Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Eine alte chinesische Aufgabe lautet:

In einem Stall befinden sich 35 Tiere, und zwar Hühner und Kaninchen. Die Tiere haben zusammen 94 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?

Lösungsansatz:
Sei x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Kaninchen. Die Fragestellung führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94 \end{aligned}$$

Um erkennen zu können, wie ein Gleichungssystem gelöst werden kann, betrachten wir zunächst ein einfacheres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 5 \\ x & - & 3y & = & -1 \\ \hline 2x & & & = & 4 \\ & & x & = & 2 \\ & & y & = & 1 \end{array}$$

Die Addition der linken und rechten Seiten führt zu einer Gleichung, die nur noch <u>eine</u> Variable enthält und daher direkt gelöst werden kann.

$x = 2$ wird in eine Gleichung, z.B. $x + 3y = 5$, eingesetzt, um $y = 1$ zu erhalten.

Betrachten wir nun ein allgemeineres Gleichungssystem:

Durch geeignete Multiplikation kann erreicht werden, dass nach der Addition eine Variable herausfällt.

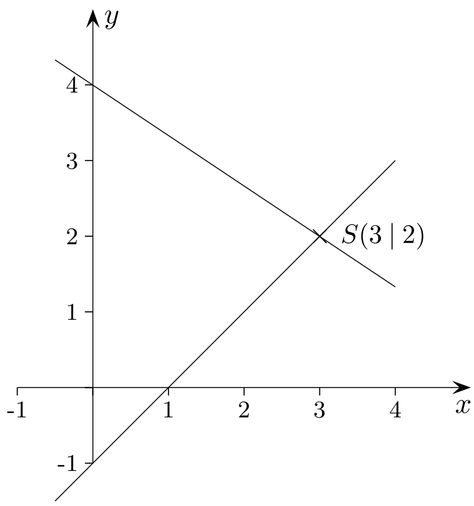
$$\begin{array}{rcrcrl} 5x & + & 2y & = & 9 & \mid \cdot 3 \\ 2x & - & 3y & = & -4 & \mid \cdot 2 \\ \hline 15x & + & 6y & = & 27 & \\ 4x & - & 6y & = & -8 & \\ \hline 19x & & & = & 19 & \\ & & x & = & 1 & \\ & & y & = & 2 & \end{array}$$

Das folgende Gleichungssystem soll graphisch gelöst werden.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir die Gleichungen nach y auf und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + 4 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$



Weitere Aufgaben: (rechnerische Lösung)

a) $\begin{aligned} 7x - 3y &= 11 \\ 5x + 8y &= 18 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 2y &= 9 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x &= 10 - 4(y+2) \\ 3x &= 6 - 3(y-5) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \frac{4}{5}(x-2) &= 8 - 4y \\ \frac{2}{3}(x-3) &= 6 - y \end{aligned}$

Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Eine alte chinesische Aufgabe lautet:

In einem Stall befinden sich 35 Tiere, und zwar Hühner und Kaninchen. Die Tiere haben zusammen 94 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?

Lösungsansatz:
Sei x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Kaninchen. Die Fragestellung führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94 \end{aligned}$$

Um erkennen zu können, wie ein Gleichungssystem gelöst werden kann, betrachten wir zunächst ein einfacheres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 5 \\ x & - & 3y & = & -1 \\ \hline 2x & & & = & 4 \\ & & x & = & 2 \\ & & y & = & 1 \end{array}$$

Die Addition der linken und rechten Seiten führt zu einer Gleichung, die nur noch <u>eine</u> Variable enthält und daher direkt gelöst werden kann.

$x = 2$ wird in eine Gleichung, z.B. $x + 3y = 5$, eingesetzt, um $y = 1$ zu erhalten.

Betrachten wir nun ein allgemeineres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrl} 5x & + & 2y & = & 9 & \mid \cdot 3 \\ 2x & - & 3y & = & -4 & \mid \cdot 2 \\ \hline 15x & + & 6y & = & 27 & \\ 4x & - & 6y & = & -8 & \\ \hline 19x & & & = & 19 & \\ & & x & = & 1 & \\ & & y & = & 2 & \end{array}$$

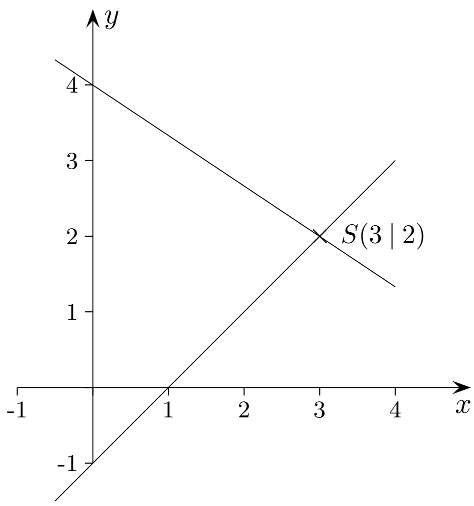
Durch geeignete Multiplikation kann erreicht werden, dass nach der Addition eine Variable herausfällt.

Das folgende Gleichungssystem soll graphisch gelöst werden.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir die Gleichungen nach y auf und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + 4 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$



Weitere Aufgaben: (rechnerische Lösung)

a) $\begin{aligned} 7x - 3y &= 11 \\ 5x + 8y &= 18 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 2y &= 9 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x &= 10 - 4(y+2) \\ 3x &= 6 - 3(y-5) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \frac{4}{5}(x-2) &= 8 - 4y \\ \frac{2}{3}(x-3) &= 6 - y \end{aligned}$

Lösungen:

a) $x = 2;\ y = 1$ b) $x = 10;\ y = 3$

c) $x = 13;\ y = -6$ d) $x = 12;\ y = 0$

Die Lösung der chinesischen Aufgabe lautet: $x = 23;\ y = 12$

Gleichungssysteme mit dem GTR lösen

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & 9 \\ 2x & - & 3y & = & -4 \end{array}$$

Um Gleichungssysteme mit dem GTR zu lösen,
wird zunächst die Koeffizientenmatrix eingegeben.
Das Gleichungssystem muss in der Normalform vorliegen:
Variablen links mit gleicher Reihenfolge, Zahlen rechts.

$$\begin{array}{rrr} 5 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & -4 \end{array}$$

Der GTR liefert das Ergebnis in der Form:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem in der sogenannten Diagonalform.

$$\begin{array}{rcrcr} 1x & + & 0y & = & 1 \\ 0x & + & 1y & = & 2 \end{array}$$

oder kurz:

$$\begin{array}{rrcr} x & & = & 1 \\ & y & = & 2 \end{array}$$

Jedes Gleichungssystem kann durch wiederholtes

a) Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl,
b) Addieren zweier Gleichungen (jeweils rechte und linke Seiten)

auf die Diagonalform gebracht werden.

Löse mit dem GTR:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & 7y & = & 2 \end{array}$$

Ergebnis: $x = \frac{1}{23}, \quad y = \frac{6}{23}$

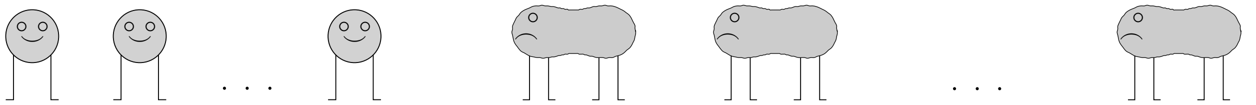
Mit 2nd MATRIX | EDIT werden die Matrix-Koeffizienten eingegeben.
2×3 bedeutet: 2 Zeilen (waagerecht), 3 Spalten (senkrecht).
Editor mit 2nd Quit verlassen.
Mit 2nd MATRIX | MATH | B: rref([A]) wird das LGS gelöst.
2nd MATRIX | NAMES 1: liefert z. B. [A],
MATH | 1:Frac versucht Brüche zu erzeugen.

rref reduced row (Zeile) echelon form (Treppen- oder Stufenform)

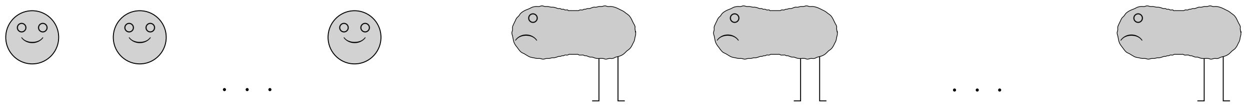
Köpfe-Beine-Aufgabe

Die chinesische Aufgabe kann einfacher gelöst werden, z. B. mit einer innerer Anschauung, die folgendermaßen aussehen könnte (auch große Mathematiker haben in Bildern gedacht):

Gegeben: $Anzahl_{Beine}\,,\ \ Anzahl_{Köpfe}$



Betrachte: $\quad Anzahl_{Beine} - 2 \cdot Anzahl_{Köpfe}$ $\qquad$ *(achte auf die Beine)*



und teile das Ergebnis durch 2:

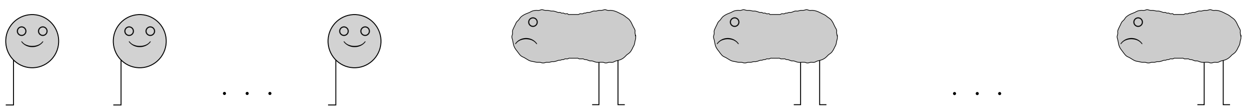
$$\frac{Anzahl_{Beine} - 2 \cdot Anzahl_{Köpfe}}{2}$$

Dies ergibt die Anzahl der Vierbeiner.

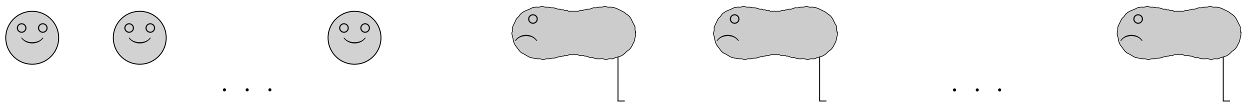
Eine Umformung liefert eine weitere Möglichkeit:

$$\frac{Anzahl_{Beine} - 2 \cdot Anzahl_{Köpfe}}{2} = \frac{Anzahl_{Beine}}{2} - Anzahl_{Köpfe}$$

Betrachte: $\quad \dfrac{Anzahl_{Beine}}{2}$



und vermindere das Ergebnis um $Anzahl_{Köpfe}$:



Weg zum Additionsverfahren

Vorüberlegung

$$\left.\begin{array}{rcl} 1\ +\ 3 & = & 4 \\ 2\ +\ 4 & = & 6 \end{array}\right\}+$$
$$1+2+3+4 = 10$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & b \\ -a & = & c \end{array}\right\}+$$
$$0 = b+c$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & b \\ c & = & d \end{array}\right\}+$$
$$a+c = b+d$$

Wende diese Überlegung auf die Gleichungssysteme an,
so dass eine Variable beim Addieren herausfällt.
Beachte, eine Gleichung (rechte und linke Seite) kann mit einer Zahl multipliziert werden.

a) $$\begin{array}{rcl} x - y & = & 5 \\ x + y & = & 11 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ x + y & = & 10 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 3 \\ 4x + 3y & = & 23 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcl} 3x + 5y & = & 13 \\ 4x + 3y & = & 10 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 5 \\ x & + & y & = & 11 \\ \hline & & \multicolumn{3}{c}{\ldots} \\ & & x & = & 8 \\ & & y & = & 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcll} x & - & 2y & = & 1 & \\ x & + & y & = & 10 & \mid \cdot 2 \\ \hline & & \multicolumn{3}{c}{\ldots} & \\ & & x & = & 7 & \\ & & y & = & 3 & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcll} x & - & 2y & = & 3 & \mid \cdot (-4) \\ 4x & + & 3y & = & 23 & \\ \hline & & \multicolumn{3}{c}{\ldots} & \\ & & x & = & 5 & \\ & & y & = & 1 & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrclll} 3x & + & 5y & = & 13 & \mid \cdot 3 & \text{(z. B.)} \\ 4x & + & 3y & = & 10 & \mid \cdot (-5) & \\ \hline & & \multicolumn{3}{c}{\ldots} & & \\ & & x & = & 1 & & \\ & & y & = & 2 & & \end{array}$$

Gleichungssysteme mit Parametern

1.
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ (1-a)x - ay &= 2 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} ax + y &= 2a \\ x + \frac{1}{b}y &= 1 \end{aligned}$$

Ergebnisse

1.
$$\begin{aligned} x &= 2+a \\ y &= -1-a \end{aligned}$$

2.
$$x = -\frac{ab}{a-b} = \frac{ab}{b-a}, \qquad a \neq b$$
$$y = \frac{2a-b}{a-b}$$