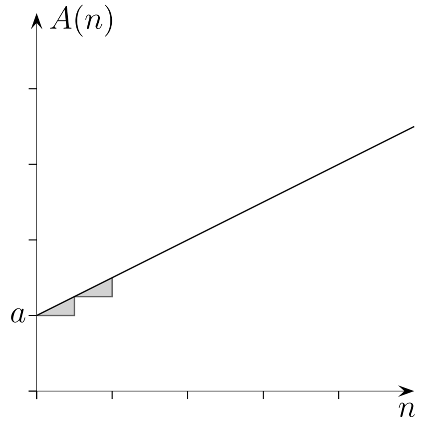
Wachstums- und Abnahmeprozesse   iterativ

Lineares Wachstum

Rekursionsgleichung

$$A(n+1) \quad = \quad A(n) + d$$

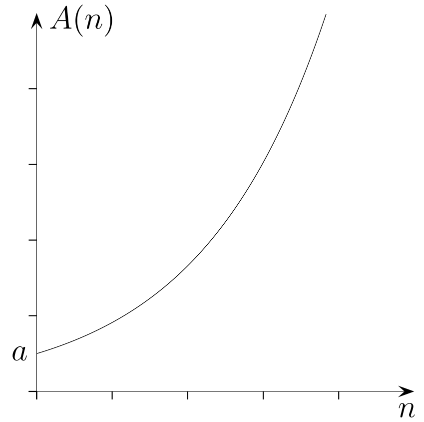
Anfangswert: $A(0) = a$



Exponentielles Wachstum

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) + k \cdot A(n) \\ &= A(n) + \frac{p}{100} \cdot A(n) \\ &= A(n) \cdot (1 + \frac{p}{100}) \\ &= A(n) \cdot q \end{aligned}$$

Anfangswert: $A(0) = a$



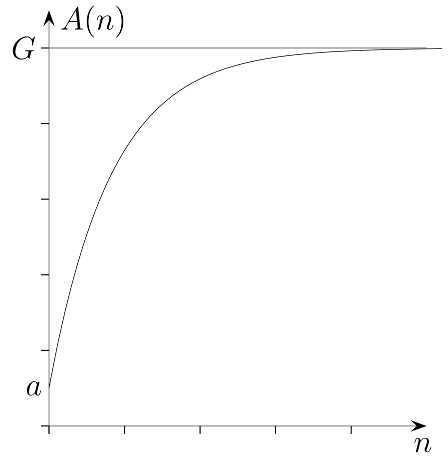
Beschränktes (begrenztes) Wachstum
z. B. Erwärmung

$$A(n+1) \quad = \quad A(n) + k \cdot (G - A(n))$$

Der

Anfangswert: $A(0) = a$

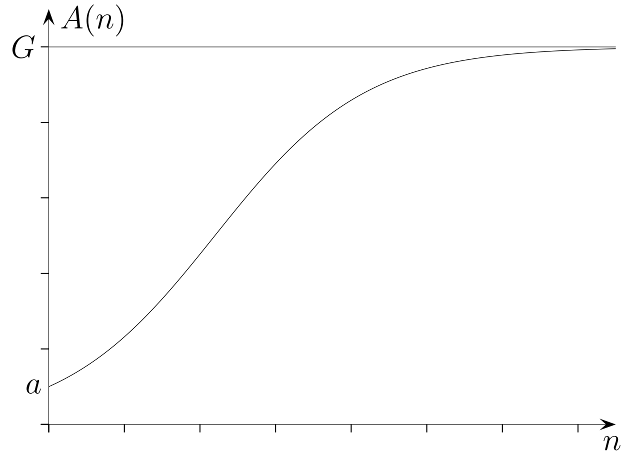
Zuwachs ist stets ein Bruchteil der Differenz zur Sättigungsgrenze G.



Wachstums- und Abnahmeprozesse

Logistisches Wachstum

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) + A(n)\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{A(n)}{G}\right) \\ &= A(n) + A(n)\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{G-A(n)}{G} \\ &= A(n) + \frac{p}{100\cdot G}\cdot A(n)\cdot(G-A(n)) \\ &= A(n) + k\cdot A(n)\cdot(G-A(n)) \end{aligned}$$



Es ist zu erkennen, dass anfänglich (näherungsweise) exponentielles Wachstum vorliegt. Der Zuwachs wird jedoch mit einem Faktor multipliziert, der gegen null strebt.

Exponentielle Abnahme, z. B. Abkühlung

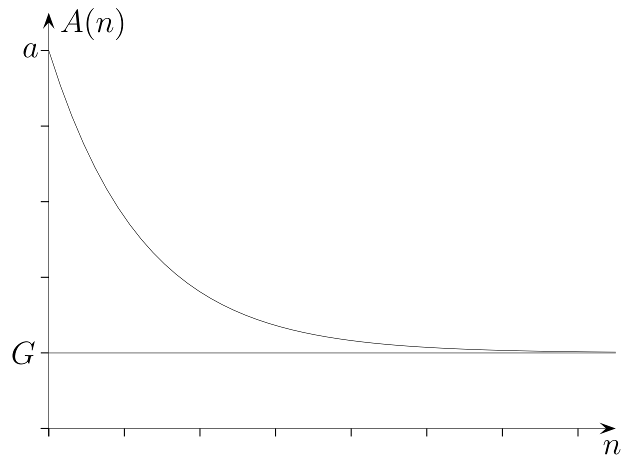
$$A(n+1) = A(n) - k\cdot(A(n)-G)$$

Anfangswert: $A(0)=a$

Die Abnahme ist stets ein Bruchteil der Differenz zur unteren Grenze G.

Dies ist die Gleichung des beschränkten Wachstums.

$$A(n+1) = A(n) + k\cdot(G-A(n))$$



Überlagerung von exponentiellem und linearem Wachstum, z. B. Medikamenten-Einnahme

$$A(n+1) = A(n) - \frac{p}{100}\cdot A(n) + d\,, \qquad A(0)=d$$

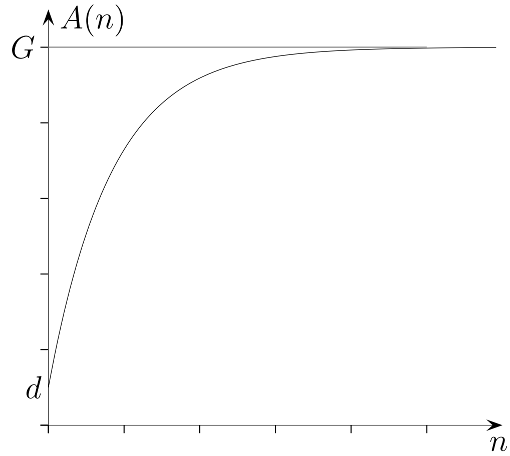
Für die Grenze G gilt:

$$G = A(n+1) = A(n) \quad\Longrightarrow\quad d = \frac{p}{100}\cdot G$$

$$\Longrightarrow\quad G = \frac{d}{k} \quad \text{mit} \quad k=\frac{p}{100}$$

Es liegt ein begrenztes Wachstum vor:

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) - k\cdot A(n) + d \\ &= A(n) - k\cdot A(n) + G\cdot k \\ &= A(n) + k\cdot(G-A(n)) \end{aligned}$$



Wachstums- und Abnahmeprozesse Aufgaben

1. In einem Teich können höchstens 600 Fische leben. Am Anfang sind nur 16 Fische vorhanden. Zu Beginn liegt eine durchschnittliche jährliche Wachstumsrate von 30 % vor.
   Gib den Fischbestand für die nächsten 10 Jahre an.

2. In einer Bakterienkultur sind zu Beginn 7,1 Mio Bakterien, nach einer Stunde 7,7 Mio vorhanden. Wie viele Bakterien sind vermutlich nach 6 Stunden vorhanden?

3. Ein Gegenstand ($24°\,C$) wird in einen Kühlschrank ($5,5°\,C$) gelegt.
   Die Temperaturabnahme pro Minute beträgt 22 % der noch vorliegenden Temperaturdifferenz.
   Gib die Temperatur des Gegenstands für die nächsten 20 Minuten an.

4. Eine Schule hat 500 Schüler. Zwei Schülerinnen erfinden ein Gerücht.
   Welches Modell beschreibt die Ausbreitung des Gerüchts? Ergänze fehlende Angaben.

5. Herr K. nimmt von einem bestimmten Tag an täglich 4 mg eines Medikamentes ein.
   20 % des Medikamentes werden täglich abgebaut.
   Beschreibe wie sich das Medikament im Körper anreichert.

6. Hopfen, der zur Herstellung von Bier benötigt wird, ist eine schnell wachsende Schlingpflanze. Zu Beginn einer Untersuchung sind die Pflanzen im Mittel 0,6 m hoch, nach 2 Wochen 1,2 m, nach 4 Wochen 2,3 m. Insgesamt werden Hopfenpflanzen 6 m hoch.
   a) Wie hoch sind die Pflanzen nach 6, 8, 10 Wochen?
   b) Wann haben die Pflanzen 99 % ihrer maximalen Höhe erreicht?

7. In einer Stadt von 550 000 Einwohnern wird die Verbreitung von Mobiltelefonen untersucht.
   Umfragen ergeben, dass etwa 60 % der Bevölkerung als Käufer in Frage kommen.
   Vor zwei Jahren besaßen 6000 Personen ein Mobiltelefon. In diesem Jahr sind es bereits 34000.
   Untersuche die weitere Entwicklung für die nächsten 8 Jahre sowohl mithilfe des beschränkten als auch des logistischen Wachstums.
   Welche Gründe sprechen für die jeweilige Modellierung?