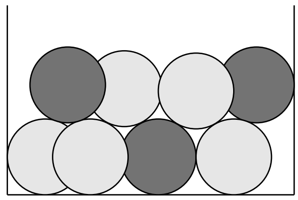
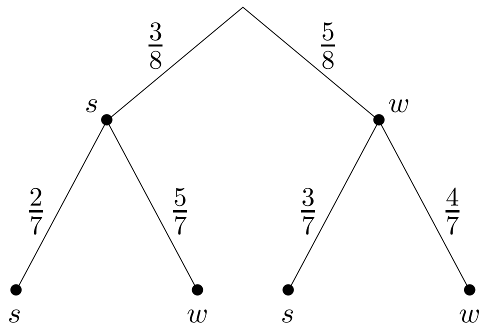
Pfadwahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln eine Doppelsechs zu erzielen, beträgt $\frac{1}{36}$.
Das Ergebnis legt die Vermutung nahe, dass wir lediglich $\frac{1}{6}$, also die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Würfeln eine Sechs zu werfen, mit sich selbst zu multiplizieren haben.
Betrachten wir ein typisches Beispiel für einen zweistufigen Zufallsversuch.



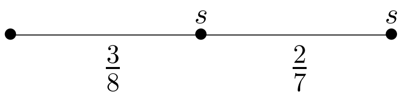
Eine Urne enthält 3 schwarze und 5 weiße Kugeln.
Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist?

Die Menge aller Elementarereignisse ist
$\{(s,s);\ (s,w);\ (w,s);\ (w,w)\}$
Jedem Elementarereignis entspricht ein Pfad durch den Baum.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades?

Betrachten wir hierzu den Pfad



und nehmen an, dass der zweistufige Versuch n-mal wiederholt wird.
Welcher Anteil der Wiederholungen wird diesen Pfad (s,s) einschlagen?

$\frac{3}{8}$ der Wiederholungen werden den Zweig s einschlagen und $\frac{2}{7}$ der $\frac{3}{8}\cdot n$ Fälle werden von s nach s gehen.
Deshalb wird der Anteil $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot n$ der n Wiederholungen entlang des Pfades "s, s" ablaufen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

$P(\text{"zweite Kugel ist schwarz"}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{3}{8}$

1. In einem dunklen Gang sind in einem Schubfach 4 schwarze, 6 rote und 2 weiße Socken. Zwei Socken werden zufällig gegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie gleichfarbig?

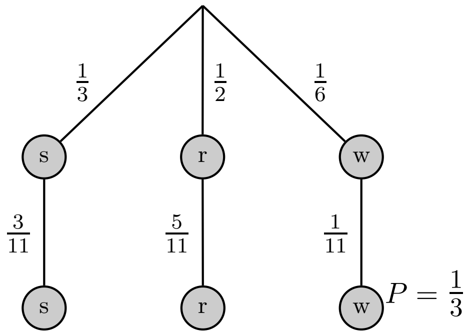
2. Eine Münze wird solange geworfen, bis zum 1. Mal "1" erscheint, höchstens aber 5mal.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beim 4. Wurf "1"?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 3. Wurf "1"?

3. Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Setzen auf "Rouge" gleich $\frac{1}{2}$ ist, schwören viele Roulettspieler auf folgendes System: Man setzt einen gewissen Betrag. Gewinnt man, hört man auf und erhält als Gewinn den doppelten Einsatz. Verliert man, so verdoppelt man den Einsatz und spielt weiter. Ein Spieler beginnt mit 10 € Einsatz, er könnte bis zu 6 Spiele mitmachen. Wie groß ist sein zu erwartender Reingewinn?

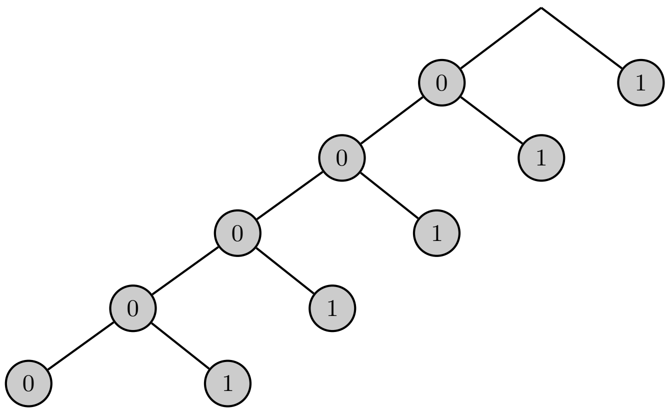
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim 3-maligen Würfeln
   a) nie eine Sechs, b) genau eine Sechs,
   c) genau 2 Sechsen, d) mindestens 2 Sechsen zu werfen?

Pfadwahrscheinlichkeiten Hinweise

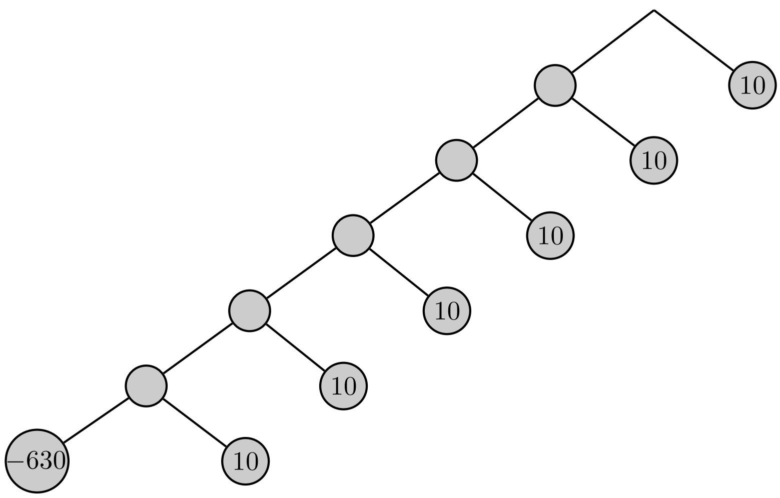
1. In einem dunklen Gang sind in einem Schubfach 4 schwarze, 6 rote und 2 weiße Socken. Zwei Socken werden zufällig gegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die gleiche Farbe haben?



2. Eine Münze wird solange geworfen, bis zum 1. Mal "1" erscheint, höchstens aber 5mal.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beim 4. Wurf "1"? $\frac{1}{16}$
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 3. Wurf "1"? $\frac{7}{8}$



3. Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Setzen auf "Rouge" gleich $\frac{1}{2}$ ist, schwören viele Roulettspieler auf folgendes System: Man setzt einen gewissen Betrag. Gewinnt man, hört man auf und erhält als Gewinn den doppelten Einsatz. Verliert man, so verdoppelt man den Einsatz und spielt weiter. Ein Spieler beginnt mit 10 € Einsatz, er könnte bis zu 6 Spiele mitmachen. Wie groß ist sein zu erwartender Reingewinn?

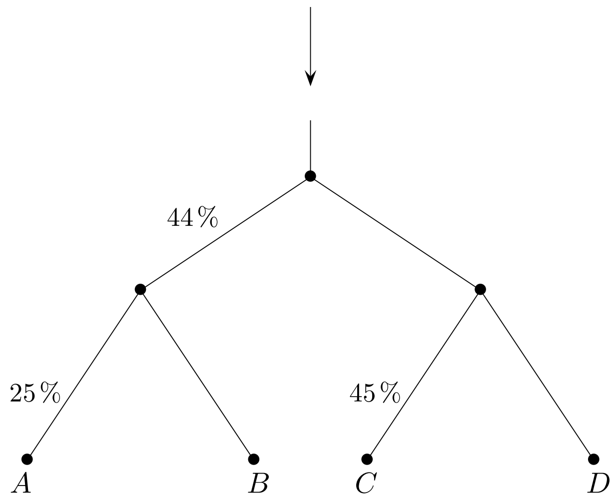


4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim 10-maligen Würfeln
   a) nie eine Sechs, 0,162
   b) genau eine Sechs, 0,323
   c) genau 2 Sechsen, 0,291
   d) mindestens 2 Sechsen zu werfen? 0,515

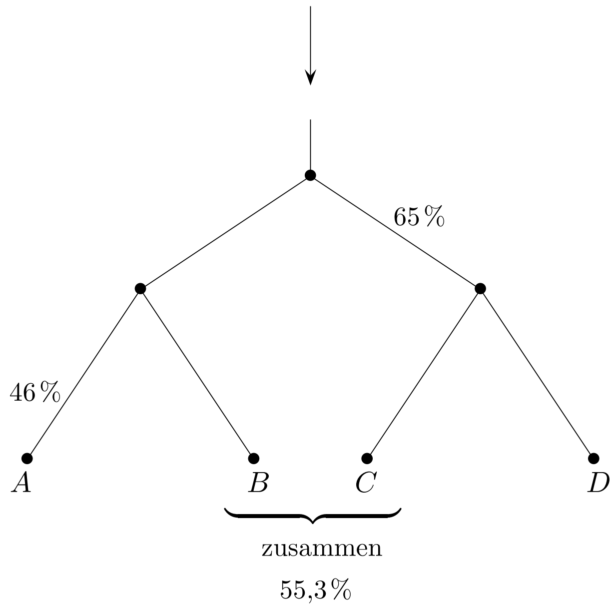
Verzweigungen

Wasser fließt durch ein Rohrsystem.
Durch welche Öffnung tritt am meisten Wasser aus?

a)

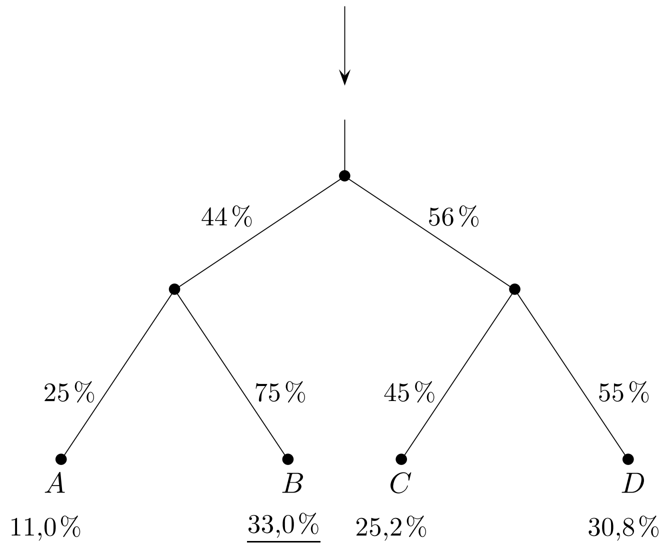


b)

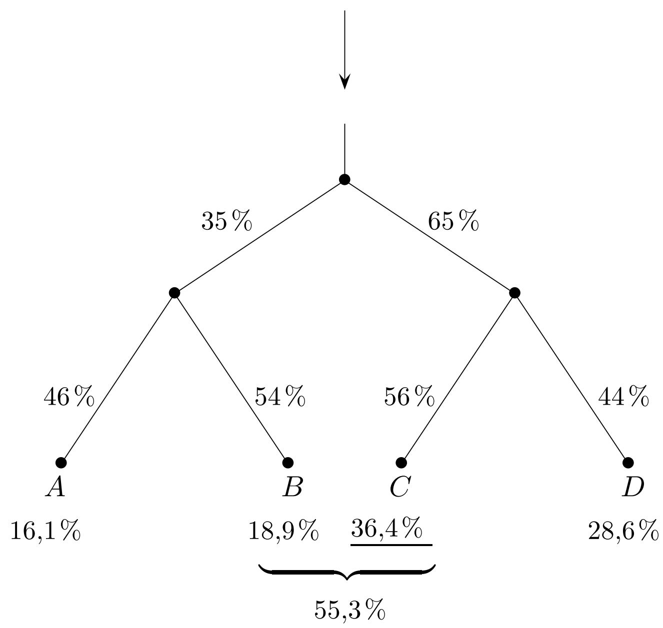


Wasser fließt durch ein Rohrsystem.
Durch welche Öffnung tritt am meisten Wasser aus?

a)



b)



Aufgaben

1. Ein Würfel wird zweimal geworfen und die Augenzahlen addiert.
   Welches Ereignis ist wahrscheinlicher, die

   a) Augensumme 9 oder die
   b) Augensumme 4 zu erhalten?

2. Urne 1 enthält drei Kugeln mit den Aufschriften E, V und A,
   Urne 2 einen doppelten Satz dieser Kugeln.
   Drei Kugeln werden einzeln ohne Zurücklegen derselben Urne entnommen.
   Bei welcher Urne ist es wahrscheinlicher, das Wort EVA zu erhalten?
   (Die erste gezogene Kugel muss also die Aufschrift E haben.)

3. Ein Verurteilter erhält die Chance zur Erlassung seiner Strafe.
   Er darf 4 Kugeln (2 schwarze, 2 weiße) auf 2 Urnen verteilen, wobei keine Urne leer bleiben darf. Ist dann eine aus den Urnen zufällig gezogene Kugel weiß, erlischt die Strafe.
   Welche Verteilung wäre ratsam?

4. Tom und Jerry würfeln, pro Spiel wird einmal ein Würfel geworfen. Fällt mindestens eine 5, erhält Jerry 2 € von Tom, andernfalls zahlt Jerry 1 € an Tom. Ist das Spiel fair, d. h. sind der zu erwartende Gewinn und der zu erwartende Verlust für beide gleich?

Aufgaben Lösungen

1. Ein Würfel wird zweimal geworfen und die Augenzahlen addiert.
   Welches Ereignis ist wahrscheinlicher, die

   a) Augensumme 9 oder die $\frac{4}{36}$

   b) Augensumme 4 zu erhalten? $\frac{3}{36}$

2. Urne 1 enthält drei Kugeln mit den Aufschriften E, V und A,
   Urne 2 einen doppelten Satz dieser Kugeln.
   Drei Kugeln werden einzeln ohne Zurücklegen derselben Urne entnommen.
   Bei welcher Urne ist es wahrscheinlicher, das Wort EVA zu erhalten?
   (Die erste gezogene Kugel muss also die Aufschrift E haben.)

   Urne 1: $\frac{1}{6}$

   Urne 2: $\frac{1}{15}$

3. Ein Verurteilter erhält die Chance zur Erlassung seiner Strafe.
   Er darf 4 Kugeln (2 schwarze, 2 weiße) auf 2 Urnen verteilen, wobei keine Urne leer bleiben darf. Ist dann eine aus den Urnen zufällig gezogene Kugel weiß, erlischt die Strafe.
   Welche Verteilung wäre ratsam?

   Die Wahrscheinlichkeit für die Erlassung der Strafe kann maximal $\frac{2}{3}$ sein.

4. Tom und Jerry würfeln, pro Spiel wird einmal ein Würfel geworfen. Fällt mindestens eine 5, erhält Jerry 2€ von Tom, andernfalls zahlt Jerry 1€ an Tom. Ist das Spiel fair, d. h. sind der zu erwartende Gewinn und der zu erwartende Verlust für beide gleich?

   Das Spiel ist fair.

Pfaddiagramm

Wir verwenden die Abkürzungen:

m	männlich
w	weiblich
$\geq$	Gehalt beträgt mindestens 3000 €
$\leq$	Gehalt beträgt höchstens 3000 €

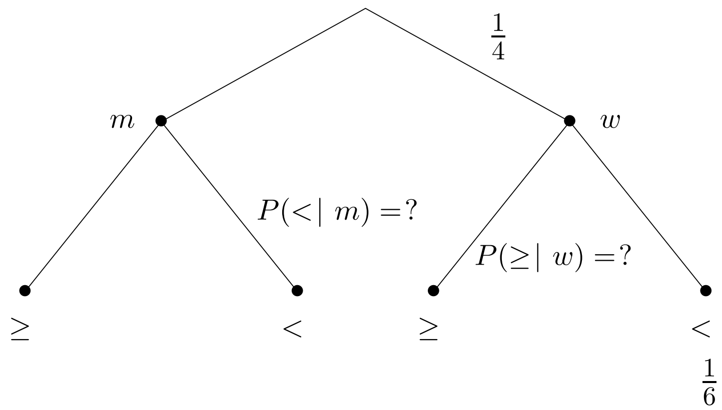
Die Anteile für einen Betrieb seien:

$$P(w) = \frac{1}{4}$$

$$P(w \text{ und } \leq) = \frac{1}{6}$$

$$P(\geq) = \frac{7}{12}$$

Wird ein Arbeitnehmer bzw. eine Arbeitnehmerin zufällig herausgegriffen,
können die Anteile als Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.



Gesucht sind $P(\leq | \, m)$, der Anteil an den Männern also, deren Gehalt höchstens 3000 € beträgt,
und $P(\geq | \, w)$.

Wir verwenden die Abkürzungen:

m	männlich
w	weiblich
$\geq$	Gehalt beträgt mindestens 3000 €
$\leq$	Gehalt beträgt höchstens 3000 €

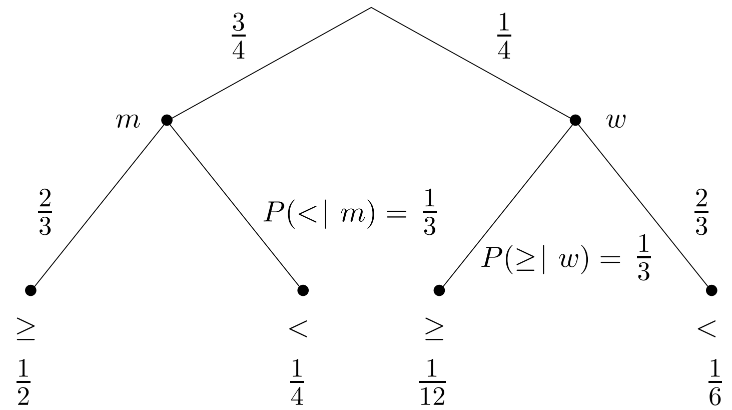
Die Anteile für einen Betrieb seien:

$P(w) = \frac{1}{4}$

$P(w \text{ und } \leq) = \frac{1}{6}$

$P(\geq) = \frac{7}{12}$

Wird ein Arbeitnehmer bzw. eine Arbeitnehmerin zufällig herausgegriffen, können die Anteile als Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.

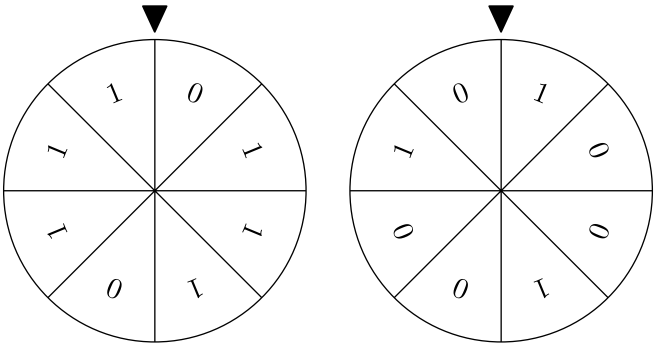


$P(\leq\mid m) = \frac{1}{3}$

$P(\geq\mid w) = \frac{1}{3}$

Glücksräder

1.

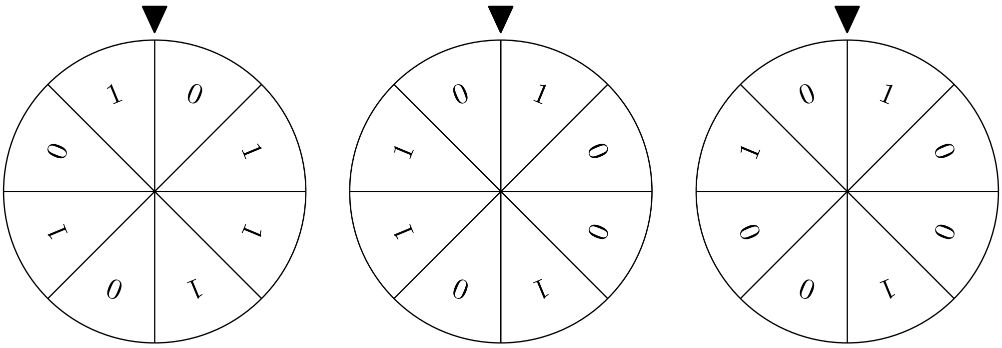


In einem Glücksspielautomaten sind 2 Glücksräder (siehe Abbildung) untergebracht.
Die Glücksräder werden gleichzeitig gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Glücksräder

a) eine 1,

b) eine 0 zeigen?

2.



In einem Glücksspielautomaten sind 3 Glücksräder (siehe Abbildung) untergebracht.
Die Glücksräder werden gleichzeitig gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Glücksräder

a) eine 1,

b) eine 0 zeigen?

Lösungen

1. $P(1 \mid 1) = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{8} = 28{,}1\,\%$

   $P(0 \mid 0) = \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{8} = 15{,}6\,\%$

2. $P(1 \mid 1 \mid 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = 11{,}7\,\%$

   $P(0 \mid 0 \mid 0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = 11{,}7\,\%$

Mehrstufiges

1. In einem Krankenhaus werden dringend Blutspenden der Blutgruppe B benötigt, die bei der deutschen Bevölkerung nur mit ca. 11 % vorkommt. Nacheinander kommen Spender zum Krankenhaus. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) unter zwei Blutspendern genau einer mit Blutgruppe B ist,
   b) unter vier Blutspendern keiner mit Blutgruppe B ist,
   c) unter sechs Blutspendern mindestens einer mit Blutgruppe B ist.

2. In einer Klasse mit 15 Jungen und 12 Mädchen sollen 3 Freikarten verlost werden. Dazu werden die Namen der Schülerinnen und Schüler auf Zettel geschrieben und in einen Briefumschlag gelegt. Aus diesem Umschlag werden dann drei Zettel gezogen.
   Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür,
   a) dass zwei der Jungen und eines der Mädchen jeweils eine Freikarte erhalten,
   b) dass nur Mädchen Freikarten erhalten.

3. In einem Gefäß befinden sich fünf Kugeln mit der Beschriftung „2“ und drei Kugeln mit der Beschriftung „3“. Man zieht eine Kugel, legt sie vor sich auf den Tisch und zieht eine zweite Kugel, die man ebenfalls daneben auf den Tisch legt. Ist die Summe der beiden Zahlen auf den Kugeln gerade, hat man gewonnen. Ermittle die Gewinnchancen dieses Spiels.

Mehrstufiges

1. In einem Krankenhaus werden dringend Blutspenden der Blutgruppe B benötigt, die bei der deutschen Bevölkerung nur mit ca. 11 % vorkommt. Nacheinander kommen Spender zum Krankenhaus. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   a) unter zwei Blutspendern genau einer mit Blutgruppe B ist,

   $$P(B\overline{B}) + P(\overline{B}B) = 0{,}11 \cdot (1 - 0{,}11) + (1 - 0{,}11) \cdot 0{,}11 = 2 \cdot 0{,}11 \cdot (1 - 0{,}11) = 0{,}196 = 19{,}6\,\%$$

   b) unter vier Blutspendern keiner mit Blutgruppe B ist,

   $$P(\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}89^4 = 0{,}627$$

   c) unter sechs Blutspendern mindestens einer mit Blutgruppe B ist. $1 - 0{,}89^6 = 0{,}503$

2. In einer Klasse mit 15 Jungen und 12 Mädchen sollen 3 Freikarten verlost werden. Dazu werden die Namen der Schülerinnen und Schüler auf Zettel geschrieben und in einen Briefumschlag gelegt. Aus diesem Umschlag werden dann drei Zettel gezogen.
   Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür,

   a) dass zwei der Jungen und eines der Mädchen jeweils eine Freikarte erhalten,

   $$P(JJM) + P(JMJ) + P(MJJ) = \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{12}{25} + \frac{15}{27} \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{14}{25} + \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26} \cdot \frac{14}{25} = 3 \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{12}{25} = 0{,}431$$

   b) dass nur Mädchen Freikarten erhalten.

   $$P(MMM) = \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} \cdot \frac{10}{25} = 0{,}075 = 7{,}5\,\%$$

3. In einem Gefäß befinden sich fünf Kugeln mit der Beschriftung „2“ und drei Kugeln mit der Beschriftung „3“. Man zieht eine Kugel, legt sie vor sich auf den Tisch und zieht eine zweite Kugel, die man ebenfalls daneben auf den Tisch legt. lst die Summe der beiden Zahlen auf den Kugeln gerade, hat man gewonnen. Ermittle die Gewinnchancen dieses Spiels.

   $$P(22) + P(33) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 0{,}464 = 46{,}4\,\%$$