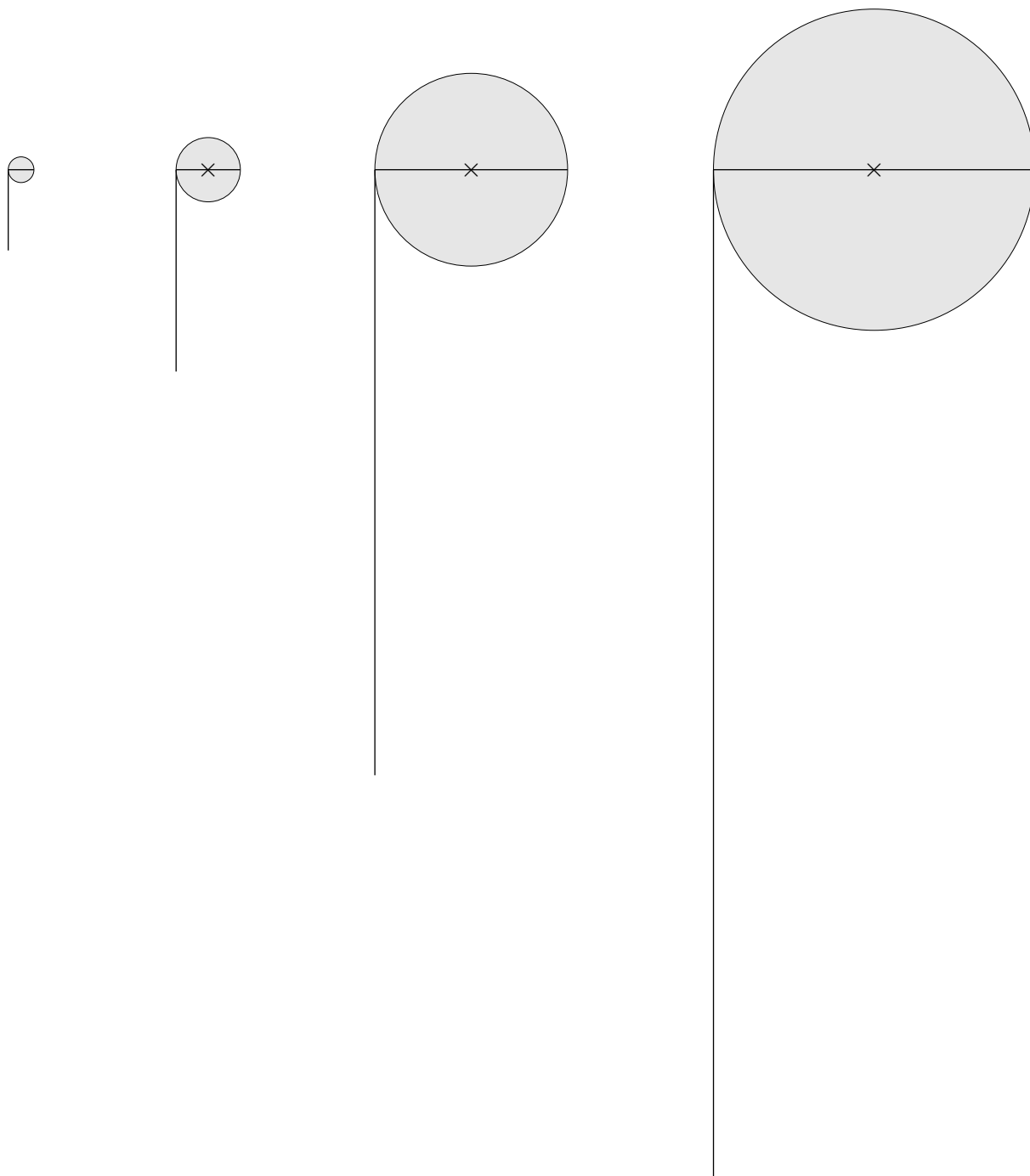


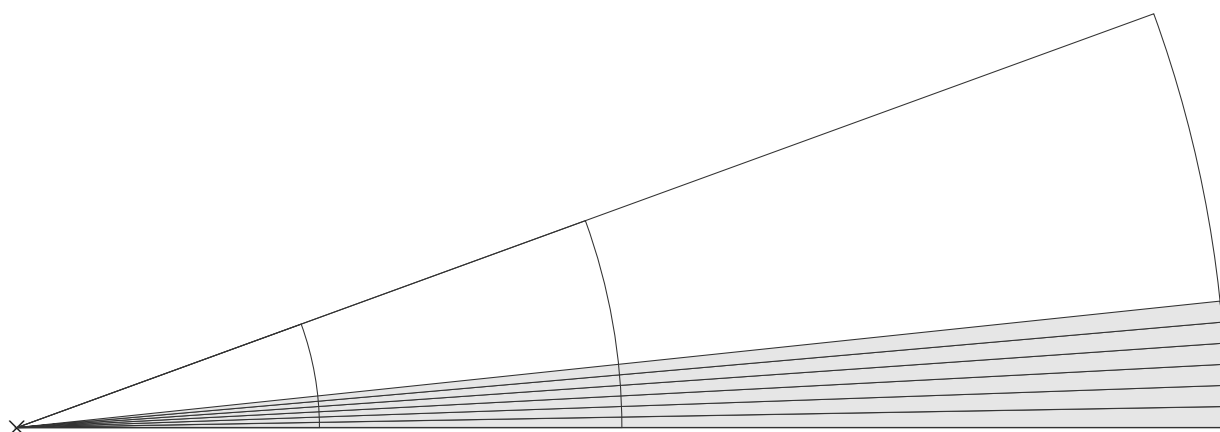
# Umfang des Kreises

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises?  
Stelle eine Vermutung auf.

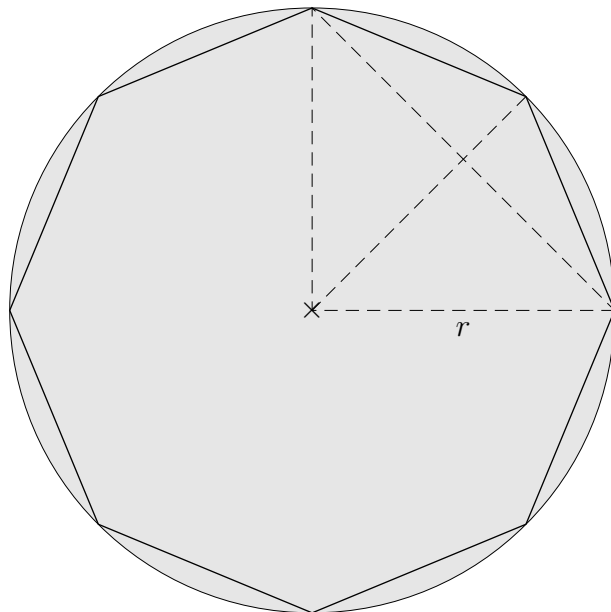
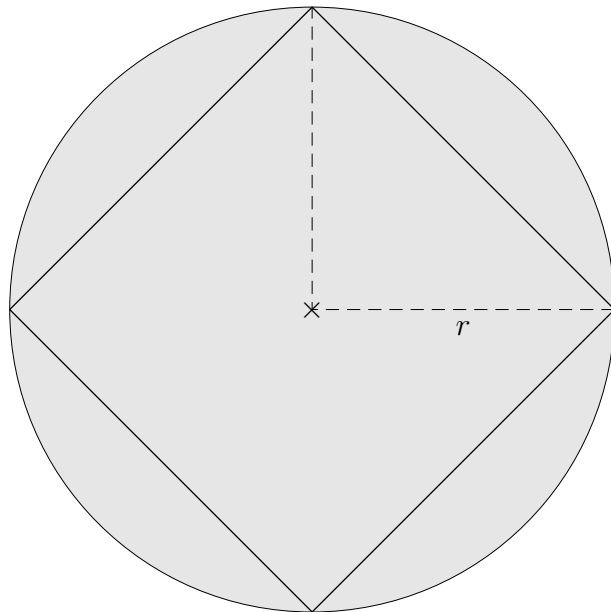


# Umfang des Kreises

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises?  
Stelle eine Vermutung auf.



# Umfang des Kreises



Um den Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r$  zu bestimmen, nähern wir den Kreis durch regelmäßige  $n$ -Ecke an (4-Eck, 8-Eck, ...). Die Kantenlänge eines  $n$ -Ecks sei  $s_n$ , der Umfang sei  $U_n$ .

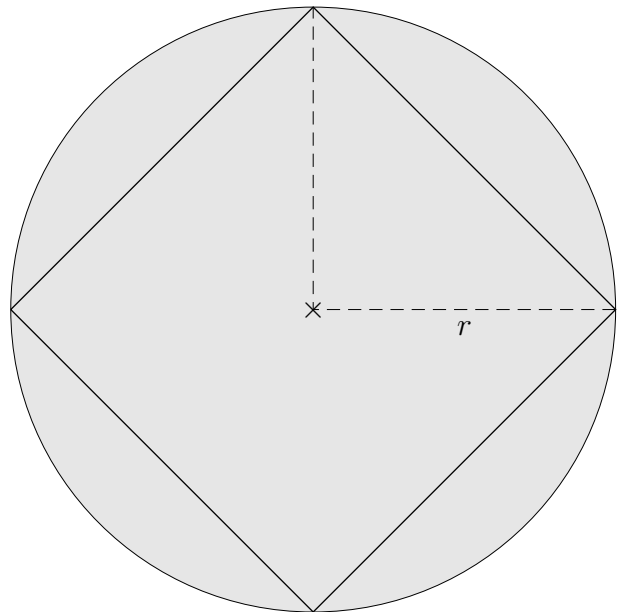
- Bestimme für die  $n$ -Ecke ( $n = 4, 8$ ) jeweils  $s_n$  und  $U_n$ .
- Bestimme für die  $n$ -Ecke ( $n = 4, 8$ ) jeweils die Zahl (auf 2 Nachkommastellen genau), mit der der Durchmesser  $d$  des Kreises multipliziert werden muss, um  $U_n$  zu erhalten.

# Umfang des Kreises

$$s_4 = r\sqrt{2}$$

$$U_4 = 4r\sqrt{2}$$

$$U_4 = d \cdot 2,83$$



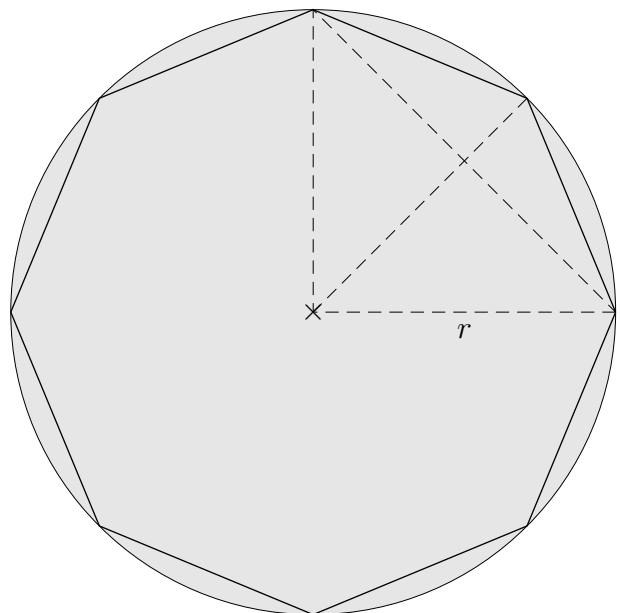
$$s_8^2 = \left(\frac{s_4}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_4}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$U_8 = 8r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

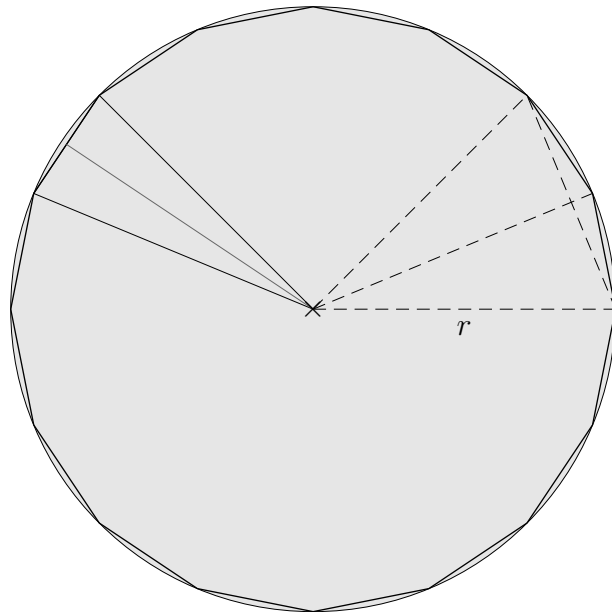
$$U_8 = d \cdot 3,06$$



Um den Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r$  zu bestimmen, nähern wir den Kreis durch regelmäßige  $n$ -Ecke an (4-Eck, 8-Eck, ...). Die Kantenlänge eines  $n$ -Ecks sei  $s_n$ , der Umfang sei  $U_n$ .

- Bestimme für die  $n$ -Ecke ( $n = 4, 8$ ) jeweils  $s_n$  und  $U_n$ .
- Bestimme für die  $n$ -Ecke ( $n = 4, 8$ ) jeweils die Zahl (auf 2 Nachkommastellen genau), mit der der Durchmesser  $d$  des Kreises multipliziert werden muss, um  $U_n$  zu erhalten.

# Flächeninhalt des Kreises



$$s_{16} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$
$$U_{16} = 16r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$
$$U_{16} = d \cdot 3,12$$

Für ein 64-Eck ergäbe sich:  $U_{64} = d \cdot 3,14$

Die Konstante, mit der der Durchmesser  $d$  multipliziert werden muss, um den Umfang  $U$  des Kreises zu erhalten, heißt  $\pi$ .

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884 \dots$$

Für einen Kreis mit dem Radius  $r$  gilt somit:  $U = d \cdot \pi$  oder  
 $U = 2\pi r$

Um den Flächeninhalt des Kreises zu ermitteln, bestimmen wir zunächst den Flächeninhalt des 16-Ecks:

$$A_{16\text{-Eck}} = 16 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 16 \cdot \frac{s_{16} \cdot h}{2} = \frac{U_{16} \cdot h}{2}$$
$$A_{16\text{-Eck}} \approx \frac{U_{16} \cdot r}{2} \quad (h \approx r)$$
$$A_{\text{Kreis}} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \quad (U_{16} \approx U_{\text{Kreis}})$$

Aufgaben:

1. Gegeben:  $U_{\text{Kreis}} = 10 \text{ cm}$ , gesucht  $r$ .
2. Gegeben:  $A_{\text{Halbkreis}} = 4 \text{ cm}^2$ , gesucht  $r$ .
3. Gegeben:  $U_{\text{Kreis}} = 8 \text{ cm}$ , gesucht  $A$ .

# Flächeninhalt des Kreises

Aufgaben:

1. Gegeben:  $U_{\text{Kreis}} = 10 \text{ cm}$ , gesucht  $r$ .
2. Gegeben:  $A_{\text{Halbkreis}} = 4 \text{ cm}^2$ , gesucht  $r$ .
3. Gegeben:  $U_{\text{Kreis}} = 8 \text{ cm}$ , gesucht  $A$ .

Lösungen:

1.  $r = 1,59 \text{ cm}$
2.  $r = 1,60 \text{ cm}$
3.  $A = 5,09 \text{ cm}^2$

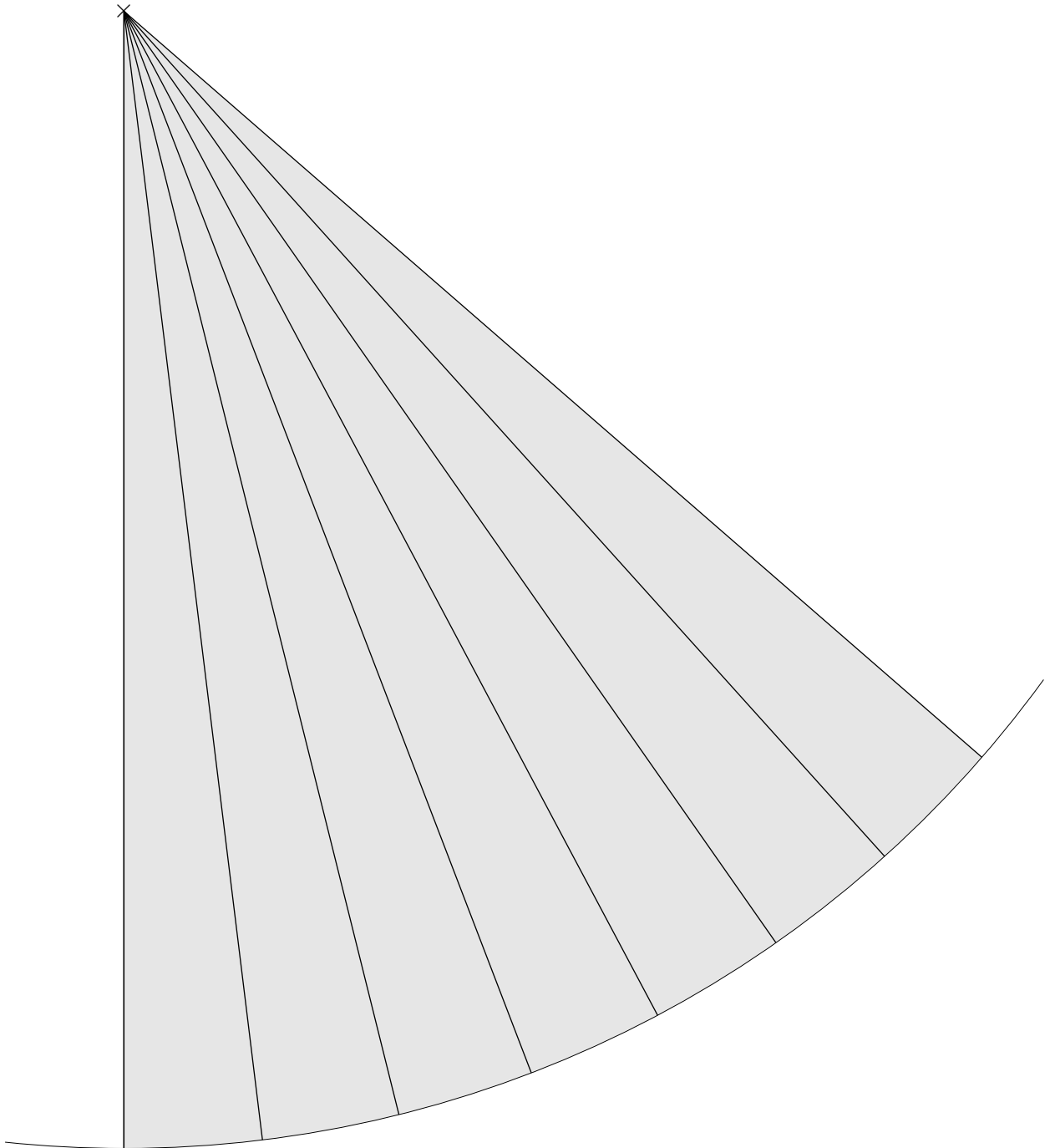
Archimedes (287 bis 212) verwendete ein 96-Eck zur näherungsweisen Berechnung von  $\pi$ .  
Zur Berechnung von  $\pi$  existieren viele Formeln:

$$\text{Leibniz: } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\text{Euler: } \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

# $\pi$ näherungsweise



Entnimm der Zeichnung alle Größen, um  $\pi$  näherungsweise bestimmen zu können.

$$\alpha = 7^\circ$$

$$r = 18 \text{ cm}$$

$$b \approx 2,2 \text{ cm}$$

$$2\pi r \approx \frac{1}{7} \cdot 2,2 \cdot 360 \implies \pi \approx 3,14$$



# Auf wie viele Stellen braucht man $\pi$ ?

Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r = 1000$  ( $mm$ ,  $m$ ,  $km$ ) mit den angegebenen Näherungen.

Ermittle die Abweichungen auf 5 Dezimalen zur Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit. (Dies sind dann auch die Abweichungen vom exakten Ergebnis.)

Formuliere das Ergebnis für  $p_3$  und  $p_5$  mit Einheiten.

	Näherung für $\pi$
$p_2$	3,14
$p_3$	3,142
$p_4$	3,1416
$p_5$	3,14159
$p_6$	3,141593

# Auf wie viele Stellen braucht man $\pi$ ?

Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r = 1000$  ( $mm$ ,  $m$ ,  $km$ ) mit den angegebenen Näherungen.

Ermittle die Abweichungen auf 5 Dezimalen zur Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit. (Dies sind dann auch die Abweichungen vom exakten Ergebnis.)

Formuliere das Ergebnis für  $p_3$  und  $p_5$  mit Einheiten.

	Näherung für $\pi$
$p_2$	3,14
$p_3$	3,142
$p_4$	3,1416
$p_5$	3,14159
$p_6$	3,141593

	Näherung für $\pi$	Umfang ( $mm$ , $m$ , $km$ )	Abweichung ( $mm$ , $m$ , $km$ ), absolut
$p_2$	3,14	6280	3,18531
$p_3$	3,142	6284	0,81469
$p_4$	3,1416	6283,2	0,01469
$p_5$	3,14159	6283,18	0,00531
$p_6$	3,141593	6283,186	0,00069