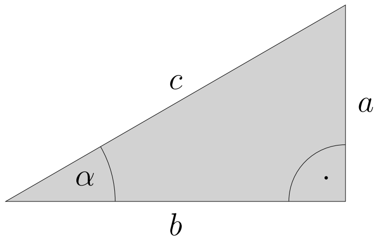
# Trigonometrie    trigonon (griech.) Dreieck

1. Gegeben ist ein Dreieck mit $\alpha = 30^\circ$ und $a = 3\,cm$.
   Wie lang ist $c$?



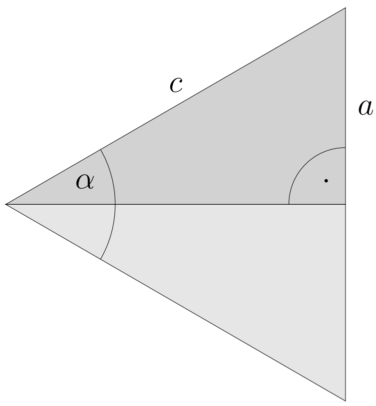

*Lösung:*
*Das Dreieck kann durch Spiegelung zu einem gleichseitigen Dreieck - jeder Winkel beträgt* $60^\circ$ *- ergänzt werden. Hieraus ist zu erkennen:*

$$2a = c. \text{ Also ist } c = 6 \ (cm)$$

*Für das Weitere formen wir um:*

$$\begin{aligned} 2a &= c \quad | : 2c \\ \frac{a}{c} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Für den Winkel* $\alpha = 30^\circ$ *ist das Verhältnis* $\frac{a}{c}$ *gleich* $\frac{1}{2}$.
*Dieses Verhältnis heißt Sinus von* $\alpha$*, es gilt also* $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.




Zweiter (typischer) Lösungsweg:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{a}{c} \qquad |\cdot c \\ c \cdot \sin 30^\circ &= a \\ c &= \frac{a}{\sin 30^\circ} \\ c &= 6 \ (cm) \end{aligned}$$

Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \qquad \left( = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}} \right) \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} \qquad \left( = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}} \right) \\ \tan\alpha &= \frac{a}{b} \qquad \left( = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}} \right) \end{aligned}$$

2. Berechne die fehlenden Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, siehe oben.
   a) $\alpha = 40^\circ, \quad c = 4\,cm$
   b) $\beta = 75^\circ, \quad a = 2\,cm$
   c) $\alpha = 15^\circ, \quad b = 3\,cm$



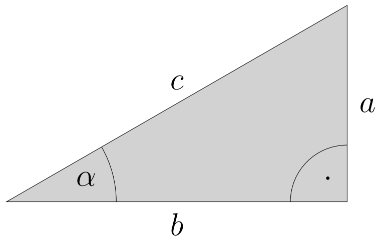
sinus, lat. Krümmung, Ausbuchtung, Bausch

# Trigonometrie

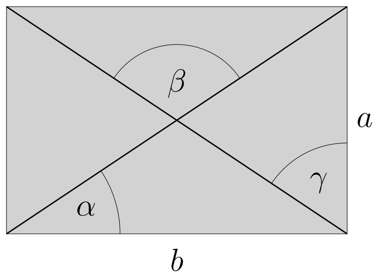
Ergebnisse

2. a) $a = 2{,}57;\quad b = 3{,}06$
   b) $b = 7{,}46;\quad c = 7{,}73$
   c) $a = 0{,}80;\quad c = 3{,}11$

3. Für ein rechtwinkliges Dreieck sind gegeben:
   $a = 3\,cm$ und $b = 4\,cm$. Gesucht ist $\alpha$.




4. Für ein Rechteck sind gegeben:
   $a = 2\,cm$ und $b = 3\,cm$. Gesucht sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.




In der Oberstufe können folgende Formeln hergeleitet werden:

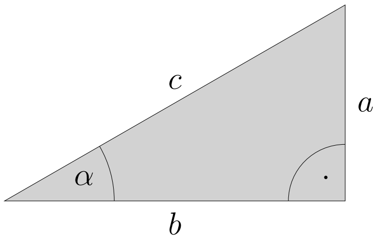
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ \ldots$$

Der Winkel $\alpha$ muss im Bogenmaß $x$ angegeben werden.
$360°$ entspricht im Bogenmaß $2\pi$. $\quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ (sprich: 4-Fakultät).

# Trigonometrie

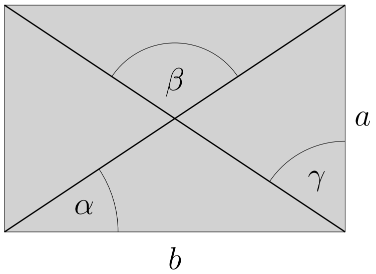
3. Für ein rechtwinkliges Dreieck sind gegeben:
   $a = 3\,cm$ und $b = 4\,cm$. Gesucht ist $\alpha$.




$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{3}{4} \\ \alpha &= 36{,}9° \end{aligned}$$

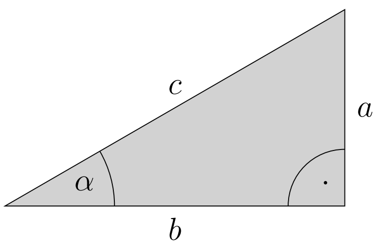
Der zu dem Verhältnis $\frac{3}{4}$ gehörende Winkel wird mit der Taste $\tan^{-1}$ ermittelt.

4. Für ein Rechteck sind gegeben:
   $a = 2\,cm$ und $b = 3\,cm$. Gesucht sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

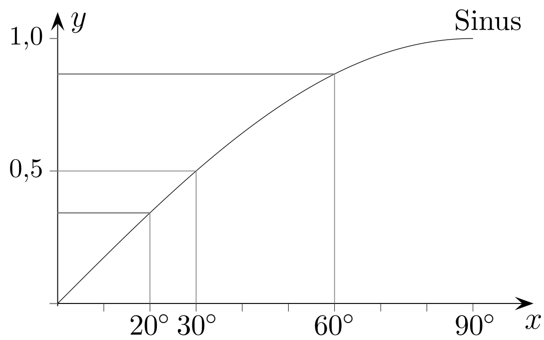



$$\begin{aligned} \alpha &= 33{,}7° \\ \beta &= 112{,}6° \\ \gamma &= 56{,}3° \end{aligned}$$

# Merkzettel




$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$




$$30^\circ \xrightarrow{\sin} \frac{1}{2}$$

$$\alpha \longrightarrow \sin(\alpha)$$

Die Schreibweise $\sin\alpha$ ist auch möglich.

Der Sinus ordnet jedem Winkel die entsprechende Verhältniszahl zu.
Umgekehrt kann mit $\sin^{-1}$ zur Verhältniszahl der zugehörige Winkel ermittelt werden.

$$30^\circ \xleftarrow{\sin^{-1}} \frac{1}{2}$$

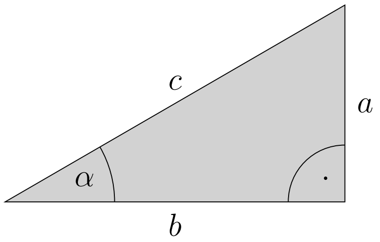
$$\alpha \xleftarrow{\sin^{-1}} \frac{a}{c}$$

Die Schreibweise $\sin^{-1}$ hat nichts mit der Potenzschreibweise $a^{-1}$ zu tun, sie soll lediglich an die Umkehrung erinnern.

a) Gegeben (siehe oben) $\alpha = 40^\circ$, $a = 5\,cm$, gesucht $c$

b) Gegeben $c = 8\,cm$, $a = 3\,cm$, gesucht $\alpha$

# Musteraufgaben




a) Gegeben (siehe oben) $\alpha = 40°$, $a = 5\ cm$, gesucht $c$

$$\begin{aligned} \sin 40° &= \frac{a}{c} \qquad\qquad | \cdot c \\ c \cdot \sin 40° &= a \\ c &= \frac{a}{\sin 40°} \\ c &= 7{,}78\ (cm) \end{aligned}$$

b) Gegeben $c = 8\ cm$, $a = 3\ cm$, gesucht $\alpha$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \alpha &= \sin^{-1} \frac{a}{c} \\ \alpha &= 22{,}0° \end{aligned}$$

c) Gegeben (siehe oben) $\alpha = 25°$, $a = 4\ cm$, gesucht $b$

$$\begin{aligned} \tan 25° &= \frac{a}{b} \qquad\qquad | \cdot b \\ b \cdot \tan 25° &= a \\ b &= \frac{a}{\tan 25°} \\ b &= 8{,}58\ (cm) \end{aligned}$$

d) Gegeben $c = 9\ cm$, $b = 4\ cm$, gesucht $\alpha$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \alpha &= \cos^{-1} \frac{b}{c} \\ \alpha &= 63{,}6° \end{aligned}$$