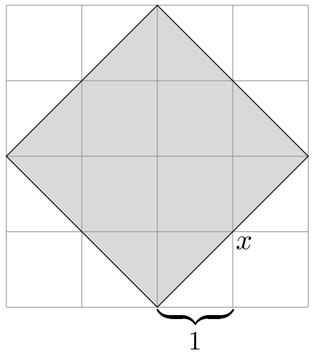
Rechnen mit Wurzeln

Wie lang ist die Quadratseite?



1. a) $\sqrt{49} = 7, \quad$ weil $7 \cdot 7 = 49$

   b) $\left(\sqrt{49}\,\right)^2 = 49 \quad$ *allgemein:* $\left(\sqrt{a}\,\right)^2 = a, \quad (a > 0)$

   c) $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{100a^2} = 10a, \quad (a > 0)$

   e) $\left(\sqrt{2}\,\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$

   f) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

   g) *allgemein:* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

   h) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \quad$ *(teilweises Wurzelziehen)*

   i) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

   j) *allgemein:* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   k) *es gilt jedoch* *<u>nicht</u>* $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   l) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \sqrt{2} \quad$ *(Rationalmachen des Nenners)*

   m) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

   a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$

4. Löse die Klammern auf:

   a) $\left(\sqrt{2} + 3\,\right)^2$ b) $\left(4 - 3\sqrt{5}\,\right)^2$ c) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\,\right)^2$

5. Löse die Gleichungen nach x auf:

   a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$ b) $(x + 5)(x - 4) = x + 16$

   c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$ d) $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$

   e) $x^2 - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 13$ f) $\dfrac{x^2 + 5}{3} - \dfrac{x^2 - 1}{5} = 4$

   g) $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = a$ h) $x\sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

Rechnen mit Wurzeln

1. a) $\sqrt{49} = 7, \quad$ weil $7 \cdot 7 = 49$

   b) $\left(\sqrt{49}\,\right)^2 = 49 \qquad$ *allgemein:* $(\sqrt{a}\,)^2 = a, \quad (a > 0)$

   c) $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{100a^2} = 10a, \quad (a > 0)$

   e) $\left(\sqrt{2}\,\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$

   f) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

   g) *allgemein:* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

   h) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \qquad$ *(teilweises Wurzelziehen)*

   i) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

   j) *allgemein:* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   k) *es gilt jedoch <u>nicht</u>* $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   l) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \sqrt{2} \qquad$ *(Rationalmachen des Nenners)*

   m) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

   a) $\sqrt{40} \qquad$ b) $\sqrt{50} \qquad$ c) $\sqrt{45} \qquad$ d) $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}} \qquad$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} \qquad$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$

4. Löse die Klammern auf:

   a) $\left(\sqrt{2} + 3\,\right)^2 \qquad$ b) $\left(4 - 3\sqrt{5}\,\right)^2 \qquad$ c) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\,\right)^2$

5. Löse die Gleichungen nach x auf:

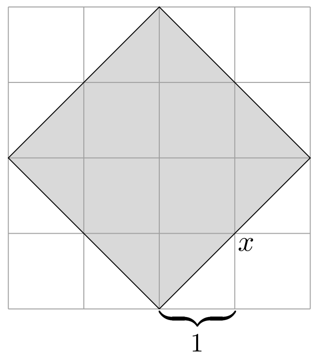
   a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3 \qquad$ b) $(x + 5)(x - 4) = x + 16$

   c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34 \qquad$ d) $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$

   e) $x^2 - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 13 \qquad$ f) $\dfrac{x^2 + 5}{3} - \dfrac{x^2 - 1}{5} = 4$

   g) $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = a \qquad$ h) $x\sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

Wie lang ist die Quadratseite?



Aus der Zeichnung ist der Flächeninhalt des Quadrats sofort zu erkennen, er beträgt 8 Flächeneinheiten.
Daher muss für x gelten:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 \\ x &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

2. a) $\sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$
   b) $5\sqrt{2}$
   c) $3\sqrt{5}$
   d) $4\sqrt{3}$

3. a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
   b) $\sqrt{5}$
   c) $-\sqrt{3} - 2$
   d) $\sqrt{5} - 1$

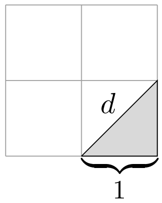
4. a) $11 + 6\sqrt{2}$
   b) $61 - 24\sqrt{5}$
   c) $30 + 12\sqrt{6}$

5. a) $\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$
   b) $6\,;\, -6$
   c) $1\,;\, -1$
   d) $2\,;\, -2$
   e) $5\,;\, -5$
   f) $4\,;\, -4$
   g) $\dfrac{1}{(2 - a)^2}$
   h) $\begin{aligned} x\sqrt{x} &= \frac{4}{3} \qquad |\ (\ )^2 \\ x^3 &= \frac{16}{9} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{16}{9}} \end{aligned}$

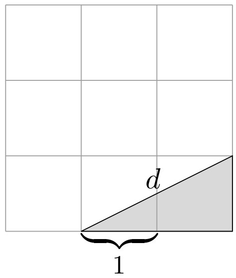
Rechnen mit Wurzeln Anwendung

Wie lang ist d?

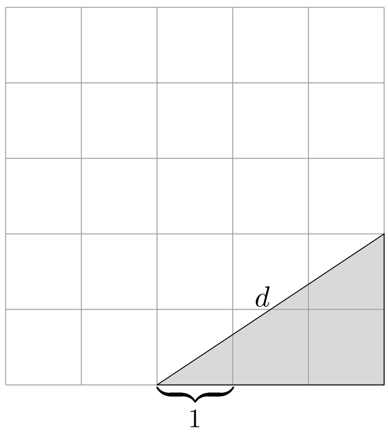
a)



b)

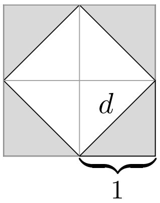


c)



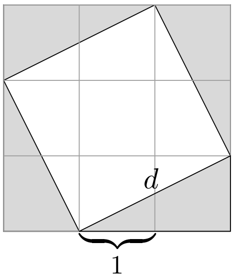
Wie lang ist d?

a)



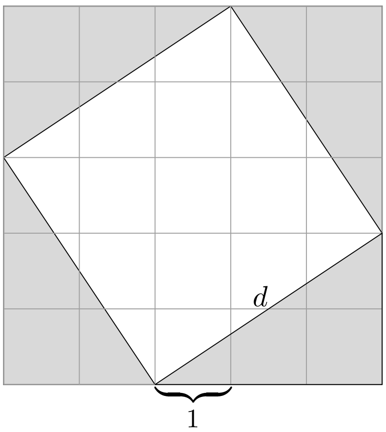
$d^2 = 2$ d.h. $d = \sqrt{2}$

b)



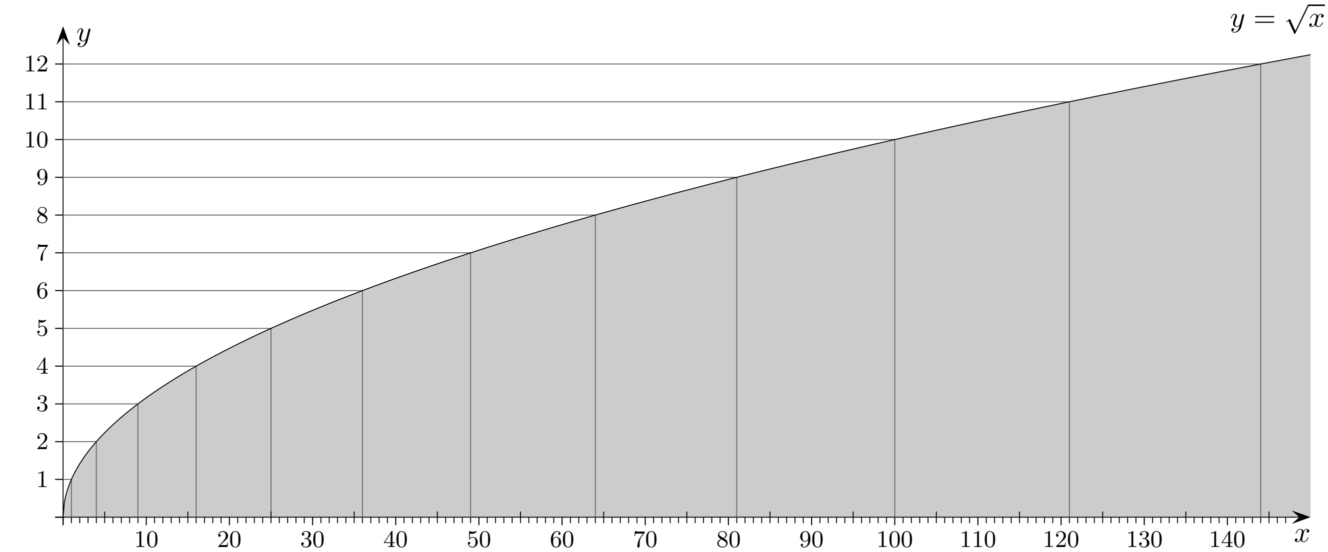
$d^2 = 9 - 2 \cdot 2 = 5$ d.h. $d = \sqrt{5}$

c)

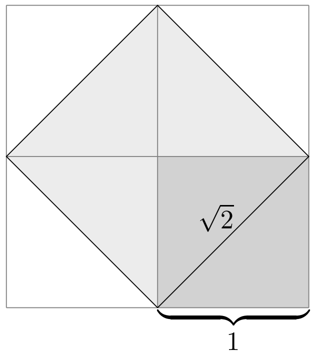


$d^2 = 25 - 2 \cdot 6 = 13$ d.h. $d = \sqrt{13}$

Wurzelfunktion



Irrationale Zahlen, d.h. keine rationalen



$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095049\ldots$ löst $x^2 = 2$.

$$1{,}414213562373095049 \cdot 1{,}414213562373095049 = 2{,}000000000000000000056090899158831240\,1$$

Dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ usw. jeweils mit keinem Bruch $\frac{p}{q}$ übereinstimmen, verwundert nicht.

Wäre $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, so würde $2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ folgen.
Wenn $\frac{p}{q}$ nicht weiter kürzbar ist, und dafür können wir sorgen, so kann $\frac{pp}{qq}$ auch nicht kürzbar sein, soll aber 2 ergeben. Das ist nur möglich, wenn $pp = 2qq$ ist. Dann wäre jedoch $\frac{pp}{qq}$ kürzbar.
(2 ist Faktor von pp, also auch von p. Somit ist 4 Faktor von pp, folglich ist 2 Faktor von q.)
Wir verwickeln uns in einen Widerspruch, der nur aufgelöst werden kann,
wenn die Ausgangslage $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ als falsch erkannt wird.

2. Möglichkeit
Wäre $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, so würde $2 = \frac{p^2}{q^2}$, bzw. $2q^2 = p^2$ folgen.
$\frac{p}{q}$ ist nicht (weiter) kürzbar, dafür haben wir gesorgt.
Wir überlegen uns, dass die letzten Ziffern rechts und links von $2q^2 = p^2$ nicht gleich sein können, indem wir alle Möglichkeiten aufschreiben. Beachte, p und q können nicht auf null oder 5 enden.

Weiteres
Aus $2 = 10^{\frac{p}{q}}$ würde $2^q = 10^p$, bzw. $2^q = 2^p \cdot 5^p$ folgen. Warum kann das nicht sein?

Die irrationalen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Für theoretische Überlegungen (Länge einer Diagonalen) sind sie unverzichtbar. Für praktische Zwecke reichen Näherungen, die sind aus $\mathbb{Q}$. Eine Entscheidung x rational oder irrational wird im weiteren Unterricht nicht benötigt. Vermutlich ist z.B. $\pi^{\sqrt{2}}$ irrational. Bewiesen ist das nicht.

Siehe auch (Unterrichtende):

rekursive Folgen

Kettenbrüche