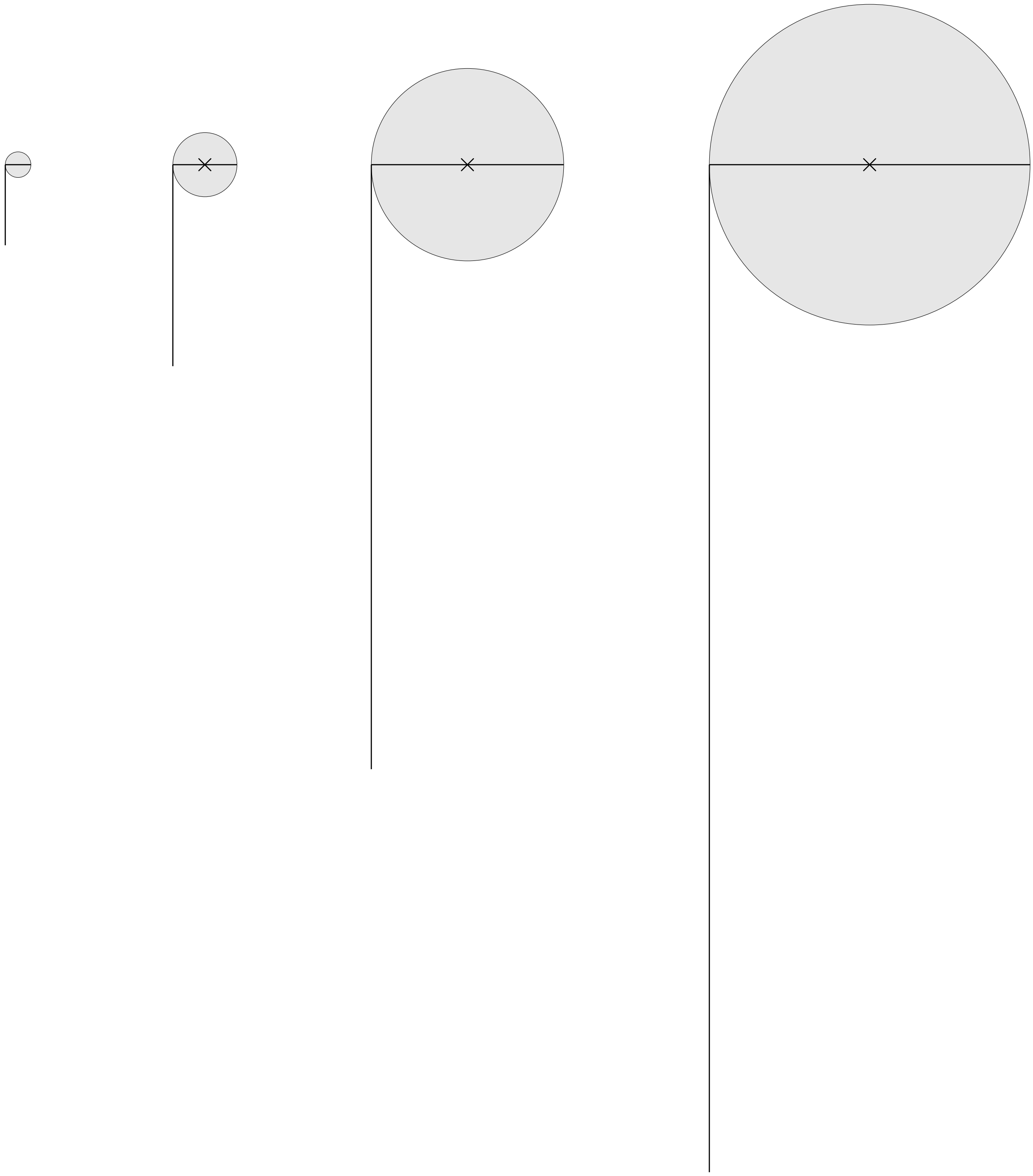
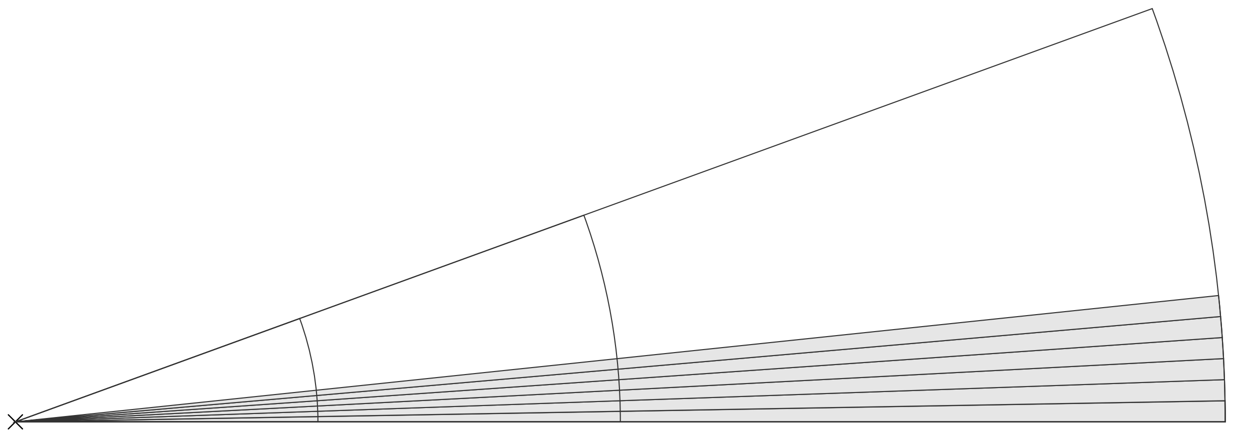
Umfang des Kreises

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises? Stelle eine Vermutung auf.

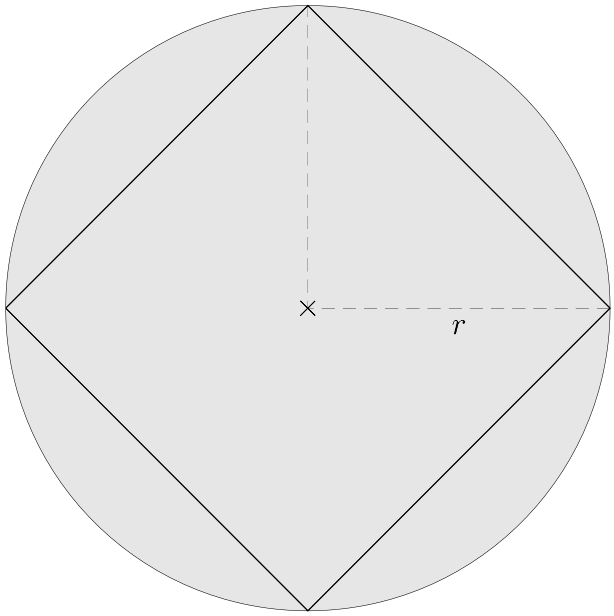


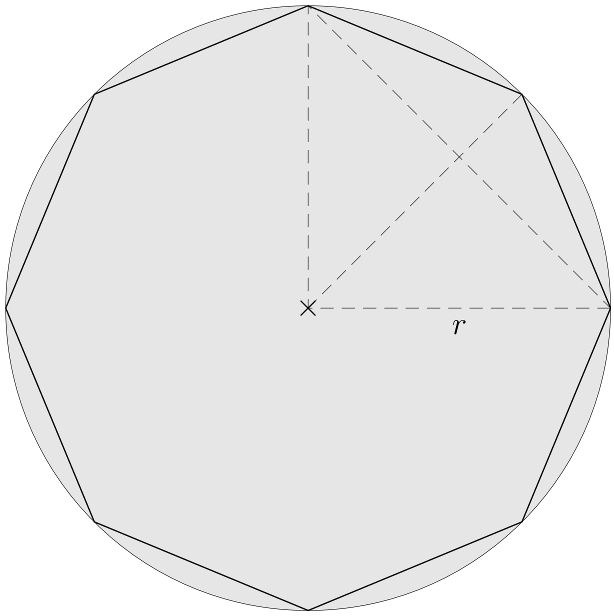
Umfang des Kreises

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises? Stelle eine Vermutung auf.



Umfang des Kreises



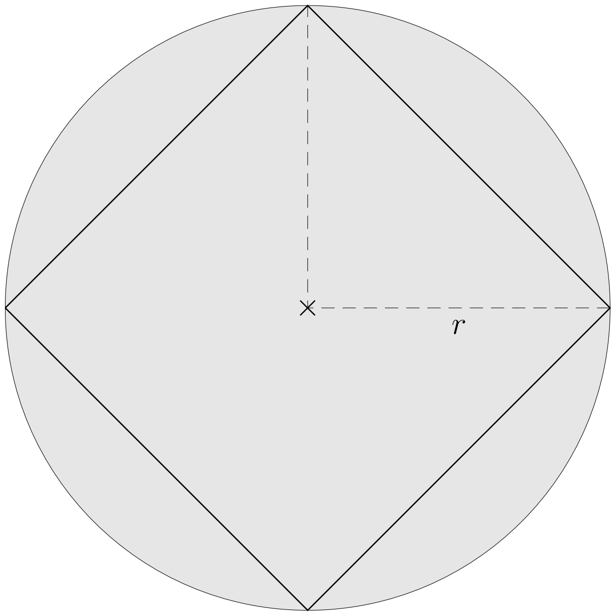


Um den Umfang eines Kreises mit dem Radius r zu bestimmen,
nähern wir den Kreis durch regelmäßige n-Ecke an (4-Eck, 8-Eck, ...)
Die Kantenlänge eines n-Ecks sei s_n, der Umfang sei U_n.

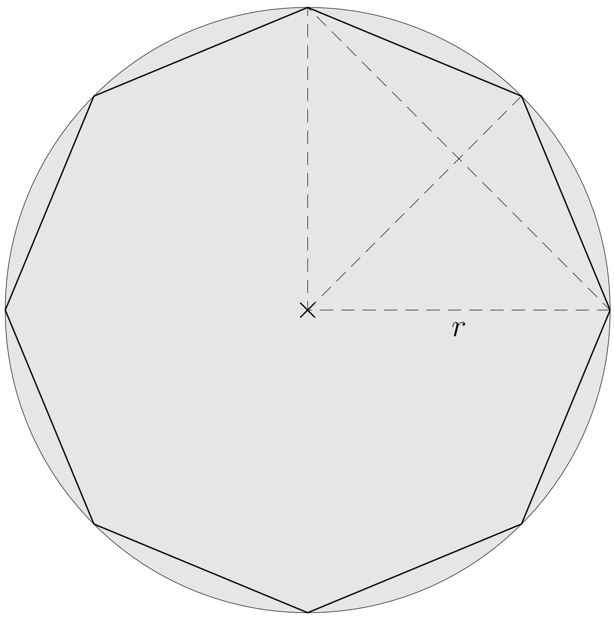
a) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4, 8$) jeweils s_n und U_n.

b) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4, 8$) jeweils die Zahl (auf 2 Nachkommastellen genau), mit der der Durchmesser d des Kreises multipliziert werden muss, um U_n zu erhalten.

Umfang des Kreises



$$
\begin{aligned}
s_4 &= r\sqrt{2} \\
U_4 &= 4r\sqrt{2} \\
U_4 &= d \cdot 2{,}83
\end{aligned}
$$



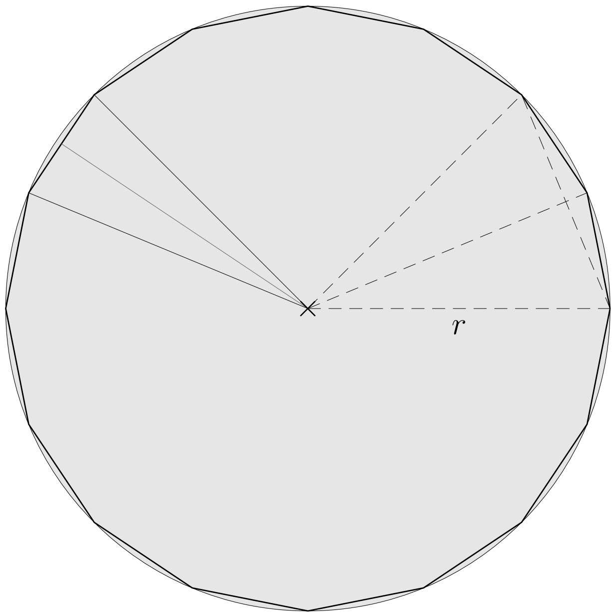
$$
\begin{aligned}
s_8^2 &= (\tfrac{s_4}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - (\tfrac{s_4}{2})^2}\ )^2 \\
&\vdots \\
s_8 &= r\,\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
U_8 &= 8r\,\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
U_8 &= d \cdot 3{,}06
\end{aligned}
$$

Um den Umfang eines Kreises mit dem Radius r zu bestimmen,
nähern wir den Kreis durch regelmäßige n-Ecke an (4-Eck, 8-Eck, …)
Die Kantenlänge eines n-Ecks sei s_n, der Umfang sei U_n.

a) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4,\ 8$) jeweils s_n und U_n.

b) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4,\ 8$) jeweils die Zahl (auf 2 Nachkommastellen genau), mit der der Durchmesser d des Kreises multipliziert werden muss, um U_n zu erhalten.

Flächeninhalt des Kreises



$$
\begin{aligned}
s_{16} &= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
U_{16} &= 16r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
U_{16} &= d \cdot 3{,}12
\end{aligned}
$$

Für ein 64-Eck ergäbe sich: $U_{64} = d \cdot 3{,}14$
Die Konstante, mit der der Durchmesser d multipliziert werden muss,
um den Umfang U des Kreises zu erhalten, heißt π.
$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,...$

Für einen Kreis mit dem Radius r gilt somit: $U = d \cdot \pi$ oder
$U = 2\pi r$

Um den Flächeninhalt des Kreises zu ermitteln,
bestimmen wir zunächst den Flächeninhalt des 16-Ecks:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{16-Eck}} &= 16 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 16 \cdot \frac{s_{16} \cdot h}{2} = \frac{U_{16} \cdot h}{2} \\
A_{\text{16-Eck}} &\approx \frac{U_{16} \cdot r}{2} \qquad (h \approx r) \\
A_{\text{Kreis}} &= \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \qquad (U_{16} \approx U_{\text{Kreis}})
\end{aligned}
$$

Aufgaben:

1. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 10\,cm$, gesucht r.
2. Gegeben: $A_{\text{Halbkreis}} = 4\,cm^2$, gesucht r.
3. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 8\,cm$, gesucht A.

Flächeninhalt des Kreises

Aufgaben:

1. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 10\,cm$, gesucht r.
2. Gegeben: $A_{\text{Halbkreis}} = 4\,cm^2$, gesucht r.
3. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 8\,cm$, gesucht A.

Lösungen:

1. $r = 1{,}59\,cm$
2. $r = 1{,}60\,cm$
3. $A = 5{,}09\,cm^2$

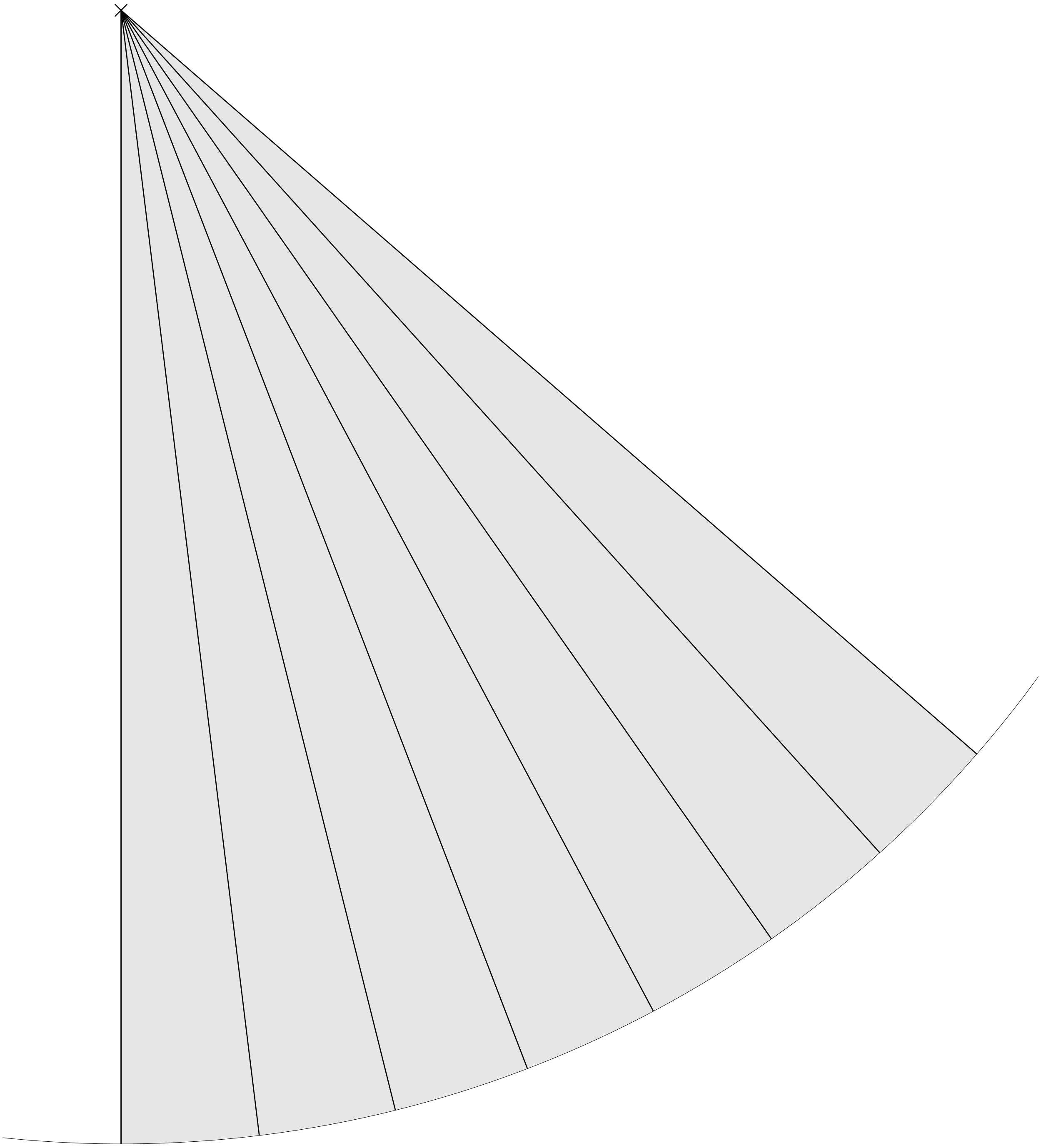
Archimedes (287 bis 212) verwendete ein 96-Eck zur näherungsweisen Berechnung von π.
Zur Berechnung von π existieren viele Formeln:

$$\textit{Leibniz:}\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

$$\textit{Euler:}\quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ...$$

π näherungsweise



Entnimm der Zeichnung alle Größen, um π näherungsweise bestimmen zu können.

$\alpha = 7^\circ$
$r = 18\,cm$
$b \approx 2{,}2\,cm$

$$2\pi r \approx \frac{1}{7} \cdot 2{,}2 \cdot 360 \quad \Longrightarrow \quad \pi \approx 3{,}14$$

Auf wie viele Stellen braucht man π ?

Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1000$ (mm, m, km)
mit den angegebenen Näherungen.
Ermittle die Abweichungen auf 5 Dezimalen zur Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit.
(Dies sind dann auch die Abweichungen vom exakten Ergebnis.)
Formuliere das Ergebnis für p_3 und p_5 mit Einheiten.

	Näherung für π
p_2	3,14
p_3	3,142
p_4	3,1416
p_5	3,14159
p_6	3,141593

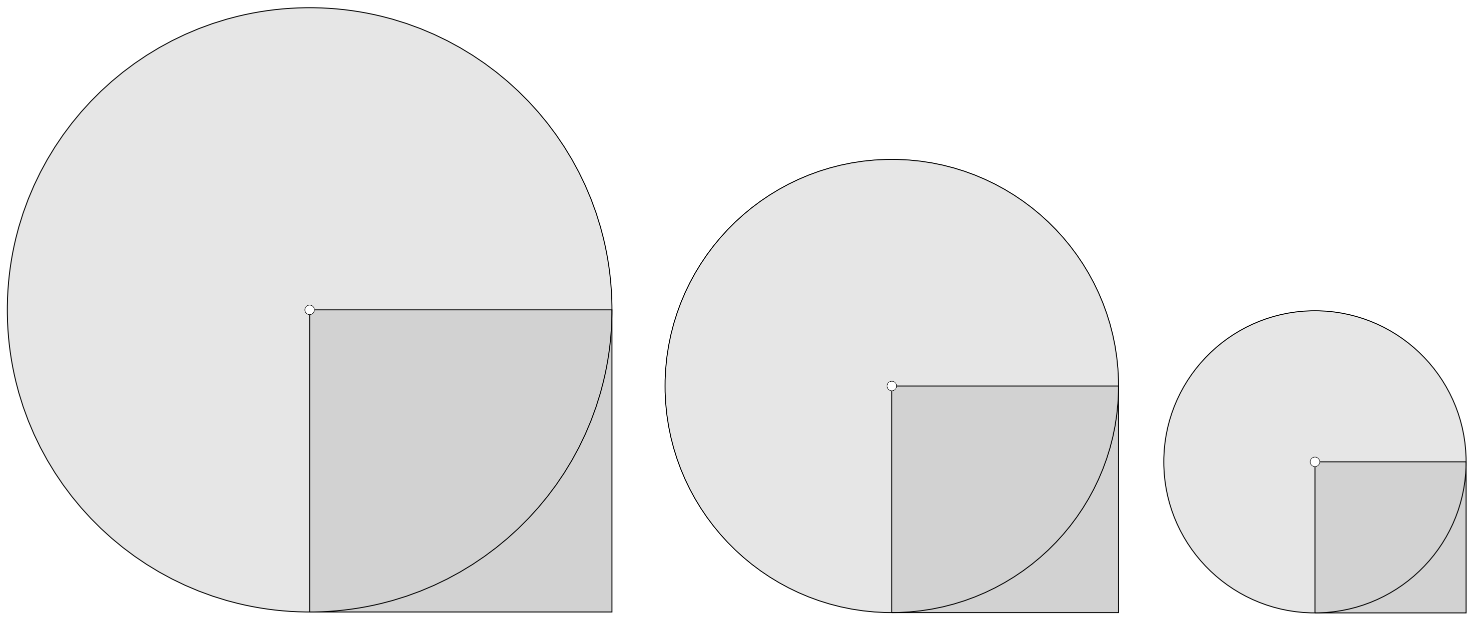
Auf wie viele Stellen braucht man π?

Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1000$ (mm, m, km)
mit den angegebenen Näherungen.
Ermittle die Abweichungen auf 5 Dezimalen zur Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit.
(Dies sind dann auch die Abweichungen vom exakten Ergebnis.)
Formuliere das Ergebnis für p_3 und p_5 mit Einheiten.

	Näherung für π
p_2	3,14
p_3	3,142
p_4	3,1416
p_5	3,14159
p_6	3,141593

	Näherung für π	Umfang (mm, m, km)	Abweichung (mm, m, km), absolut
p_2	3,14	6280	3,18531
p_3	3,142	6284	0,81469
p_4	3,1416	6283,2	0,01469
p_5	3,14159	6283,18	0,00531
p_6	3,141593	6283,186	0,00069

Ähnlichkeit



Die Figuren sind ähnlich.
Der Inhalt eines Kreises ist jeweils ein stets gleiches Vielfaches q des Quadratinhalts.
Man stelle sich vor, die Figur wird doppelt (dreifach) so groß gezeichnet.

$$A_{\text{Kreis}} = A_{\text{Quadrat}} \cdot q$$

Das Entsprechende gilt für den Kreisumfang und den Radius.