Quadratische Gleichung

Steht in einer Gleichung auf der einen Seite eine Null, so sehen wir zunächst nach, ob x oder eine Potenz von x (x^2, x^3, ...) ausgeklammert werden kann. Die größtmögliche Potenz von x, die in *jedem* Summanden enthalten ist, klammern wir aus. Es entsteht ein Produkt.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x_1 = 0; &\quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

Wenn ein Produkt Null ergeben soll,
so muss mindestens ein Faktor Null ergeben.

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 &= 0 \\ x^2(2x-5) &= 0 \\ x_1 = 0; &\quad x_2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Die einzelnen Faktoren sind daher zu untersuchen, für welche x sie Null ergeben.

Liegt eine Gleichung in der Form $(x-3)(2x+5) = 0$ vor, so kann die Lösung sofort angegeben werden:

$$x_1 = 3\,; \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x^4 + x^3 &= 0 \\ x^3(-\frac{1}{4}x + 1) &= 0 \\ x_1 = 0; &\quad x_2 = 4 \end{aligned}$$

Etwas schwieriger ist eine Gleichung zu lösen, falls nicht ausgeklammert werden kann, weil ein Summand ohne x vorhanden ist, wie z.B. in

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form $(x+3)^2 = 16$ gebracht werden. Da auf der rechten Seite eine 16 steht, müssen $x+3 = 4$ oder $x+3 = -4$ sein. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -7$.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &= 0 \quad | +7 \\ x^2 + 6x &= 7 \quad | +9 \\ x^2 + 6x + 9 &= 16 \\ (x+3)^2 &= 16 \\ x_1 + 3 = 4; &\quad x_2 + 3 = -4 \\ x_1 = 1; &\quad x_2 = -7 \end{aligned}$$

Schreibt man dieses Verfahren allgemein für

$$x^2 + px + q = 0$$

auf, so ergibt sich eine Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen, die sogenannte *pq-Formel.*

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel: $x^2 - 8x + 12 = 0$ Hier ist $p = -8$ und $q = 12$.
Es gibt eine einfache Merkregel, um die Formel anzuwenden:

- Zahl vor x (hier -8) durch 2 teilen und Vorzeichen umkehren,
- Ergebnis (hier 4) quadrieren und unter die Wurzel schreiben,
- Vorzeichen der Zahl (hier 12) wechseln und unter die Wurzel schreiben.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ x_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 12} \\ x_{1,2} &= 4 \pm 2 \\ x_1 = 6; &\quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Einfache Probe für das Ergebnis $x_1 = 6;\ x_2 = 2$:
Es ist $x_1 \cdot x_2 = 12$ und $x_1 + x_2 = 8$, stets gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ und } x_1 + x_2 = -p$$

Zur weiteren Übung:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ d) $x^2 - 7x = 0$

e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$ f) $ax^2 + bx + c = 0$

Die pq-Formel kann nur auf die Normalform $x^2+px+q = 0$ angewendet werden. Falls die Gleichung z.B. mit $3x^2$ beginnt, so ist die Gleichung durch 3 zu teilen.

Beachte: $\frac{4}{3} : 2 = \frac{\cancel{4}^{2}}{3 \cdot \cancel{2}_{1}} = \frac{2}{3}$

Quadratische Gleichung

Zur weiteren Übung:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

d) $x^2 - 7x = 0$

e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$

f) $ax^2 + bx + c = 0$

Lösungen:

a) $x_1 = 5\ ;\ x_2 = -1$

b) $x_1 = 5\ ;\ x_2 = -2$

c) $x_1 = \frac{5}{2};\ x_2 = -1$

d) $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 7$

e) $x_1 = 0\ ;\ x_{2,3} = \pm 2$

f) $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pq-Formel

$$
\begin{aligned}
x^2+6x-7 &= 0 \qquad \mid +7\\
x^2+6x &= 7 \qquad \mid +9\\
x^2+6x+9 &= 16\\
(x+3)^2 &= 16\\
x_1+3=4\,; &\qquad x_2+3=-4\\
x_1=1\,; &\qquad x_2=-7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+6x-7 &= 0 \qquad \mid +7\\
x^2+6x &= 7 \qquad \mid +\left(\tfrac{6}{2}\right)^2\\
x^2+6x+\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7\\
\left(x+\frac{6}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7\\
x_{1/2}+\frac{6}{2} &= \pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}\\
x_{1/2} &= -\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q &= 0\\
x_{1/2} &= -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned}
$$

Vorzeichen umkehren

$$x^2+6x-7 = 0$$

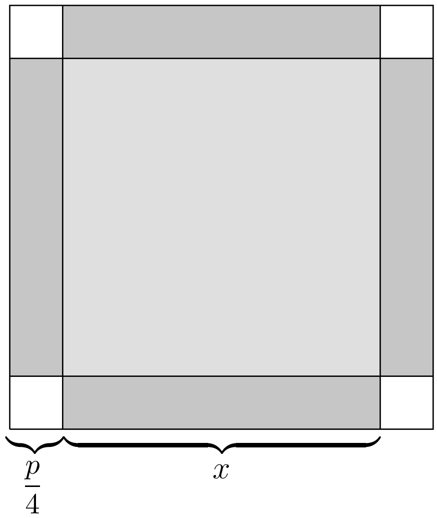
durch 2 teilen und
Vorzeichen umkehren

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}$$

quadrieren (negatives Vorzeichen fällt weg)

Statt $\frac{6}{2}$ solltest du 3 schreiben: $\quad x_{1/2}=-3\pm\sqrt{9+7}$

Quadratische Gleichung   Fortsetzung



Der um 800 n. Chr. in Bagdad lebende Gelehrte al-Khwarizmi
fand für die graue Fläche q (1 Quadrat, 4 Rechtecke) die Beziehungen:

$$q = x^2 + px$$

$$x = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Erläutere dies und stelle den Zusammenhang zum Vorigen her.

Quadratische Gleichung Typen

Typ 1

$x^2 - 3 = 0$ Zwischenschritt(e): Gleichung nach x^2 umstellen.

$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

Typ 2

$x(x-3) = 0$ Lösungen sind ohne Rechnung erkennbar.

Die Gleichung könnte auch in der Form $x^2 - 3x = 0$ vorliegen.

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 3$

Typ 3

$x(x-2) = 3$ Nur hier ist die pq-Formel erforderlich.

Zwischenschritt: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1;\ \ x_2 = 3$

Typ 4

$(x-5)^2 = 9$ Ratsam ist, die Klammern nicht aufzulösen,

die pq-Formel ist nicht erforderlich.

Zwischenschritt: $x - 5 = \pm 3$

$x_1 = 8;\ \ x_2 = 2$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$

2. $x^2 + 3x - 28 = 0$

3. $x^2 + 6x = 0$

4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $6x^2 - x = 1$

6. $x^2 - x - 6 = 0$

7. $x^2 + 9x + 20 = 0$

8. $x^2 - 5x = 0$

9. $3x^2 + 2x = 0$

10. $(x - 1)^2 = 16$

11. $(x + 4)^2 = 2$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$

2. $x^2 + 3x - 28 = 0$

3. $x^2 + 6x = 0$

4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $6x^2 - x = 1$

6. $x^2 - x - 6 = 0$

7. $x^2 + 9x + 20 = 0$

8. $x^2 - 5x = 0$

9. $3x^2 + 2x = 0$

10. $(x - 1)^2 = 16$

11. $(x + 4)^2 = 2$

Lösungen

1. $6;\ 2$
2. $4;\ -7$
3. $0;\ -6$
4. $-1;\ -\frac{1}{3}$
5. $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}$
6. $3;\ -2$
7. $-4;\ -5$
8. $0;\ 5$
9. $0;\ -\frac{2}{3}$
10. $5;\ -3$
11. $-4 \pm \sqrt{2}$

Quadratische Gleichung, Probe nach Vieta

Die quadratische Gleichung

$$x^2 \boxed{-8}\, x \boxed{+12} = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

$$x^2 \boxed{+2}\, x \boxed{-15} = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungen und den Zahlen in der Gleichung?

Wir vermuten, dass für

$$x^2 \boxed{+\,p}\, x \boxed{+\,q} = 0$$

$$\begin{aligned} q &= x_1 \cdot x_2 \\ p &= -(x_1 + x_2) \quad \text{gilt.} \end{aligned}$$

Zur Begründung rechnen wir aus und vergleichen:

$$\begin{aligned} x^2 \boxed{+\,p}\, x \boxed{+\,q} &= 0 \\ (x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\ &\ldots \\ x^2 \boxed{-\,(x_1 + x_2)}\, x \boxed{+\,x_1 \cdot x_2} &= 0 \end{aligned}$$

Überprüfe, ob x_1 und x_2 die Gleichung lösen und korrigiere gegebenenfalls.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0 \qquad x_1 = 3,\ x_2 = 5$

b) $x^2 + 4x - 21 = 0 \qquad x_1 = -3,\ x_2 = 7$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0 \qquad x_1 = 2,\ x_2 = 4$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0 \qquad x_1 = -2,\ x_2 = 5$

e) $x^2 - 5x - 6 = 0 \qquad x_1 = -2,\ x_2 = -3$

Quadratische Gleichung, Probe nach Vieta

Überprüfe, ob x_1 und x_2 die Gleichung lösen und korrigiere gegebenenfalls.

a)	$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x_1 = 3,\ x_2 = 5$	richtig
b)	$x^2 + 4x - 21 = 0$	$x_1 = -3,\ x_2 = 7$	falsch, richtig wäre $x_1 = 3,\ x_2 = -7$
c)	$x^2 + 6x + 8 = 0$	$x_1 = 2,\ x_2 = 4$	falsch, richtig wäre $x_1 = -2,\ x_2 = -4$
d)	$x^2 - 3x - 10 = 0$	$x_1 = -2,\ x_2 = 5$	richtig
e)	$x^2 - 5x - 6 = 0$	$x_1 = -2,\ x_2 = -3$	falsch, richtig wäre $x_1 = -1,\ x_2 = 6$