

Quadratische Gleichung

Steht in einer Gleichung auf der einen Seite eine Null, so sehen wir zunächst nach, ob x oder eine Potenz von x (x^2, x^3, \dots) ausgeklammert werden kann. Die größtmögliche Potenz von x , die in *jedem* Summanden enthalten ist, klammern wir aus. Es entsteht ein Produkt.

*Wenn ein Produkt Null ergeben soll,
so muss mindestens ein Faktor Null ergeben.*

Die einzelnen Faktoren sind daher zu untersuchen, für welche x sie Null ergeben.

Liegt eine Gleichung in der Form $(x - 3)(2x + 5) = 0$ vor, so kann die Lösung sofort angegeben werden:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

Etwas schwieriger ist eine Gleichung zu lösen, falls nicht ausgeklammert werden kann, weil ein Summand ohne x vorhanden ist, wie z.B. in

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form $(x + 3)^2 = 16$ gebracht werden. Da auf der rechten Seite eine 16 steht, müssen $x + 3 = 4$ oder $x + 3 = -4$ sein. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -7$.

Schreibt man dieses Verfahren allgemein für

$$x^2 + px + q = 0$$

auf, so ergibt sich eine Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen, die sogenannte *pq-Formel*.

Beispiel: $x^2 - 8x + 12 = 0$ Hier ist $p = -8$ und $q = 12$.

Es gibt eine einfache Merkregel, um die Formel anzuwenden:

- Zahl vor x (hier -8) durch 2 teilen und Vorzeichen umkehren,
- Ergebnis (hier 4) quadrieren und unter die Wurzel schreiben,
- Vorzeichen der Zahl (hier 12) wechseln und unter die Wurzel schreiben.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ x_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 12} \\ x_{1,2} &= 4 \pm 2 \\ x_1 &= 6; \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Einfache Probe für das Ergebnis $x_1 = 6; \quad x_2 = 2$:

Es ist $x_1 \cdot x_2 = 12$ und $x_1 + x_2 = 8$, stets gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ und } x_1 + x_2 = -p$$

Zur weiteren Übung:

- | | |
|--|------------------------|
| a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ | b) $x^2 - 3x - 10 = 0$ |
| c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ | d) $x^2 - 7x = 0$ |
| e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$ | f) $ax^2 + bx + c = 0$ |

Die pq-Formel kann nur auf die Normalform $x^2 + px + q = 0$ angewendet werden. Falls die Gleichung z.B. mit $3x^2$ beginnt, so ist die Gleichung durch 3 zu teilen.

Beachte: $\frac{4}{3} : 2 = \frac{4^2}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$

Quadratische Gleichung

Zur weiteren Übung:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

d) $x^2 - 7x = 0$

e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$

f) $ax^2 + bx + c = 0$

Lösungen:

a) $x_1 = 5 ; x_2 = -1$ b) $x_1 = 5 ; x_2 = -2$

c) $x_1 = \frac{5}{2} ; x_2 = -1$ d) $x_1 = 0 ; x_2 = 7$

e) $x_1 = 0 ; x_{2,3} = \pm 2$ f) $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pq -Formel

$$\begin{aligned}x^2 + 6x - 7 &= 0 & | +7 \\x^2 + 6x &= 7 & | +9 \\x^2 + 6x + 9 &= 16 \\(x + 3)^2 &= 16 \\x_1 + 3 &= 4; & x_2 + 3 = -4 \\x_1 &= 1; & x_2 = -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + 6x - 7 &= 0 & | +7 \\x^2 + 6x &= 7 & | +\left(\frac{6}{2}\right)^2 \\x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 &= \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7 \\ \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 &= \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7 \\x_{1/2} + \frac{6}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7} \\x_{1/2} &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= 0 \\x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\end{aligned}$$

Vorzeichen umkehren

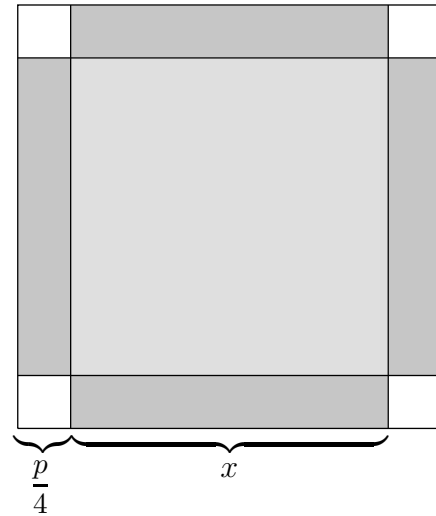
$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

durch 2 teilen und Vorzeichen umkehren

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7}$$

quadrieren (negatives Vorzeichen fällt weg)

Statt $\frac{6}{2}$ solltest du 3 schreiben: $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 + 7}$



Der um 800 n. Chr. in Bagdad lebende Gelehrte al-Khwarizmi fand für die graue Fläche q (1 Quadrat, 4 Rechtecke) die Beziehungen:

$$q = x^2 + px$$

$$x = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Erläutere dies und stelle den Zusammenhang zum Vorigen her.

Quadratische Gleichung Typen

Typ 1

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{Zwischenschritt(e): Gleichung nach } x^2 \text{ umstellen.}$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

Typ 2

$$x(x - 3) = 0 \quad \text{Lösungen sind ohne Rechnung erkennbar.}$$

Die Gleichung könnte auch in der Form $x^2 - 3x = 0$ vorliegen.

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3$$

Typ 3

$$x(x - 2) = 3 \quad \text{Nur hier ist die } pq\text{-Formel erforderlich.}$$

Zwischenschritt: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 3$$

Typ 4

$$(x - 5)^2 = 9 \quad \text{Ratsam ist, die Klammern nicht aufzulösen,}$$

die pq -Formel ist nicht erforderlich.

Zwischenschritt: $x - 5 = \pm 3$

$$x_1 = 8; \quad x_2 = 2$$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$

2. $x^2 + 3x - 28 = 0$

3. $x^2 + 6x = 0$

4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $6x^2 - x = 1$

6. $x^2 - x - 6 = 0$

7. $x^2 + 9x + 20 = 0$

8. $x^2 - 5x = 0$

9. $3x^2 + 2x = 0$

10. $(x - 1)^2 = 16$

11. $(x + 4)^2 = 2$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$

2. $x^2 + 3x - 28 = 0$

3. $x^2 + 6x = 0$

4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $6x^2 - x = 1$

6. $x^2 - x - 6 = 0$

7. $x^2 + 9x + 20 = 0$

8. $x^2 - 5x = 0$

9. $3x^2 + 2x = 0$

10. $(x - 1)^2 = 16$

11. $(x + 4)^2 = 2$

Lösungen

1. 6; 2

2. 4; -7

3. 0; -6

4. -1; $-\frac{1}{3}$

5. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$

6. 3; -2

7. -4; -5

8. 0; 5

9. 0; $-\frac{2}{3}$

10. 5; -3

11. $-4 \pm \sqrt{2}$

Quadratische Gleichung, Probe nach Vieta

Die quadratische Gleichung

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungen und den Zahlen in der Gleichung?

Wir vermuten, dass für

$$x^2 + px + q = 0$$

$$q = x_1 \cdot x_2$$

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{gilt.}$$

Zur Begründung rechnen wir aus und vergleichen:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Überprüfe, ob x_1 und x_2 die Gleichung lösen und korrigiere gegebenenfalls.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $x_1 = 3, x_2 = 5$

b) $x^2 + 4x - 21 = 0$ $x_1 = -3, x_2 = 7$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$ $x_1 = 2, x_2 = 4$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ $x_1 = -2, x_2 = 5$

e) $x^2 - 5x - 6 = 0$ $x_1 = -2, x_2 = -3$

Quadratische Gleichung, Probe nach Vieta

Überprüfe, ob x_1 und x_2 die Gleichung lösen und korrigiere gegebenenfalls.

- a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $x_1 = 3, x_2 = 5$ richtig
- b) $x^2 + 4x - 21 = 0$ $x_1 = -3, x_2 = 7$ falsch, richtig wäre $x_1 = 3, x_2 = -7$
- c) $x^2 + 6x + 8 = 0$ $x_1 = 2, x_2 = 4$ falsch, richtig wäre $x_1 = -2, x_2 = -4$
- d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ $x_1 = -2, x_2 = 5$ richtig
- e) $x^2 - 5x - 6 = 0$ $x_1 = -2, x_2 = -3$ falsch, richtig wäre $x_1 = -1, x_2 = 6$