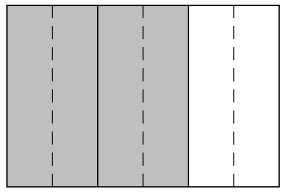
Bruchrechnung Begründungen

Von 12 Mäusen haben $\frac{2}{3}$ der Mäuse Angst vor Katzen. Wie viele Mäuse sind das?

Lösung: 8 Mäuse Begründung?

<u>Erweitern und Kürzen</u> Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren, bzw. dividieren.

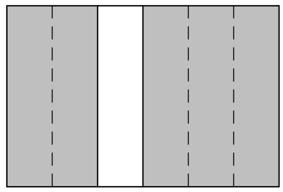
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

<u>Addition und Subtraktion</u> Bei gleichnamigen Brüchen werden nur die Zähler addiert, bzw. subtrahiert.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$



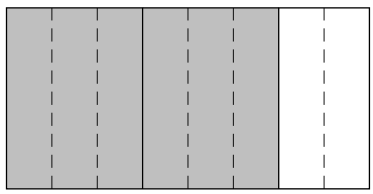
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

<u>Multiplikation</u> Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner, für 3 wird $\frac{3}{1}$ geschrieben.

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

$\frac{2}{5} \cdot 3$ bedeutet $\frac{2}{5}$ von 3, also $\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ bedeutet $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

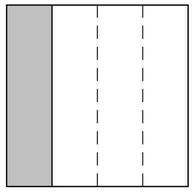


$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Bruchrechnung Begründungen

<u>Division</u> Durch eine Zahl dividieren heißt, mit ihrem Kehrwert zu multiplizieren. Kehrwert von 3 ist $\frac{1}{3}$.

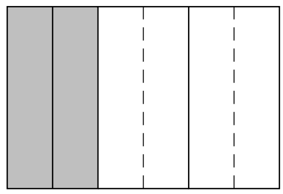
$1 : \frac{1}{4}$ bedeutet, wie oft $\frac{1}{4}$ in 1 enthalten ist, also $1 : \frac{1}{4} = 4$



$1 : \frac{1}{4} = 4$

$\frac{4}{5} : 2$ bedeutet, dass $\frac{4}{5}$ halbiert wird, also $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{3} : 2$ bedeutet wieder, dass $\frac{1}{3}$ halbiert wird, also $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

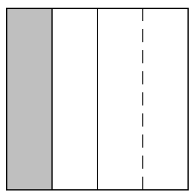


$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ bedeutet, wie oft $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ enthalten ist, also $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

$\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ bedeutet, wie oft $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ enthalten ist, also $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ *passt in* $\frac{1}{4}$ *zur Hälfte, entsprechend* $3 : 6 = \frac{1}{2}$



$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Anmerkungen zur Didaktik

Der Bruch $\frac{1}{2}$ ist die Hälfte von 1.

Der Bruch $\frac{2}{3}$ ist ein Drittel von 2. Zu begründen wäre: $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$ (z.B.) existiert - wie jede andere Zahl - nur in unserem Geist. Nur in Verbindung mit Einheiten werden Zahlen „sichtbar“. In unserer Umgebung finden wir $\frac{1}{2}\,m$, $\frac{1}{2}\,\mathit{Quadrat}$, usw.

$\frac{1}{2}$ *Quadrat* ist die Hälfte von 1 *Quadrat*.

$\frac{1}{2}$ von $3\,(= 1 + 1 + 1)$ ist $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$

Merke: „von“ bedeutet „mal“

Verschiedene Sichtweisen:

Der Bruch $\frac{3}{4}$ kann, wie jeder andere auch, auf mehrere Weisen betrachtet werden.

a) $\frac{3}{4}$ wird als Anteil gelesen, der von z.B. 20 Schafen gebildet wird.

20 Schafe sind durch 4 zu teilen, also 5 Schafe, anschließend ist mit 3 zu multiplizieren,

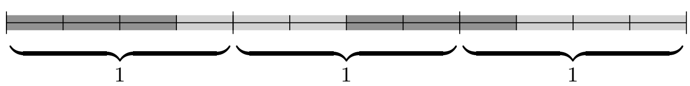
Ergebnis: 15 Schafe.

$\frac{3}{4}$ sind 3 mal $\frac{1}{4}$.

$\frac{3}{4}$ von 20, d.h. $\frac{3}{4} \cdot 20 = 3 \cdot 5 = 15$

Ein Anteil ist hier also auf etwas gerichtet, der Anteil von ...
Das Rechnen mit Anteilen ohne Bezug (Bruchrechnung) erscheint als nicht so naheliegend.
In der Prozentrechnung wird (einziger Unterschied) ausschließlich der Nenner 100 verwendet.

b) $\frac{3}{4}$ von 1, d.h. $\frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$, $3 \cdot \frac{1}{4} = 3 : 4$ Dies kann ansprechend veranschaulicht werden.



$\frac{3}{4}$ wird als Divisionsterm $3 : 4$ betrachtet, wobei auf die Division $3 : 4 = 0{,}75$ verzichtet wird.

Das vermeidet Ungenauigkeiten wie $\frac{1}{3} = 1 : 3 \approx 0{,}333333$.

$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$

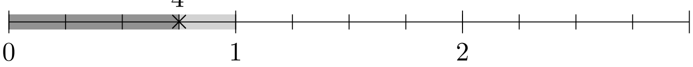
Der Vorteil der Bruchschreibweise wird erkennbar, wenn

$\frac{1}{3} = 1 : 3 \approx 0{,}333333$.

multipliziert wird, z.B. mit 18.

Für die Begründung der Rechenregeln bei dieser Sichtweise siehe: Bruchterme zusammenfassen
In der Unterstufe können die Rechenregeln anhand von Beispielen erläutert werden.

c) $\frac{3}{4}$ ist als Zahl zwischen 0 und 1 platziert.



In Rechnungen gehen die Sichtweisen nahtlos ineinander über:

$$\frac{2}{3} \text{ von } 18, \quad \text{d.h. } \frac{2}{3} \cdot 18 = \frac{36}{3} = 12$$ Vorheriges Kürzen wäre sinnvoll gewesen.

Um ein Agieren im Zahlbereich $\mathbb{Q}$ zu ermöglichen, wird, wenn es das Abstraktionsvermögen erlaubt, auf die Nennung von Einheiten verzichtet. Dies sollte bewusst geschehen, damit nicht der Eindruck entsteht, dass die Schreibweise unvollständig ist. Einsichtige Begründungen und regelmäßige Wiederholungen führen zu einer Vertrautheit mit den vielfältigen Regeln der Bruchrechnung.
Plantagenaufgaben, sowie große Zähler und Nenner schrecken eher ab. Den ggT und das kgV mit der Primfaktorzerlegung zu ermitteln, ist für die Bruchrechnung ohne Bedeutung.

Division durch einen Bruch

Unmittelbar einsichtig:

$$\frac{8}{2} = \frac{8\cdot 10}{2\cdot 10} = 4 \qquad\qquad 8 : 2 = 80 : 20$$

$$5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Wie verhält es sich mit:

$$\frac{4}{\frac{2}{5}} = ?$$

Wir vereinfachen, indem wir mit 5 erweitern

$$\frac{4}{\frac{2}{5}} = \frac{4\cdot 5}{\frac{2}{5}\cdot 5} = \frac{4\cdot 5}{2}$$

und erkennen, dass 4 mit $\frac{5}{2}$ (dem Kehrwert) zu multiplizieren ist.
Mit einem Blick: