

Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Eine alte chinesische Aufgabe lautet:

In einem Stall befinden sich 35 Tiere, und zwar Hühner und Kaninchen. Die Tiere haben zusammen 94 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?

Um erkennen zu können, wie ein Gleichungssystem gelöst werden kann, betrachten wir zunächst ein einfacheres Gleichungssystem:

Die Addition der linken und rechten Seiten führt zu einer Gleichung, die nur noch eine Variable enthält und daher direkt gelöst werden kann.

$x = 2$ wird in eine Gleichung, z.B. $x + 3y = 5$, eingesetzt, um $y = 1$ zu erhalten.

Betrachten wir nun ein allgemeineres Gleichungssystem:

Durch geeignete Multiplikation kann erreicht werden, dass nach der Addition eine Variable herausfällt.

Das folgende Gleichungssystem soll graphisch gelöst werden.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir die Gleichungen nach y auf und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + 4 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

Weitere Aufgaben: (rechnerische Lösung)

a) $7x - 3y = 11$
 $5x + 8y = 18$

b) $\frac{3}{2}x - 2y = 9$
 $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y = 5$

c) $2x = 10 - 4(y + 2)$
 $3x = 6 - 3(y - 5)$

d) $\frac{4}{5}(x - 2) = 8 - 4y$
 $\frac{2}{3}(x - 3) = 6 - y$

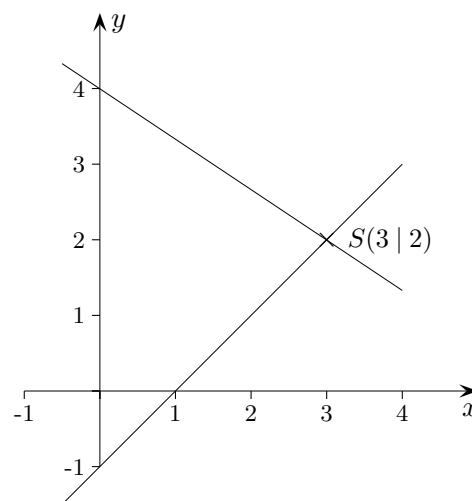
Lösungsansatz:

Sei x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Kaninchen. Die Fragestellung führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ \underline{x - 3y = -1} \\ 2x = 4 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = 9 \quad | \cdot 3 \\ 2x - 3y = -4 \quad | \cdot 2 \\ \hline 15x + 6y = 27 \\ 4x - 6y = -8 \\ \hline 19x = 19 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$



Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Eine alte chinesische Aufgabe lautet:

In einem Stall befinden sich 35 Tiere, und zwar Hühner und Kaninchen. Die Tiere haben zusammen 94 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?

Um erkennen zu können, wie ein Gleichungssystem gelöst werden kann, betrachten wir zunächst ein einfacheres Gleichungssystem:

Die Addition der linken und rechten Seiten führt zu einer Gleichung, die nur noch eine Variable enthält und daher direkt gelöst werden kann.

$x = 2$ wird in eine Gleichung, z.B. $x + 3y = 5$, eingesetzt, um $y = 1$ zu erhalten.

Betrachten wir nun ein allgemeineres Gleichungssystem:

Durch geeignete Multiplikation kann erreicht werden, dass nach der Addition eine Variable herausfällt.

Das folgende Gleichungssystem soll graphisch gelöst werden.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir die Gleichungen nach y auf und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + 4 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

Weitere Aufgaben: (rechnerische Lösung)

a) $7x - 3y = 11$
 $5x + 8y = 18$

b) $\frac{3}{2}x - 2y = 9$
 $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y = 5$

c) $2x = 10 - 4(y + 2)$
 $3x = 6 - 3(y - 5)$

d) $\frac{4}{5}(x - 2) = 8 - 4y$
 $\frac{2}{3}(x - 3) = 6 - y$

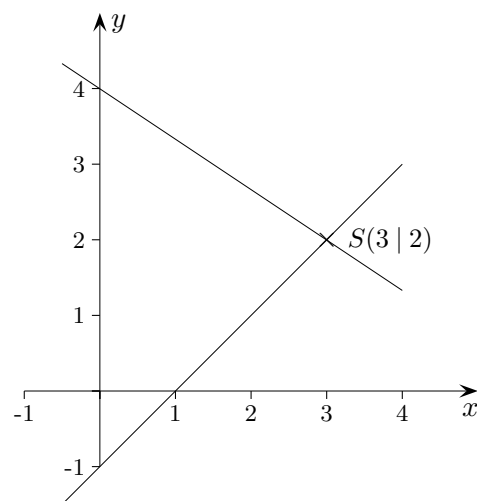
Lösungsansatz:

Sei x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Kaninchen. Die Fragestellung führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ \underline{x - 3y = -1} \\ 2x \quad = 4 \\ x \quad = 2 \\ y \quad = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = 9 \quad | \cdot 3 \\ 2x - 3y = -4 \quad | \cdot 2 \\ \hline 15x + 6y = 27 \\ 4x - 6y = -8 \\ \hline 19x \quad = 19 \\ x \quad = 1 \\ y \quad = 2 \end{array}$$



Lösungen:

- a) $x = 2; y = 1$ b) $x = 10; y = 3$
 c) $x = 13; y = -6$ d) $x = 12; y = 0$

Die Lösung der chinesischen Aufgabe lautet: $x = 23; y = 12$

Gleichungssysteme mit dem GTR lösen

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -4 \end{array}$$

Um Gleichungssysteme mit dem GTR zu lösen, wird zunächst die Koeffizientenmatrix eingegeben. Das Gleichungssystem muss in der Normalform vorliegen: Variablen links mit gleicher Reihenfolge, Zahlen rechts.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \quad 9 \\ 2 \quad -3 \quad -4 \end{array}$$

Der GTR liefert das Ergebnis in der Form:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem in der sogenannten Diagonalform.

$$\begin{array}{r} 1x + 0y = 1 \\ 0x + 1y = 2 \end{array}$$

oder kurz:

$$\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

Jedes Gleichungssystem kann durch wiederholtes

- Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl,
- Addieren zweier Gleichungen (jeweils rechte und linke Seiten)

auf die Diagonalform gebracht werden.

Löse mit dem GTR:

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 1 \\ 4x + 7y = 2 \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } x = \frac{1}{23}, \quad y = \frac{6}{23}$$

Mit 2nd MATRIX | EDIT werden die Matrix-Koeffizienten eingegeben.

2 × 3 bedeutet: 2 Zeilen (waagrecht), 3 Spalten (senkrecht).

Editor mit 2nd Quit verlassen.

Mit 2nd MATRIX | MATH | B:rref([A]) wird das LGS gelöst.

2nd MATRIX | NAMES 1: liefert z.B. [A],

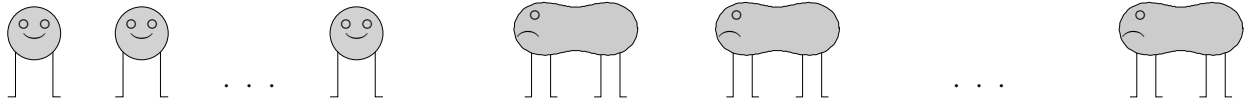
MATH | 1:Frac versucht Brüche zu erzeugen.

rref reduced row (Zeile) echelon form (Treppen- oder Stufenform)

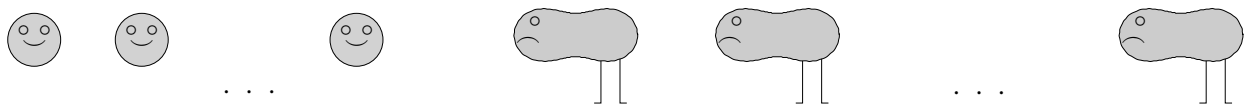
Köpfe-Beine-Aufgabe

Die chinesische Aufgabe kann einfacher gelöst werden, z. B. mit einer inneren Anschauung, die folgendermaßen aussehen könnte (auch große Mathematiker haben in Bildern gedacht):

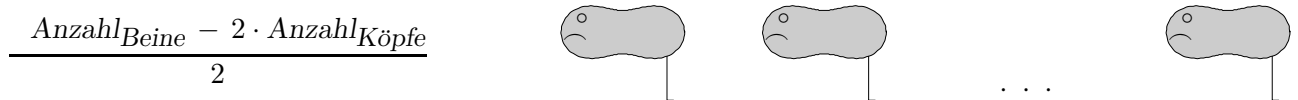
Gegeben: $Anzahl_{\text{Beine}}$, $Anzahl_{\text{Köpfe}}$



Betrachte: $Anzahl_{\text{Beine}} - 2 \cdot Anzahl_{\text{Köpfe}}$ (achte auf die Beine)



und teile das Ergebnis durch 2:

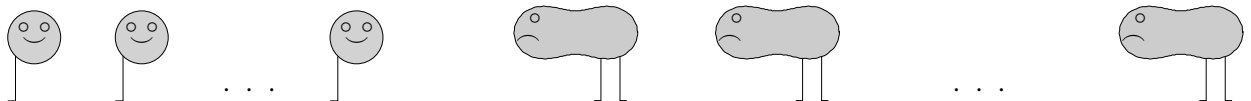


Dies ergibt die Anzahl der Vierbeiner.

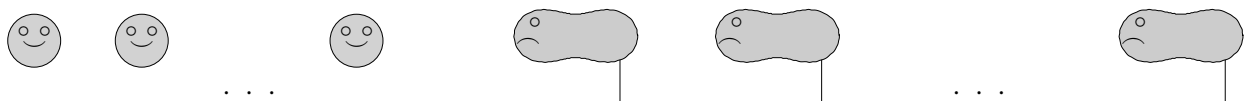
Eine Umformung liefert eine weitere Möglichkeit:

$$\frac{Anzahl_{\text{Beine}} - 2 \cdot Anzahl_{\text{Köpfe}}}{2} = \frac{Anzahl_{\text{Beine}}}{2} - Anzahl_{\text{Köpfe}}$$

Betrachte: $\frac{Anzahl_{\text{Beine}}}{2}$



und vermindere das Ergebnis um $Anzahl_{\text{Köpfe}}$:



Weg zum Additionsverfahren

Vorüberlegung

$$\begin{array}{r} 1 + 3 = 4 \\ 2 + 4 = 6 \\ \hline 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1 + 3 = 4 \\ 2 + 4 = 6 \\ \hline 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ -a = c \\ \hline 0 = b + c \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} a = b \\ -a = c \\ \hline 0 = b + c \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}} \right\} +$$

Wende diese Überlegung auf die Gleichungssysteme an,
so dass eine Variable beim Addieren herausfällt.

Beachte, eine Gleichung (rechte und linke Seite) kann mit einer Zahl multipliziert werden.

a)
$$\begin{array}{r} x - y = 5 \\ x + y = 11 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ x + y = 10 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ 4x + 3y = 23 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad x - y = 5 \\
 \quad \quad x + y = 11 \\
 \hline
 \quad \quad \dots \\
 \quad \quad x = 8 \\
 \quad \quad y = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b)} \quad x - 2y = 1 \\
 \quad \quad x + y = 10 \quad | \cdot 2 \\
 \hline
 \quad \quad \dots \\
 \quad \quad x = 7 \\
 \quad \quad y = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c)} \quad x - 2y = 3 \quad | \cdot (-4) \\
 \quad \quad 4x + 3y = 23 \\
 \hline
 \quad \quad \dots \\
 \quad \quad x = 5 \\
 \quad \quad y = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{d)} \quad 3x + 5y = 13 \quad | \cdot 3 \quad (\text{z.B.}) \\
 \quad \quad 4x + 3y = 10 \quad | \cdot (-5) \\
 \hline
 \quad \quad \dots \\
 \quad \quad x = 1 \\
 \quad \quad y = 2
 \end{array}$$

Gleichungssysteme mit Parametern

1.
$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\(1 - a)x - ay &= 2\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}ax + y &= 2a \\x + \frac{1}{b}y &= 1\end{aligned}$$

Ergebnisse

1.
$$\begin{aligned}x &= 2 + a \\y &= -1 - a\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}x &= -\frac{ab}{a-b} = \frac{ab}{b-a}, \quad a \neq b \\y &= \frac{2a-b}{a-b}\end{aligned}$$