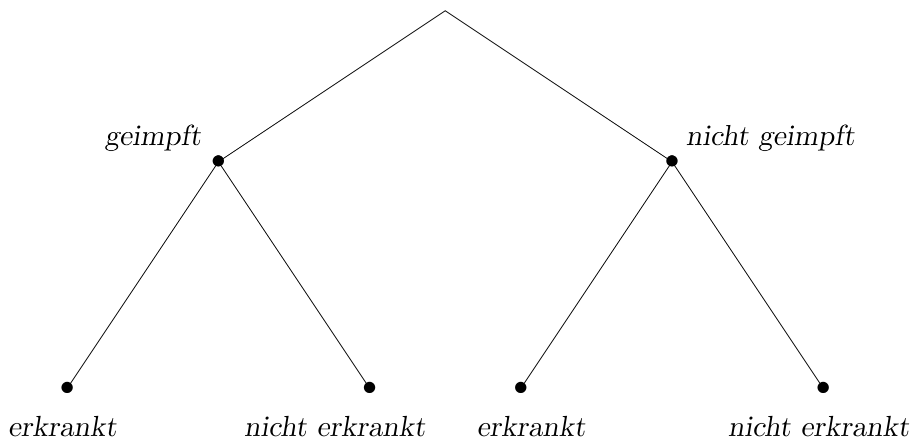
Vier-Felder-Tafel und bedingte Wahrscheinlichkeit

	erkrankt	*nicht erkrankt*	
geimpft	47		125
nicht geimpft		21	
Summe			201

Ergänze die Vier-Felder-Tafel und stelle die Zusammenhänge in einem Pfaddiagramm dar, wobei das Pfaddiagramm die absoluten Häufigkeiten und die Prozentangaben enthalten soll.



Führe die Berechnungen sowohl mit der Vier-Felder-Tafel als auch dem Pfaddiagramm durch.

Eine Person wird zufällig herausgegriffen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass die Person erkrankt,

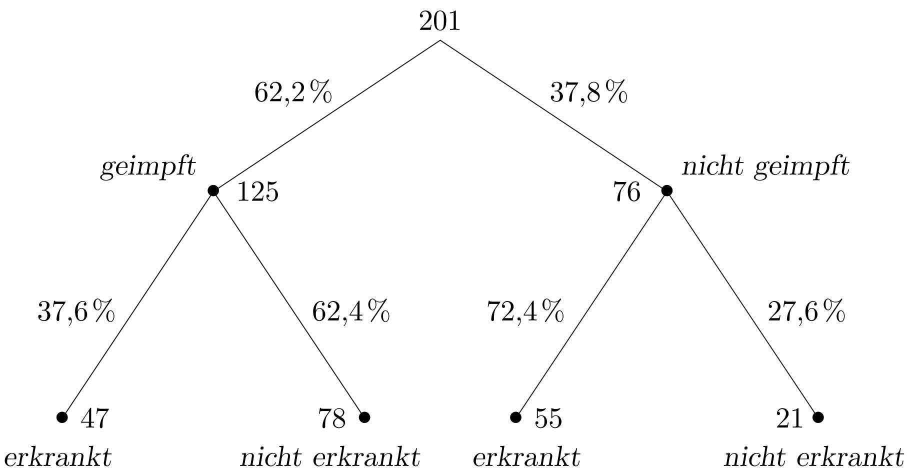
b) $P(\textit{erkrankt} \mid \textit{geimpft})$, dass eine geimpfte Person erkrankt, (bedingte Wahrscheinlichkeit)
An der 2. Stelle steht die Bedingung (Bezugsmenge).
Unter allen Geimpften wird der Anteil der Erkrankten gesucht.

c) $P(\textit{geimpft} \mid \textit{erkrankt})$, dass eine erkrankte Person geimpft ist?
Unter allen Erkrankten wird der Anteil der Geimpften gesucht.

Vier-Felder-Tafel und bedingte Wahrscheinlichkeit

	erkrankt	*nicht erkrankt*	
geimpft	47	78	125
nicht geimpft	55	21	76
Summe	102	99	201

Ergänze die Vier-Felder-Tafel und stelle die Zusammenhänge in einem Pfaddiagramm dar, wobei das Pfaddiagramm die absoluten Häufigkeiten und die Prozentangaben enthalten soll.



Führe die Berechnungen sowohl mit der Vier-Felder-Tafel als auch dem Pfaddiagramm durch.

Eine Person wird zufällig herausgegriffen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass die Person erkrankt, 50,7 %

b) $P(erkrankt \mid geimpft)$, dass eine geimpfte Person erkrankt, (bedingte Wahrscheinlichkeit) 37,6 %

An der 2. Stelle steht die Bedingung (Bezugsmenge).
Unter allen Geimpften wird der Anteil der Erkrankten gesucht.

c) $P(geimpft \mid erkrankt)$, dass eine erkrankte Person geimpft ist?

Unter allen Erkrankten wird der Anteil der Geimpften gesucht.

$$\frac{47}{102} = \frac{47}{47+55} = \frac{37{,}6\,\% \cdot 62{,}2\,\% \cdot \cancel{201}}{37{,}6\,\% \cdot 62{,}2\,\% \cdot \cancel{201} + 72{,}4\,\% \cdot 37{,}8\,\% \cdot \cancel{201}} = 46{,}1\,\%$$

Alarmanlage

1. In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut.
   Bei Einbruch gibt sie mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit Alarm.
   Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet,
   gibt sie mit der Wahrscheinlichkeit 0,005 falschen Alarm (Eine Maus berührt die Anlage oder Ähnliches). Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0,002.

   a) Stelle die Zusammenhänge in einem Pfaddiagramm dar.

   Es bedeuten:

E	Einbruch
$\overline{E}$	kein Einbruch
A	Alarm
$\overline{A}$	kein Alarm

   Berechne die Wahrscheinlichkeiten und fasse die Ereignisse in Worte.

   b) $P(\overline{A})$

   c) $P(\overline{A} \mid E)$

   d) $P(\overline{A} \mid \overline{E})$

   e) $P(E, A)$ Mit (E, A) ist der zugehörige Pfad gemeint.

   f) $P(E \mid A)$

   g) Fülle die Vier-Felder-Tafel aus.

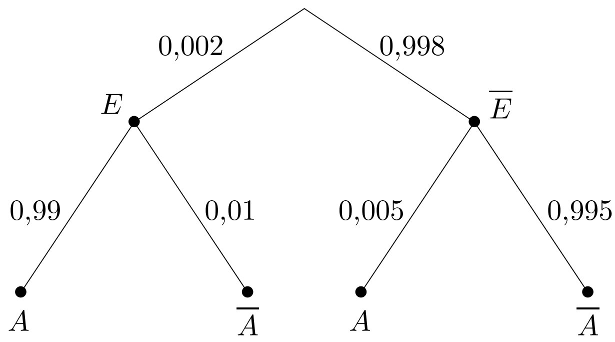
	E	$\overline{E}$	
A			
$\overline{A}$			
			40000

Alarmanlage

1. In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut.
   Bei Einbruch gibt sie mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit Alarm.
   Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet,
   gibt sie mit der Wahrscheinlichkeit 0,005 falschen Alarm (Eine Maus berührt die Anlage oder Ähnliches). Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0,002.

   a) Stelle die Zusammenhänge in einem Pfaddiagramm dar.

   Es bedeuten: E Einbruch
   $\overline{E}$ kein Einbruch
   A Alarm
   $\overline{A}$ kein Alarm



   Berechne die Wahrscheinlichkeiten und fasse die Ereignisse in Worte.

   b) $P(\overline{A}) = 0{,}002 \cdot 0{,}01 + 0{,}998 \cdot 0{,}995 = 0{,}993$

   c) $P(\overline{A} \mid E) = 0{,}01$ Im Falle eines Einbruchs wird kein Alarm ausgelöst.

   d) $P(\overline{A} \mid \overline{E}) = 0{,}995$ Es wird kein Alarm ausgelöst, wenn kein Einbruch vorliegt.

   e) $P(E, A) = 0{,}00198$ Es wird eingebrochen und ein Alarm ausgelöst.

   f) $P(E \mid A) = \dfrac{0{,}002 \cdot 0{,}99}{0{,}002 \cdot 0{,}99 + 0{,}998 \cdot 0{,}005} = 0{,}284$ Es liegt ein Einbruch vor, wenn Alarm ausgelöst wurde.

   g) Fülle die Vier-Felder-Tafel aus.

	E	$\overline{E}$	
A	79	200	279
$\overline{A}$	1	39720	39721
	80	39920	40000

Urnenexperiment

2. Eine der Urnen U_1, U_2 wird zufällig ausgewählt, jedoch U_2 im Schnitt doppelt so häufig wie U_1. Aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen?
   Angenommen, eine gezogene Kugel ist schwarz.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus U_1?

Urnenexperiment

2. Eine der Urnen U_1, U_2 wird zufällig ausgewählt, jedoch U_2 im Schnitt doppelt so häufig wie U_1. Aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen? $\frac{3}{10}$
   Angenommen, eine gezogene Kugel ist schwarz.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus U_1? $\frac{4}{9}$

3. Neun von zehn Ungeborenen bevorzugen im Mutterleib den rechten Daumen zum Lutschen. Forscher fanden heraus, dass alle Kinder, die rechts genuckelt hatten, im Alter von 10 bis 12 Jahren Rechtshänder waren. Zwei Drittel der Kinder, die im Mutterleib am linken Daumen lutschten, waren Linkshänder.
   a) Wie viel Prozent der Kinder sind Linkshänder geworden, wie viel Prozent Rechtshänder?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Rechtshänder vor der Geburt am linken Daumen genuckelt?

4. An der Garderobe werden an 3 Gäste im Dunkeln 3 Mäntel zurückgegeben.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) kein Gast den eigenen Mantel erhält
   b) alle Gäste den eigenen Mantel erhalten.

5. X. trainiert für den 100-m-Lauf. Dabei erreicht er folgende Zeiten:

1. Lauf	2. Lauf	3. Lauf	4. Lauf
15,2 s	14,8 s	15,1 s	?

   Nach dem 4. Lauf möchte er insgesamt einen Mittelwert von 15 Sekunden auf 100 m erreicht haben. Welche Zeit muss er demnach beim 4. Lauf erzielen?

6. In Deutschland sind etwa 8 % der Männer farbenblind, sie können rot und grün nicht unterscheiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 zufällig ausgewählten Männern mindestens einer farbenblind ist?

7. Wie viele Möglichkeiten existieren für die Gestaltung einer Wandtafel mit 3 Bildern, die aus 32 Schaubildern auszuwählen sind?

8. Von einem Medikament weiß man, dass es in 90 % aller Fälle zu einer Heilung führt.
   Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) genau einer von drei mit diesem Mittel behandelten Patienten geheilt wird
   b) alle drei behandelten Patienten geheilt werden
   c) mindestens einer von drei behandelten Patienten geheilt wird.

3. Neun von zehn Ungeborenen bevorzugen im Mutterleib den rechten Daumen zum Lutschen. Forscher fanden heraus, dass alle Kinder, die rechts genuckelt hatten, im Alter von 10 bis 12 Jahren Rechtshänder waren. Zwei Drittel der Kinder, die im Mutterleib am linken Daumen lutschten, waren Linkshänder.
   a) Wie viel Prozent der Kinder sind Linkshänder geworden, wie viel Prozent Rechtshänder?
   Linkshänder 6,7 %, Rechtshänder 93,3 %
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Rechtshänder vor der Geburt am linken Daumen genuckelt? bedingte Wahrscheinlichkeit 3,6 %

4. An der Garderobe werden an 3 Gäste im Dunkeln 3 Mäntel zurückgegeben.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) kein Gast den eigenen Mantel erhält $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
   b) alle Gäste den eigenen Mantel erhalten. $\frac{1}{6}$

5. X. trainiert für den 100-m-Lauf. Dabei erreicht er folgende Zeiten:

1. Lauf	2. Lauf	3. Lauf	4. Lauf
15,2 s	14,8 s	15,1 s	?

   Nach dem 4. Lauf möchte er insgesamt einen Mittelwert von 15 Sekunden auf 100 m erreicht haben. Welche Zeit muss er demnach beim 4. Lauf erzielen? 14,9 s

6. In Deutschland sind etwa 8 % der Männer farbenblind, sie können rot und grün nicht unterscheiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 zufällig ausgewählten Männern mindestens einer farbenblind ist? $P = 1 - 0{,}92^{12} = 63{,}2\,\%$

7. Wie viele Möglichkeiten existieren für die Gestaltung einer Wandtafel mit 3 Bildern, die aus 32 Schaubildern auszuwählen sind? $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$

8. Von einem Medikament weiß man, dass es in 90 % aller Fälle zu einer Heilung führt.
   Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) genau einer von drei mit diesem Mittel behandelten Patienten geheilt wird
   $3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 2{,}7\,\%$
   b) alle drei behandelten Patienten geheilt werden $0{,}9^3 = 72{,}9\,\%$
   c) mindestens einer von drei behandelten Patienten geheilt wird. $1 - 0{,}1^3 = 99{,}9\,\%$

9. Es stehen zwei Urnen auf einem Tisch. In der ersten Urne sind 8 rote und 12 schwarze Kugeln. In der zweiten Urne sind 15 rote und 5 schwarze Kugeln. Es wird zuerst eine Urne zufällig ausgewählt und dann eine Kugel aus dieser gezogen.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist?
   b) Es wurde eine rote Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese aus Urne 1 stammt?

10. Zwei Torschützen schießen jeweils einmal auf ein Tor.
    Der Eine trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % und der Andere mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
    a) beide treffen?
    b) nur genau einer der beiden trifft?
    c) beide nicht treffen?

11. Bei einer Fahrkartenkontrolle befinden sich 100 Personen in einem Zug, wobei 5 keine Fahrkarte haben. 3 zufällig ausgewählte Personen werden kontrolliert.
    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Kontrolle
    a) keine Person ohne Fahrkarte dabei ist?
    b) mindestens eine Person keine Fahrkarte hat?
    c) genau drei Personen ohne Fahrkarte dabei sind?

12. Bei einem Glückspiel werden 2 Würfel geworfen.
    Beträgt die Augensumme 3, wird als Preis a € ausgezahlt, bei der Augensumme 2 sind es 2 €.
    Der faire Einsatz für das Spiel beträgt 0,25 €. Ermittle a.
    Fairer Einsatz bedeutet, dass der erwartete Gewinn gleich dem Einsatz ist.

Elementares

9. Es stehen zwei Urnen auf einem Tisch. In der ersten Urne sind 8 rote und 12 schwarze Kugeln. In der zweiten Urne sind 15 rote und 5 schwarze Kugeln. Es wird zuerst eine Urne zufällig ausgewählt und dann eine Kugel aus dieser gezogen.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist? 57,5 %

   b) Es wurde eine rote Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese aus Urne 1 stammt? $P(\text{r} \mid \text{Urne 1}) = 34{,}8\,\%$

10. Zwei Torschützen schießen jeweils einmal auf ein Tor.
    Der Eine trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % und der Andere mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

    a) beide treffen? $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 20\,\%$

    b) nur genau einer der beiden trifft? $0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 50\,\%$

    c) beide nicht treffen? $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 30\,\%$

11. Bei einer Fahrkartenkontrolle befinden sich 100 Personen in einem Zug, wobei 5 keine Fahrkarte haben. 3 zufällig ausgewählte Personen werden kontrolliert.
    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Kontrolle

    a) keine Person ohne Fahrkarte dabei ist? $P = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} = 85{,}6\,\%$

    b) mindestens eine Person keine Fahrkarte hat? $1 - P = 14{,}4\,\%$

    c) genau drei Personen ohne Fahrkarte dabei sind? $\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} = 0{,}0065\,\%$

12. Bei einem Glückspiel werden 2 Würfel geworfen.
    Beträgt die Augensumme 3, wird als Preis a € ausgezahlt, bei der Augensumme 2 sind es 2 €.
    Der faire Einsatz für das Spiel beträgt 0,25 €. Ermittle a.
    Fairer Einsatz bedeutet, dass der erwartete Gewinn gleich dem Einsatz ist.

$$\frac{2}{36}a + \frac{1}{36} \cdot 2 = 0{,}25 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3{,}50 \ (€)$$

50 % der Studierenden, die sich zu einer Klausur anmelden, sind Wiederholer.
Kurz vor der Prüfung treten 28 % der Wiederholer und 12 % der anderen Prüflinge von der Klausur zurück.
Unter den Prüflingen, die an der Prüfung teilgenommen haben, wird einer zufällig ausgewählt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Wiederholer ist.

50 % der Studierenden, die sich zu einer Klausur anmelden, sind Wiederholer.
Kurz vor der Prüfung treten 28 % der Wiederholer und 12 % der anderen Prüflinge von der Klausur zurück.
Unter den Prüflingen, die an der Prüfung teilgenommen haben, wird einer zufällig ausgewählt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Wiederholer ist. $P(W\,|\,P) = 45\,\%$