

Potenzrechnung

1. a) $x^3 \cdot x^5$ b) $y^4 \cdot y$
 c) $5^3 \cdot 5^{-2}$ d) $4^{-3} \cdot 4^5$
 e) $(3x^2y)^3$ f) $(4a^4b^3)^2$
 g) $-2^2 - (-3)^3$ h) $(-4)^2 + 4^2$
 i) $\frac{4^2}{4^{-1}}$ j) $\frac{3^{-2}}{3^{-3}}$
 k) $\left(\frac{2x}{y}\right)^3 - \frac{x^3}{y^3}$ l) $\left(\frac{2a}{b^2}\right)^4 - \frac{4a^4}{b^8}$
 m) $\frac{x^4 + x^3}{x^2}$ n) $\frac{y^3}{y^3 - y^4}$
 o) $(x^3 - 3x^2)^2$ p) $(4a + a^2)^2$
 q) $\frac{1}{x} - \frac{1+x^2}{x^3}$ r) $\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x^2}$
 s) $4 \cdot 3^n - 3^n$ t) $20 \cdot 5^n + 5^{n+1}$

1. Rechenregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 $3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$

2. Rechenregel: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 $\frac{4^5}{4^2} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^3$

3. Rechenregel: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
 $a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3$

4. Rechenregel: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
 $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

5. Rechenregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
 $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$

Definitionen:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3. $a^0 = 1$
4. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Die Besonderheit von a^0 und a^{-1} wird durch das Zahlenbeispiel veranschaulicht:

$$\begin{array}{rcl} 10^3 & = & 1000 \quad | \quad : 10 \\ 10^2 & = & 100 \quad | \quad : 10 \\ 10^1 & = & 10 \quad | \quad : 10 \\ 10^0 & = & 1 \quad | \quad : 10 \\ 10^{-1} & = & \frac{1}{10} \quad | \quad : 10 \\ 10^{-2} & = & \frac{1}{100} \end{array}$$

Potenzrechnung

1. a) $x^3 \cdot x^5$ b) $y^4 \cdot y$
 c) $5^3 \cdot 5^{-2}$ d) $4^{-3} \cdot 4^5$
 e) $(3x^2y)^3$ f) $(4a^4b^3)^2$
 g) $-2^2 - (-3)^3$ h) $(-4)^2 + 4^2$
 i) $\frac{4^2}{4^{-1}}$ j) $\frac{3^{-2}}{3^{-3}}$
 k) $\left(\frac{2x}{y}\right)^3 - \frac{x^3}{y^3}$ l) $\left(\frac{2a}{b^2}\right)^4 - \frac{4a^4}{b^8}$
 m) $\frac{x^4 + x^3}{x^2}$ n) $\frac{y^3}{y^3 - y^4}$
 o) $(x^3 - 3x^2)^2$ p) $(4a + a^2)^2$
 q) $\frac{1}{x} - \frac{1+x^2}{x^3}$ r) $\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x^2}$
 s) $4 \cdot 3^n - 3^n$ t) $20 \cdot 5^n + 5^{n+1}$

Lösungen:

1. a) x^8 b) y^5
 c) $5^1 = 5$ d) $4^2 = 16$
 e) $27x^6y^3$ f) $16a^8b^6$
 g) $-4 - (-27) = 23$ h) $16 + 16 = 32$
 i) $4^{2-(-1)} = 4^3 = 64$ j) $3^{-2-(-3)} = 3$
 k) $\frac{8x^3}{y^3} - \frac{x^3}{y^3} = \frac{7x^3}{y^3}$ l) $\frac{16a^4}{b^8} - \frac{4a^4}{b^8} = \frac{12a^4}{b^8}$
 m) $\frac{x^2(x^2+x)}{x^2} = x^2+x$ n) $\frac{y^3}{y^3(\dots)} = \frac{1}{1-y}$
 o) $x^6 - 6x^5 + 9x^4$ p) $16a^2 + 8a^3 + a^4$
 q) $\frac{x^2-1-x^2}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$ r) $\frac{x-1+x}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$
 s) $3^n(\dots) = \dots = 3^{n+1}$ t) $5^n(\dots) = \dots = 5^{n+2}$

1. Rechenregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 $3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$

2. Rechenregel: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 $\frac{4^5}{4^2} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^3$

3. Rechenregel: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
 $a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3$

4. Rechenregel: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
 $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

5. Rechenregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
 $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$

Definitionen:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3. $a^0 = 1$
4. $\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Die Besonderheit von a^0 und a^{-1} wird durch das Zahlenbeispiel veranschaulicht:

$$\begin{array}{lcl} 10^3 & = & 1000 \quad | : 10 \\ 10^2 & = & 100 \quad | : 10 \\ 10^1 & = & 10 \quad | : 10 \\ 10^0 & = & 1 \quad | : 10 \\ 10^{-1} & = & \frac{1}{10} \quad | : 10 \\ 10^{-2} & = & \frac{1}{100} \end{array}$$

Potenzen aus \mathbb{Q}

1. $a^{-3} = ?$

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$$

Wenn wir jedoch stattdessen nach der 2. Rechenregel: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ rechnen, erhalten wir

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$$

Daher wird

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

festgelegt, allgemein:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2. $a^0 = ?$

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$$

Mit der 2. Rechenregel erhalten wir

$$\frac{a^2}{a^2} = a^0$$

Daher wird

$$a^0 = 1$$

festgelegt.

Die Rechenregeln können dann für alle ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ verwendet werden.

3. $a^{\frac{1}{2}} = ?$

Nach der 1. Rechenregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ müsste gelten:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$$

Beispiel: $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 9$

Für $9^{\frac{1}{2}}$ kommt daher nur $\sqrt{9} = 3$ in Frage.

Daher wird

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad \text{und allgemein} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

festgelegt.