Material zur Weiterarbeit
zur
Vergleichsarbeit im Fach Mathematik im Schuljahrgang 8

Adressaten des Materials
Standardorientierte Tests, wie der, zu dem das vorliegende Material erarbeitet wurde, zielen zwar auch auf die Leistungserhebung für eine Klasse, sie dienen vor allem aber dazu, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu identifizieren. Daher richtet sich das vorliegende Material mit dieser Zielstellung an die einzelne Lehrkraft, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie im Weiteren an Fachkonferenzen oder andere innerschulische Gruppen.

Aufbau des Materials
Im vorliegenden Material ist jede Aufgabe des Testhefts kommentiert. Umfang und Tiefe der Kommentierung richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zusätzlich am rechten Rand ersichtlich.
Eine Kommentierung zu einer Aufgabe schließt folgende Teile ein:

- Ausweisen der Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik[1],
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler,
- Anregungen für den Unterricht.

An verschiedenen Stellen werden Bezüge zur Veröffentlichung des IQB[2] „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ hergestellt, da hier für Sekundarbereich I u. a. eine große Zahl von Aufgaben mit ausgewiesenem Standardbezug und Unterrichtsanregungen gegeben werden.

Bezug des Materials zu den Nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik
Das Testheft, auf das sich die Aufgabenkommentierungen beziehen, ist erstmals im Verbund mehrerer Länder entwickelt worden. Deshalb musste die Erprobung der Aufgaben durch die Pilotierung in allen beteiligten Länden auch der Feststellung dienen, welches Aufgabenniveau für den gemeinsamen Test bei der Auswahl der Aufgaben möglich ist. Diese Erkenntnisse haben die Zusammenstellung des Testheftes wesentlich beeinflusst, so dass es insbesondere auch bei der durch die kurze Entwicklungszeit beschränkten Aufgabenmenge nicht gelingen konnte, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben für das Testheft nur die „hinführende“ Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf mathematisch interessantere verzichtet werden. Die Kommentierungen im vorliegenden Material haben nun ermöglicht, diese Teilaufgaben aufzugreifen und weitere Variationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung des Materials
Für einen Mathematikunterricht, der zur Förderung und Weiterentwicklung mathematischer Kompetenzen beitragen soll und in dessen Zentrum auch über längere Zeiträume hinweg der Aufbau dieser Kompetenzen steht, muss die Lehrkraft u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential für dieses Ziel in jeder einzelnen Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann.
Im vorliegenden Material wird daher für jede Aufgabe die Zuordnung der Standardmerkmale (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen kann deutlich gemacht werden, dass

[1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. In: www.kmk.org/schul/home/htm.
[2] Werner Blum/Christina Drüke-Noe/Ralph Hartung/Olaf Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006

die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zur mathematischen Kompetenz bestimmt. Dabei wird die Aufmerksamkeit der Lehrkraft auf diejenigen Überlegungen gelenkt, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können. Betrachtet werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Testaufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und zu erwartende häufige Fehler sowie Möglichkeiten zur Diagnose. Dies soll die Lehrkraft auch in ihrer Individualdiagnose unterstützen und helfen, Ansätze zur individuellen Förderung aufzudecken.
Darauf aufbauend wird für jede Aufgabe vorgeschlagen, wie diese verändert oder variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Solche Anregungen beinhalten die Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, den Umgang mit verschiedenen Lösungen, eine Diskussion zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts, den Einsatz von Aufgabenvariationen u. a. m. Dabei wird auch deutlich, wie sich Testaufgaben und Unterrichtsaufgaben bzw. Aufgaben für Lernstandserhebungen in der eigenen Klasse unterscheiden können.

Hinweise der Nutzer und für die Nutzer
Hinweise zur Weiterentwicklung des Materials, zur gewählten Präsentationsform sowie zu wichtigen Ergänzungen können an das Niedersächsische Kultusministerium gerichtet werden. Weitere Informationen finden Sie unter http://cuvo.nibis.de .

Kommentierungen

Aufgabe 1a

Kreuze jeweils an, ob die angegebene Zahl x Lösung der Gleichung ist oder nicht.

Gleichung	Lösung	ja	nein
$6x - 3 + 15 = 8$	$x = 4$		

Lösung (gemäß Kodierung)

nein

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich aus dem Bezug zum Lösen von Gleichungen (L4). Das Verwenden von Routineverfahren im Umgang mit linearen Gleichungen impliziert den Anforderungsbereich I in der allgemeinen mathematischen Kompetenz K5.
Zur Lösung der Aufgabe wäre eigentlich ein sicherer Umgang mit den Grundrechenarten ausreichend, denn durch das Einsetzen des Lösungswertes für x können Schülerinnen und Schüler überprüfen, ob sich eine wahre Aussage ergibt und damit die angegebene Lösung richtig (ja) oder falsch (nein) ist.
Möglich ist allerdings auch, dass Schülerinnen und Schüler die Gleichung selbst lösen. Bei einem solchen Vorgehen entstehen ganz andere Anforderungen und auch andere **Fehlerquellen** als beim Ausführen der Probe. Da das Aufgabenformat keine **Diagnose** bezüglich des gewählten Vorgehens erlaubt, sollte hier im Unterricht eine entsprechende Aufarbeitung erfolgen.
Das Aufgabenformat verführt insbesondere auch zu einer Überschätzung der Schülerleistungen, da die Ratewahrscheinlichkeit nicht zu vernachlässigen ist und häufige Schülerfehler auch zur richtigen Antwort "nein" führen.
So könnte von Schülerinnen und Schülern $6 \cdot 4 - 3 + 15 = 8$ wie folgt aufgelöst werden: $6 \cdot 1 + 15 = 8$.

Anregungen für den Unterricht

Eine Analyse im Unterricht sollte zunächst einen ausführlichen Rechenweg einfordern. Je nach festgestellten Defiziten können Vorteile des Einsetzverfahrens (Probe) im Vergleich zum Lösen der Gleichung sowie typische Rechenfehler besprochen werden. Das Aufschreiben des Rechenwegs, das gerade **leistungsschwache Schülerinnen und Schülern** gerne vermeiden, erweist sich gerade für sie als hilfreich.
Bei festgestellten Defiziten im Bereich der Rechenfertigkeiten oder beim Auflösen von Gleichungen bietet es sich an, die Anforderungen schrittweise zu steigern. Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** vgl. Ausführungen zur Teilaufgabe b.

Aufgabe 1b

Kreuze jeweils an, ob die angegebene Zahl x Lösung der Gleichung ist oder nicht.

Gleichung	Lösung	ja	nein
–2(6x + 24) = 8(1 + x) + 44	x = 1		

Lösung (gemäß Kodierung)

nein

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich wiederum aus dem Bezug zu Gleichungen. Das Verwenden von Routineverfahren im Umgang mit linearen Gleichungen impliziert wie in der Teilaufgabe a die allgemeine mathematische Kompetenz K5. Aufgrund der komplexeren Gleichung kann diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** bieten sich weitere Aufgaben an, z.B. $-2(6x+24)=8(1+x)+44x$ bzw. $44=(1+x)8-2(6x+24)$ oder $\frac{8}{2(x+6)}=\frac{1}{2}$. Hierzu kann die Lehrkraft entscheiden lassen, ob eine vorgegebene Zahl Lösung der betreffenden Gleichung ist oder nicht und eine Begründung dazu fordern.

Aufgabe 1b

Aufgabe 2a

Welche ganze Zahl musst du zu – 4 addieren, um 2 zu erhalten?

Lösung (gemäß Kodierung)

6

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe sind elementare Kenntnisse im Umgang mit ganzen Zahlen direkt anzuwenden (L1, K5, ABI).
Das gewählte Zahlenmaterial erlaubt eine Lösung „im Kopf“, ggf. auch ein systematisches Probieren; ein formalerer Ansatz führt zu einer elementaren linearen Gleichung.

Anregungen für den Unterricht

vgl. Ausführungen zur Teilaufgabe b

Aufgabe 2a

Aufgabe 2a

Aufgabe 2b

Welche ganze Zahl musst du von – 4 subtrahieren, um 2 zu erhalten?

Lösung (gemäß Kodierung)

- 6

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe sind elementare Kenntnisse im Umgang mit ganzen Zahlen direkt anzuwenden (L1, K5, ABI).
Das gewählte Zahlenmaterial erlaubt eine Lösung „im Kopf“, ggf. auch durch systematisches Probieren; ein formalerer Ansatz führt zu einer elementaren linearen Gleichung.
Die Aufgabe entspricht in ihrer Struktur und Klassifizierung Teilaufgabe a; gleichwohl fällt sie den Schülerinnen und Schülern deutlich schwerer.
Das Subtrahieren einer negativen Zahl bleibt für **leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler** oft unnatürlich und unanschaulich. Zu erwartende **Falschantworten** sind (trotz oder gerade wegen der vorgeschalteten Teilaufgabe a) das Ergebnis „6“ oder die Antwort „geht nicht“.

Anregungen für den Unterricht

Bringt die Fehleranalyse die Erkenntnis, dass Schülerinnen und Schüler in der Tat Probleme hinsichtlich der Vorstellung „Subtraktion einer negativen Zahl“ haben, ist eine Art „Überzeugungsarbeit“ zu leisten. Kurze formale Argumentationen bringen bei tief verwurzelten Fehlvorstellungen kaum langfristigen Lernerfolg. Zudem laufen Merkhilfen wie „Minus minus gibt plus“ bei der vorliegenden Aufgabe ins Leere, wenn die Situation gar nicht erst mit der Merkhilfe in Verbindung gebracht wird.

Ein erster Schritt kann es sein, auf die Bedeutung einer „Probe“ hinzuweisen, und diese (sowohl mit dem richtigen Ergebnis als auch mit falschen Ergebnissen) durchzuführen:

$– 4 – 6 = –10$, aber $– 4 – (–6) = – 4 + 6 = 2$

Der jetzt wirklich sichtbar gewordene Schritt –(–6) kann dann durch die gängigen Anwendungsbeispiele (Schulden u. Ä.) und durch Arbeiten an der Zahlengerade veranschaulicht werden.

Aufgabe 2b

Das explizite Aufstellen einer Gleichung sollte gerade bei **leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern** eingefordert werden: Der Ansatz ist elementar, kann vor leichtsinnigen Lösungsvermutungen bewahren und führt auf die Probe als Lösungskontrolle hin.

Die gewonnenen Erkenntnisse können im laufenden Unterricht durch gelegentlich eingestreute kleine Aufgaben ähnlicher Art wach gehalten werden. Dabei bietet es sich an, zur Abgrenzung auch andere Fehlvorstellungen in grundlegenden Rechenarten mit aufzugreifen:
- Aufgabe 3 aus diesem Test
- Multiplikation mit bzw. Division durch einen echten Bruch
- „Die Wurzel aus einer Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst.“ u. Ä.

Aufgabe 3

Führe für die folgenden Aufgaben jeweils einen Überschlag aus und kreuze dann das richtige Ergebnis an.

a) $6{,}25 \cdot 397{,}8 \cdot 0{,}48$

- ☐ A 11934
- ☐ B 1193,4
- ☐ C 119,34
- ☐ D 11,934

b) 3 644,16 **:** 58,4

- ☐ A 6240
- ☐ B 624
- ☐ C 62,4
- ☐ D 6,24

Lösung (gemäß Kodierung)

a) B (1193,4)

b) C (62,4)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Ausführen des Überschlags müssen die Schülerinnen und Schüler Dezimalbrüche sinnvoll runden und Grundrechenoperationen ausführen (L1, K5). Dies sind Routinearbeiten, die aus dem Unterricht vertraut sein sollten (AB I).

Die Verwendung des Taschenrechners ist für die Ausführung eines Überschlags nicht sinnvoll, kann aber bei der gegebenen Aufgabenstellung nicht verhindert werden. Durch den Einsatz des Taschenrechners unterbleibt häufig eine Überprüfung des Ergebnisses auf Plausibilität. Gerade der Überschlag ist daher ein wichtiges Kontrollverfahren. Im Unterricht sollte durch geeignete Aufgaben die Einstellung dazu gestärkt werden. So sind Aufgaben denkbar, in denen mit Hilfe des Überschlags die Kommasetzung im Ergebnis überprüft werden soll. **Defizite** werden deutlich, wenn Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen erläutern und den Rechenweg beschreiben.

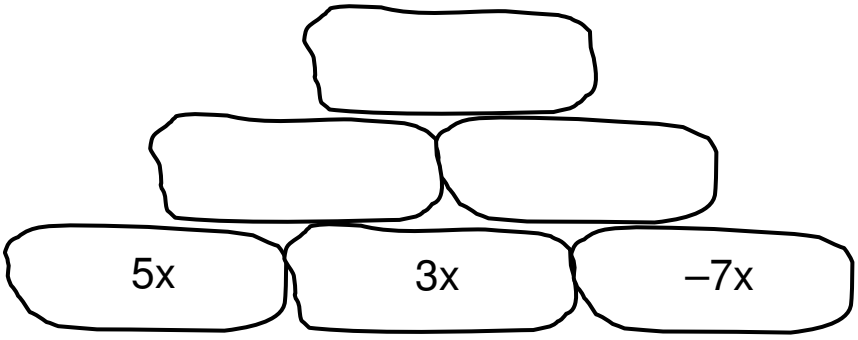
Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht ist regelmäßig auf das Bestimmen des Überschlags Wert zu legen. Dabei kann auch exemplarisch die Differenz zwischen Überschlag und dem exakt ermittelten Ergebnis bestimmt und für verschiedene Überschläge verglichen und diskutiert werden, um die Funktion und die Qualität des Überschlagens deutlich zu machen.
Bei vielen Berechnungen im täglichen Leben reicht ein Überschlag völlig aus. Auch dieser Gesichtspunkt sollte im Unterricht eine Beachtung finden und Kriterien dafür überdacht werden.

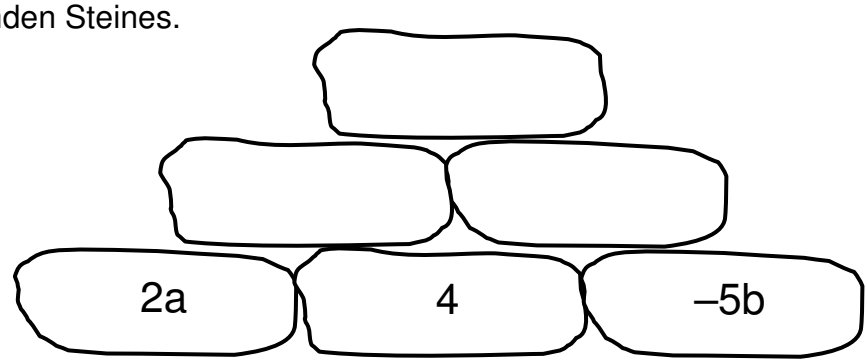
Es ist aber auch möglich, über die routinierte Bearbeitung hinausgehend, Aufgabenstellungen im Bereich des Überschlags zu stellen, die zur Reflexion des Lösungsweges anregen (siehe „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 94). Statt nur Aufgabenpakete zu berechen, kann danach gefragt werden, welches Ergebnis am nächsten bei einer bestimmten Zahl liegt. Schülerinnen und Schüler sollten durch die Aufforderung zum Begründen angeregt werden, ihre Rechenstrategien zu erläutern und zu vergleichen (K6, AB II).

Aufgabe 4

a) Vervollständige die Termmauer.
Die Summe zweier benachbarter Steine ergibt den Term des darüber liegenden Steines.



b) Vervollständige die Termmauer.
Das Produkt zweier benachbarter Steine ergibt den Term des darüber liegenden Steines.



Lösung (gemäß Kodierung)

a) oben: 4x, Mitte links: 8x, Mitte rechts: - 4x

b) oben: - 160ab, Mitte links: 8a, Mitte rechts: - 20b

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Aufgabe 4

Aufgabe 4

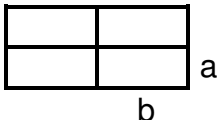
Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Es handelt sich hier um Routineaufgaben zum Rechnen mit Termen (K5, AB I). Vorkenntnisse zum Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von rationalen Zahlen sind zur Lösung notwendig (L1).
Zum einen sind die häufigen **Fehler** beim Zusammenfassen von Termen mit Variablen zu erwarten, zum anderen ist es möglich, dass die Schülerin oder der Schüler die Aufgabenstellung an sich nicht richtig erfasst, da sie oder er die Arbeitsanweisung nicht in einen Term umsetzen kann.

Anregungen für den Unterricht

Das Vereinfachen von Termen kann als Routineaufgabe mit festen Regeln bearbeitet werden.
Rechenbäume, welche in eine algebraische Form gebracht werden (und umgekehrt), erleichtern es den Schülerinnen und Schülern, die Rechenoperationen nachvollziehen zu können.

Ein vertieftes Verständnis kann durch Visualisierungen anhand von Flächen oder Quadern (K4) erreicht werden. Hier bieten sich auch Erweiterungen in die Anforderungsbereiche II und III an, indem die Schülerinnen und Schüler Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen, eigene Darstellungen entwickeln oder nicht vertraute Darstellungen lesen und ihre Aussagekraft beurteilen.
Beispiel:
- Übersetzte das Bild in die Sprache der Algebra: (AB II)



- Entwickle eine Darstellung zur Termumformung $(4ab + 2ab) \cdot 3$. (AB III)

Aufgabe 5

Nach den Regeln des Internationalen Tischtennisverbandes ITTF muss ein Tischtennisball einen Durchmesser von exakt 40 mm haben.
Bei einem Hersteller von Tischtennisbällen befinden sich bei der Endkontrolle 5000 Bälle in einer Box. Es werden zufällig 100 Bälle ausgewählt und deren Durchmesser wird geprüft.
Bei dieser Auswahl waren 5 Bälle außerhalb der Norm.
Wie viele Bälle, die nicht der Norm entsprechen, sind voraussichtlich in der ganzen Box enthalten?

☐ A 20 ☐ B 50 ☐ C 250 ☐ D 500 ☐ E 1000

Lösung (gemäß Kodierung)

C (250)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler müssen zunächst den umfangreichen Text der Aufgabe, der mit der Angabe des Durchmessers auch eine zum Lösen nicht benötigte Zahlenangabe enthält, verstehend lesen (K6). Dabei sollte ihnen bewusst werden, dass ein Vorgang beschrieben wird (Bestimmen der Anzahl der nicht normgerechten Bälle in einer Stichprobe), dessen Ausgang zufällig ist, aber dennoch für die Vorhersage benötigt wird (L5). Auch wenn Schülerinnen und Schüler als Ergebnis ihres Modellierens (K3) eine Dreisatzaufgabe finden (Bei 100 Bällen sind 5 nicht normgerecht, bei 5000 Bällen können es 5 • 50 = 250 sein (K5).), ist die Einsicht, dass keinesfalls genau 250 Bälle nicht normgerecht sein können, das wesentliche Ergebnis der Aufgabe. In der realen Situation können es beispielsweise 200 oder 255 sein. Eine solche Interpretation des Resultats aus der Dreisatzaufgabe zeigt Verständnis für Zufallsexperimente bei Schülerinnen und Schülern. Darauf ist bei der Besprechung der Aufgabe Wert zu legen. Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich vor allem durch die Mehrschrittigkeit.

Auf Grund des Umfangs des Aufgabentextes wird es einer Reihe von Schülerinnen und Schülern schwer fallen, ein adäquates Situationsmodell zu bilden.
Fehler sind auch zu erwarten, wenn die Zuordnung der entsprechenden Größen nicht gelingt oder wenn der Durchmesser einbezogen wurde.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** könnte man den Umfang des Aufgabetextes reduzieren und auf die überflüssige Angabe des Durchmessers verzichten. Denkbar wäre auch, die Anzahl der Bälle in der Endkontrolle zu reduzieren, so dass die Aufgabenstellung in einer realen Situation nachvollzogen und die Unsicherheit der Vorhersage verdeutlicht werden kann.
Leistungsstarken Schülerinnen und Schülern können weitere Aufgaben angeboten werden, wie sie zu Wahrscheinlichkeit und Zufall in „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S.69 ff. zu finden sind.

Aufgabe 6

Setze das passende Zeichen ein.

		kleiner als < gleich = größer als >	
a)	Höhe einer Zimmertür		200 mm
b)	Alter eines Schülers		1500 Tage
c)	Masse eines Fahrrades		$\frac{1}{2}$ t
d)	Fläche deines Klassenzimmers		$\frac{1}{4}$ ha
e)	Fassungsvermögen eines Wassereimers		1000 mℓ

Lösung (gemäß Kodierung)

a) Höhe einer Zimmertür > 200 mm
b) Alter eines Schülers > 1500 Tage
c) Masse eines Fahrrades < $\frac{1}{2}$ t
d) Fläche deines Klassenzimmers < $\frac{1}{4}$ ha
e) Fassungsvermögen eines Wassereimers > 1000 ml

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten und wählen dazu Einheiten von Größen, insbesondere für Zeit, Masse, Länge, Fläche, und Volumen situationsgerecht aus (L2).
Dabei werden einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler mathematische Objekte zugeordnet (K3). Es ist jeweils ein Umrechnen der Maßeinheit notwendig (K5). Damit ist die Aufgabe mehrschrittig und bedingt Anforderungsbereich II.

Eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert beim Schüler differenzierte Fähigkeiten in der Arbeit mit Längen, Zeiten, Massen, Flächen- und Rauminhalten.
Dazu gehört:
- das Verbinden von Größenangaben mit sinnvollen Vorstellungen von Repräsentanten und
- das Umrechnen von Größenangaben in Angaben mit für den jeweiligen Sachverhalt geeignete Maßeinheiten.

Fehler können vermutlich wie folgt erklärt werden:
- Die Schülerinnen und Schüler verbinden mit den gegebenen realen Gegenständen bzw. Sachverhalten keine konkreten Größenvorstellungen.
- Sie haben Schwierigkeiten dabei, die gegeben Größen so umzurechnen, dass das erfasste Merkmal des realen Gegenstands bzw. Sachverhalts in einer passenden Maßeinheit angegeben wird.

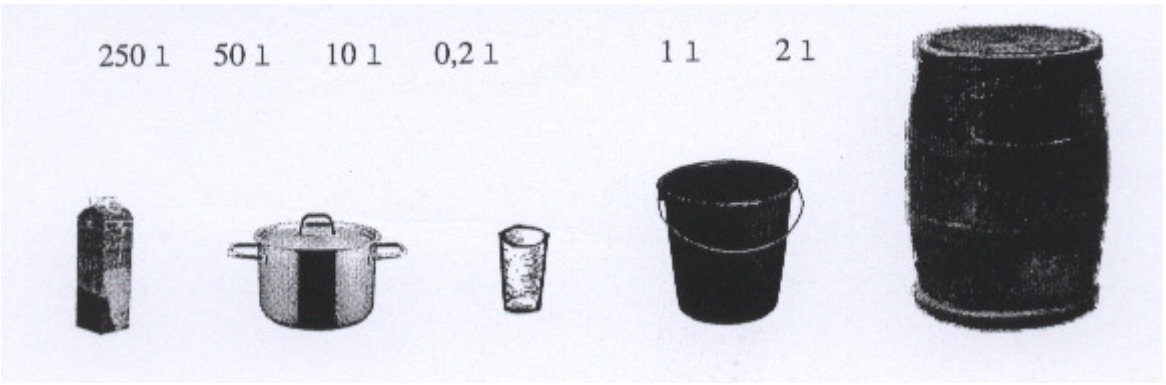
Diagnostische Aussagen allein auf Grund der von den Schülerinnen und Schülern angegebenen Lösungen sind angesichts der Aufgabenstellung in der Regel nicht möglich, da bei falscher Angabe die Ursache des Fehlers nicht deutlich wird. Daher wird die Lehrkraft zur **Diagnose** entweder von den Schülerinnen und Schülern eine Beschreibung ihres Vorgehens einfordern oder die genannten Teilleistungen in einzelnen Aufgaben gesondert prüfen.

Anregungen für den Unterricht

Die folgenden Übungen bieten sich an:
- Schülerinnen und Schüler nennen zu Maßangaben verschiedener Größen geeignete Repräsentanten.
- Schülerinnen und Schüler machen zu realen Gegenständen bzw. Sachverhalten Größenangaben, die bestimmte Merkmale der Gegenstände bzw. Sachverhalte erfassen. In der Regel genügen hier Schätzungen.
- Schülerinnen und Schüler rechnen Größenangaben um.

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** kann es sinnvoll sein, reale Gegenstände oder Abbildungen von diesen einzubeziehen.

z. B. Ordne den Gefäßen die richtige Größe zu. Welche bleibt übrig?



Aufgabe 6

Aufgabe 7

Peter baut mit Holzwürfeln unterschiedlicher Kantenlänge einen Turm. Zum ersten Würfel, der eine Kantenlänge von 1 cm hat, kommt der zweite Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm. Der dritte Würfel hat eine Kantenlänge von 3 cm und so weiter.

Wie hoch ist der Turm, wenn er auf diese Weise aus insgesamt 5 Würfeln gebaut wurde?

Lösung (gemäß Kodierung)

15 cm

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Lösung der Aufgabe ist sowohl über eine zeichnerische Darstellung als auch algebraisch möglich.
Da es sich dabei um eine einfache Addition der ersten 5 natürlichen Zahlen, also ein Routineverfahren (K5, AB I), handelt, ist fehlende Rechenfertigkeit kaum als Ursache für eventuelle Fehler anzunehmen. Vielmehr weisen falsche Ergebnisse auf fehlende Lesekompetenz oder Schwierigkeiten im Umgang mit Körpern, speziell ihren Abmessungen (L2), hin.

Anregungen für den Unterricht

Raumvorstellungen von Körpern, die aus (Einheits-) Würfeln aufgebaut sind, sollten gerade auch **leistungsschwache Schülerinnen oder Schüler** in der realen Handhabung erwerben.
Aufgaben zu Würfeltreppen, Somawürfel oder auch zu Würfelnetzen verbessern die Kompetenzen in den Leitideen Messen und Raum und Form.
Insbesondere für leistungsschwache Schülerinnen oder Schüler sollten die Lösungsideen auch in Form von Rechenwegen schriftlich formuliert werden, um das Ergebnis nachvollziehbar zu machen.

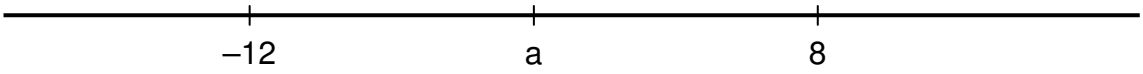
Aufgabe 7

Andere Aufgaben zum Würfelturm (K5, AB II) können sich anschließen, beispielsweise:
- Berechne das Volumen dieses Turms.
Lösung: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$
Der gesamte Turm hat ein Volumen von 225 cm^3.
Falsche Lösung: $15^3 = 3375$
(Nachfolgefehler: Höhe wird als Kantenlänge angenommen)
- Wie groß ist der Oberflächeninhalt dieses Turms?
Lösung: $4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 6 \cdot 5^2 = 270$
Der Turm hat einen Oberflächeninhalt von 270 cm^2.
Falsche Lösung: 330 cm^3
(Es wurden die Oberflächen aller Würfel addiert.)

Eine Vertiefung in den Anforderungsbereich III ist möglich, wenn die Würfel verdeckt liegen und/oder unterschiedlich große Quaderblöcke dargestellt werden (siehe auch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 106 ff.). Die Berechnung der nicht sichtbaren Kantenlängen sollte begründet werden. Dabei ist das Erfassen von Längen im Raum mit perspektivischer Verkürzung sowie das Einsichtigmachen eines schnell gefundenen Ergebnisses wichtig (K6, AB II).

Aufgabe 8

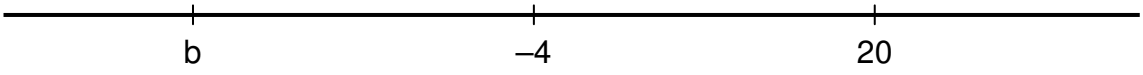
a) Die Zahl a liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen –12 und 8.



Kreuze an, für welche Zahl a steht.

- ☐ A –4
- ☐ B –2
- ☐ C –1
- ☐ D 0
- ☐ E 2

b) Die Zahl –4 liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen 20 und der Zahl b.



Kreuze an, für welche Zahl b steht.

- ☐ A –28
- ☐ B –24
- ☐ C –22
- ☐ D –20
- ☐ E –16

Lösung (gemäß Kodierung)

a) B (–2)

b) A (–28)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**a) AB I** **b) AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe a) erlaubt verschiedene Lösungsstrategien, aus denen die Schülerinnen und Schüler je nach Voraussetzungen auswählen werden:
- Lösung durch Probieren, insbesondere mit Hilfe der gegebenen MC-Antworten im Ausschlussverfahren (K2, K4, K5)
- Graphische Lösung durch Einführung einer Skalierung auf der gegebenen Zahlengerade und näherungsweises Ablesen zur Entscheidung zwischen den MC-Antworten (K4)
- Schrittweises rechnerisches Vorgehen, basierend auf der graphischen Vorstellung (K4, K5): Abstand von –12 und 8 ist 20,
Hälfte davon ist 10, 8 – 10 = –2.
- Algebraischer Ansatz, als Anwendung eines gelernten Verfahrens (K5) oder als Zusammenfassung obiger Überlegungen: $\frac{-12+8}{2} = -2$

Eine **Diagnose** von Schülerfehlern ist aufgrund der vielfältigen Lösungsmöglichkeiten und dem im Test gewählten MC-Format in der Regel nur durch Aufgreifen der Aufgabe im Unterricht möglich (vgl. 4.2).

Anregungen für den Unterricht

Die verschiedenen Lösungsstrategien können im Unterricht besprochen werden und auf ihre Vor- und Nachteile bzw. Grenzen kann ggf. in Form der nachfolgenden Aufgabenvariationen eingegangen werden.

Aufgabenvariationen nehmen oft Einfluss auf die Lösungsstrategien, auf die im Vordergrund stehenden Kompetenzen oder den Anforderungsbereich. Dies wird im Folgenden exemplarisch an der vorliegenden Aufgabe ausgeführt.

Varianten:

1. Formulierung der Aufgabe als offene Aufgabe, ohne MC-Auswahl, was im Unterricht meist der Fall sein wird.

Nach wie vor ist eine Lösung durch Probieren möglich, sie wird aber etwas andere Strategien erfordern, beispielsweise kann die Idee des Probierens dann zu einer Skizze führen: Welche Zahl erreiche ich, wenn ich abwechselnd von links und rechts her in 1-er Schritten zur Mitte gehe?
Soweit nicht im unmittelbaren Vorfeld ein algebraisches Verfahren eingeübt wurde, kann man bei einer offenen Fragestellung zusätzlich den gewählten Lösungsweg erklären lassen, woraus sich eine Einbeziehung der Kompetenz Kommunizieren (K6) im Anforderungsbereich II ergibt.

Will man ein graphisches Verfahren als Lösungsweg besonders betonen, bietet sich folgende Variation an:

2. Formulierung als offene Aufgabe wie in 1, aber Verwendung einer Zahlengerade mit Skalierung (vorgegeben oder vom Schüler eingefordert)
Hier ist eine Lösung durch „Abzählen“ besonders nahe liegend.

Die Grenzen dieser Lösungsstrategie können dann in der folgenden Variante 3 aufgezeigt werden. Ggf. kann eine solche Variation auch von den Schülerinnen und Schülern erfragt werden: „In welchem Fall verhilft uns dieses Abzählen nicht zu einer exakten Lösung?“ (vgl. „Bildungsstandards Mathematik konkret“, Teil 3, Kap.1)

3. Formulierung als offene Aufgabe wie in 1, aber mit anderen Zahlenwerten
Soll beispielsweise eine Zahl in der Mitte zwischen –12,8 und $8\frac{1}{3}$ bestimmt werden, wird eine graphische Lösung oder eine Lösung durch Probieren nicht ans Ziel führen. Ein rechnerisches oder algebraisches Verfahren muss angewandt oder erarbeitet werden. Im Falle einer Erarbeitung eines solchen Verfahrens erhält die Aufgabe nennenswerte Anforderungen im Bereich der Kompetenz Probleme mathematisch lösen (K2).

4. Die Veränderung von Zahlenwerten bietet auch die Möglichkeit einer Vereinfachung, insbesondere, wenn man sich zunächst auf natürliche Zahlen beschränkt, wodurch dann die verschiedenen Verfahren auch für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** einsichtig werden, und ggf. auf andere Fälle übertragen werden können. Bei einer Fehleranalyse durch den Lehrer kann dann insbesondere darauf geachtet werden, ob ein Verfahren fehlt bzw. falsch angewandt wird, oder ob ein Rechenfehler, beispielsweise beim Rechnen mit negativen Zahlen, vorliegt.

5. Eine weitere Variante stellt die Teilaufgabe b aus der Vergleichsarbeit dar, in der bei gegebener Mitte eine Grenze gesucht ist.
Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** lassen sich darauf aufbauend dann Verallgemeinerungen einbeziehen. Gesucht wird nach
- der Zahl m, die auf dem Zahlenstrahl in der Mitte von a und b liegt.
- der Zahl b, wenn a und m gegeben sind.
- (allen) Möglichkeiten für die Zahl b, wenn a = 5 und m > 0. usw.

Aufgabe 8

6. Ebenso denkbar sind Aufgaben, in denen zu gegebener Mitte verschiedene mögliche Zahlenpaare gesucht werden. Hier können im Sinne einer inneren **Differenzierung** (insbesondere durch die Wahl der gegebenen Mitte) Lösungen auf unterschiedlichem Niveau gefunden werden.

7. Möglich ist auch eine Variation der Aufgabe, die ohne Bezug zur Zahlengerade fordert: „Bestimme den Mittelwert der Zahlen 12 und –8." und damit die Kompetenz Darstellungen verwenden (K4) zugunsten der Kompetenz K5 in den Hintergrund drängt.

Generell erlauben Variationen eine veränderte Schwerpunktsetzung bei den mathematischen Kompetenzen, was in den Variationen 1, 2, 3 und 7 bereits ausgeführt wurde. Nachfolgend wird noch eine Variation vorgestellt, die die Aufgabe öffnet in Richtung der Kompetenzen Mathematisch argumentieren (K1) und Kommunizieren (K6) im Anforderungsbereich III:

8. Die Zahl a liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen den Zahlen b und c.
Peter sagt: „Ganz klar, wie man a findet: Man rechnet den Abstand von b und c aus, halbiert ihn, und zählt das Ergebnis zur kleineren Zahl dazu."
Sandra meint: „Ziemlich umständlich, da rechne ich doch einfach den Mittelwert von b und c aus, fertig."
Stelle jeweils einen Term auf, der Peters und Sandras Vorschlag entspricht und zeige durch algebraische Umformungen, dass beide Wege zum gleichen Ergebnis führen.

Aufgabe 9

Zwei Klassen mit insgesamt 53 Schülern und 2 Lehrern mieten für eine Klassenfahrt einen Bus zum Festpreis. Für jede mitfahrende Person betragen die Reisekosten 34 €. Kurzfristig werden 5 Schüler krank.
Wie viel Euro kostet die Busfahrt nun pro Person?

Lösung (gemäß Kodierung)

37,40

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler lösen ein realitätsnahes Problem im Zusammenhang mit linearen Zuordnungen, Proportionalitäten oder Antiproportionalitäten (L4). Zur Lösung der Aufgabe müssen sie die im Text gegeben mathematische Zusammenhänge erkennen und in einen Term übersetzen (K3). Verschiedene Modellierungen sind möglich, wie

- $\frac{55 \cdot 34{,}00\ €}{50}$, wobei die Verteilung der gesamten Reisekosten auf die tatsächlich Mitfahrenden in gleicher Weise erfolgt oder
- $\frac{5 \cdot 34{,}00\ €}{50} + 34{,}00\ €$, wobei auf jeden Mitfahrenden noch zusätzlich zu den ursprünglich 34,00 € der Fahrpreis der fünf kranken Schüler aufgeteilt wird.

Zur Lösung der aufgestellten Terme reicht die Anwendung der vier Grundrechenarten (K5). Da zur Lösung mehrere Arbeitsschritte nötig sind, ist AB II zugeordnet.

Für das erfolgreiche Bearbeiten der Aufgabe sollten die Schüler sicher im Aufstellen von Proportionalitäten und im Mathematisieren einfacher realitätsnaher Zusammenhänge sein, wie sie die Aufgabenstellung enthält.
Ein häufiger **Fehler** dürfte sein, dass Verhältnisse falsch aufgestellt werden, etwa $\frac{50 \cdot 34{,}00\ €}{55} = 30{,}91\ €$ anstelle von $\frac{55 \cdot 34{,}00\ €}{50} = 37{,}40\ €$.

Außerdem kann es Schülerinnen und Schüler geben, die die fünf erkrankten Schülerinnen und Schüler nicht von der Schülergesamtzahl subtrahieren, sondern dazu addieren, also wie folgt rechnen: $\frac{55 \cdot 34{,}00\ €}{60} = 31{,}17\ €$. Nicht auszuschließen ist auch, dass nur der Aufpreis pro Person berechnet wird: $\frac{5 \cdot 34{,}00\ €}{50}$. Möglichkeiten für die **Diagnose** bieten sich ggf. an Hand der schriftlichen Notizen im Testheft oder bei der Diskussion von Lösungswegen im Unterricht, wozu Schülerinnen oder Schüler mit dem Beschreiben und Vergleichen ihrer Lösungswege beitragen sollten.

Anregungen für den Unterricht

Der Inhalt der Aufgabenstellung ist aus der Erfahrungswelt der Schüler und bietet dadurch reichhaltige Möglichkeiten, Bedingungen der Aufgabe unter verschiedener Sicht lebensnah zu diskutieren. Folgende Fragen können dabei beachtet werden: Sollten die erkrankten Schülerinnen und Schüler selbst einen Teil der Fahrtkosten übernehmen oder haben sie für Ersatz zu sorgen, damit der Fahrpreis für die Mitfahrer nicht zu hoch wird? Zahlen die beiden Lehrkräfte selbst auch den Fahrpreis? Sollte es Stornierungsfristen geben u. a. m.? Die gefundenen Antworten bieten mehrere Variationsmöglichkeiten für die gegebene Aufgabe: Wenn jemand bei einer Busfahrt kurzfristig krank wird, dann kann es sein, dass ein bestimmter Betrag oder ein bestimmter prozentualer Anteil am Fahrpreis trotzdem erhoben oder bei Vorkasse einbehalten wird. Auch könnte man eine Staffelung vorsehen, wie: Bei Erkrankung bis 6 Tage vor Fahrtbeginn gibt es noch 80%, bis 4 Tage vor Fahrtbeginn 50% und bis 2 Tage vor Fahrtbeginn noch 25% Rückerstattung des Fahrpreises.
Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** bietet sich hier an, die Anzahl der kranken Personen zu variieren. Anstelle einer konkreten Anzahl von kranken Personen kann hier mit der Variablen x ein Term aufgestellt werden, in dem der Fahrpreis abhängig von x ist: $\frac{55 \cdot 34{,}00\ €}{(55 - x)}$. Diese Aufgabe wäre dann dem Anforderungsbereich III zuzuordnen und könnte ein Einstieg in antiproportionale Zuordnungen sein.
Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** bietet sich an, den Text zuerst in eine Text-Term-Tabelle zu übertragen, um dann einen Lösungsweg besser zu erkennen und umzusetzen.

Aufgabe 10

Aus einem Draht von einem Meter Länge wurde das Kantenmodell eines Würfels gebaut. Es blieb ein Reststück von 4,0 cm.
Wie lang ist eine Würfelkante?

Lösung (gemäß Kodierung)

8 cm Äquivalente: zulässig

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen eine Vorstellung vom Kantenmodell eines Würfels besitzen und diese auf die konkrete Aufgabenstellung übertragen (K4, K2).
Dabei gibt es unterschiedliche Denkansätze. In der Regel werden die Schülerinnen und Schüler von 12 Kanten gleicher Länge ausgehen, was bei einem Gesamtverbrauch von 96 cm dann „theoretisch“ eine Kantenlänge von 8 cm ergibt.

Bei dieser Sichtweise betrachtet man die Aufgabe als eingekleidete Aufgabe, und vernachlässigt Fragen der Realisierung eines solchen Modells. Im Sinne einer tiefer gehenden Betrachtung wäre die Frage zu berücksichtigen, wie denn ein solches Kantenmodell praktisch haltbar sein soll. (Vgl. hierzu auch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, Teil 3, Kapitel 4.)
Möglichkeit 1: Die 12 Stücke werden in irgendeiner Form an den Ecken geeignet verbunden (z. B. durch Plastilinkügelchen, Löten oder Verhaken), möglicherweise ohne Verlust an Draht, möglicherweise mit Drahtverlust, was dann dazu führen würde, dass 8 cm als Ergebnis nur eine obere Grenze darstellt.
Möglichkeit 2: Das Modell wird aus den 96 cm Draht in einem Stück geformt. In diesem Fall müssen beispielsweise drei Seiten „doppelt“ durchlaufen werden, und man erhält dann als Ergebnis etwa 6,4 cm.
Die Testaufgabe zielt nicht explizit auf solche Überlegungen ab, sollte es dennoch zu derartigen Schülerlösungen mit entsprechenden Erläuterungen kommen, ist dies wertvoll.

Anregungen für den Unterricht

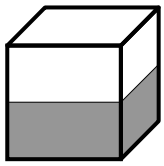
Jedenfalls sollte in einer Aufarbeitung der Aufgabe im Unterricht im Sinne eines „Ernstnehmen des Kontexts“ auf die oben skizzierten Fragen der Realisierung eines solchen Kantenmodells eingegangen werden. Die Aufgabe erhält dadurch einen Schwerpunkt im Bereich der Kompetenz Mathematisch modellieren (K3) und stößt aufgrund der nötigen kritischen Beurteilung des verwendeten Modells in den Anforderungsbereich III vor.

Mögliche Variationen und Ergänzungen der Aufgabe:
- Praktische Anfertigung von Modellen
- Berechnen bzw. Abschätzen des Verbrauchs bei gegebener Kantenlänge
- Theoretischer Zusammenhang zwischen Kantenlänge, Gesamtkantenlänge, Oberfläche und Volumen
- Bei einem Verzicht auf eine Einkleidung der Aufgabe können innermathematische Aspekte in den Vordergrund treten: Wie ändert sich die Gesamtkantenlänge bei Verdoppelung (…) der Kantenlänge u. Ä.

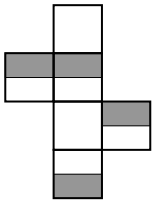
Dabei ist zu beachten, dass die genannten Variationen nicht nur bei der Neubehandlung oder Wiederholung des Themas „Würfel“ einsetzbar sind, sondern ganz analog auf andere Körper übertragen werden können. Auf diese Weise gelingt es, auf eventuell im Rahmen der Vergleichsarbeit festgestellte Defizite im folgenden Unterricht bei der Behandlung von Prismen oder Pyramiden einzugehen.

Aufgabe 11

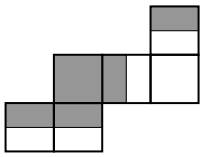
Ein Würfel wird zur Hälfte in Farbe getaucht.
Welches der folgenden Netze gehört zu diesem Würfel?
Kreuze an.



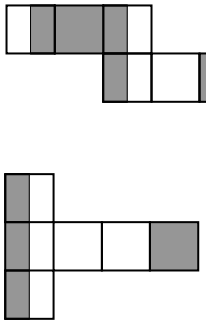
☐ A



☐ B



☐ C



☐ D

Lösung (gemäß Kodierung)

B

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler mit den Begrenzungsflächen des Würfels operieren (L3). Im Schrägbild nicht dargestellte Flächen des Körpers müssen gedanklich ergänzt und abgezählt werden. Eine besondere Anforderung besteht in der Transformation der dreidimensionalen Darstellung als Schrägbild in eine zweidimensionale

Abbildung als Netz (K4). Dies begründet auch den Anforderungsbereich III, da verschiedene Formen der Darstellung in der Ebene zweckentsprechend beurteilt werden müssen.
Die einfachste Lösungsstrategie besteht in der Annahme, dass es fünf gefärbte Flächen geben muss: ein ganzes Quadrat und vier halbe. Somit kommt nur die Auswahlmöglichkeit B in Betracht.
Dieses Vorgehen durch Ausschluss ist bei MC-Aufgaben oft hilfreich, kann aber mangelnde Kompetenz zum eigentlichen Aufgabenkern verdecken. Im Unterricht sollte diesem Lösungsweg deshalb unbedingt ein weiterer gegenübergestellt werden.

Fehler sind vermutlich bedingt durch mangelndes Vorstellungsvermögen bei räumlichen Anordnungen sowie durch Defizite beim Interpretieren der verschiedenen Möglichkeiten ihrer Darstellung in der Ebene.

Anregungen für den Unterricht

Fördermaßnahmen zur Verbesserung des räumlichen Vorstellungsvermögens – insbesondere für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** – sollten das aktive Handeln mit den Körpern einschließen: z. B. Beobachten der Änderung der Oberflächengröße beim Zerteilen oder das Einfärben der äußeren Flächen (bzw. von Teilen dieser).
Das perspektivische Zeichnen von Quadern in unterschiedlicher Lage und deren Übertragung in ein Netz könnten weitere Schritte darstellen. So kann u. a. die Zugehörigkeit verschiedener Netze zu einem einzelnen Körper veranschaulicht werden.

Netze von Pyramiden erleichtern evtl. das Übertragen von Körperdarstellungen in die Ebene, da die Dreiecksflächen einfacher zuzuordnen sind als beispielsweise ausschließlich die Quadrate von Würfeln. Unterschiedliche Einfärbungen einer jeden Begrenzungsfläche und der Übertrag auf die Netzebene verdeutlichen zudem die Position einer einzelnen Fläche im Raum gegenüber der Lage in der Ebene.

Ein Bezug zur mathematischen Kompetenz Kommunizieren (K6) wird hergestellt, wenn die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden zu begründen, warum ein Netz zu einem Körper passt. Dabei müssen sie die Fachsprache adressatengerecht verwenden und Lösungswege verständlich darstellen.

Aufgabe 12

Gib an, ob die folgende Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:

„Wenn ich zur Zahl 5 eine Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 5."

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Aussage ist falsch. Zur Begründung muss auf negative Zahlen oder die Zahl 0 verwiesen werden bzw. in einer Beispielrechnung Bezug genommen werden.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen Sinn tragende Vorstellungen von rationalen, insbesondere von ganzen Zahlen besitzen, die Operation Addition und die Relation „größer als" sicher anwenden können (L1).
Sie müssen Zusammenhänge erkennen und eine überschaubare Argumentation (Gegenbeispiel) entwickeln können (K1).
Diese ist nicht trivial und verdient die Zuordnung zum Anforderungsbereich II.

Folgende **Fehler** sind vermutlich häufig zu erwarten:
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig, da Addieren für sie mit Vergrößern (Vermehren) gleichbedeutend ist.
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig und führen ein Beispiel (wie $5 + 1 > 5$) als Begründung an. Hier sind falsche Vorstellungen darüber zu vermuten, was erforderlich ist, um die Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit einer Allaussage zu begründen.
Ein häufig vorkommender Schülerfehler kann auch in der Vorstellung bestehen, dass eine Zahl a immer positiv und eine Zahl – a immer negativ ist.
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig, da sie vermutlich die natürlichen Zahlen als Grundbereich voraussetzen, aber die Zahl Null nicht berücksichtigen. Die Eigenschaft der Null, neutrales Element bezüglich der Addition zu sein, wird vermutlich nicht herangezogen.
(Vgl. „Bildungsstandards Mathematik: konkret" zur Analyse von Fehlvorstellungen, S. 111 ff.)

Aufgabe 12

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht sollten die verschiedenen Bedeutungen des Minuszeichens in der Menge der ganzen bzw. rationalen Zahlen thematisiert werden:
- als Operationszeichen zum Ausdrücken einer Differenz a – b, wie 4 – 2 = 2, 2 – 4 = - 2, 0 – 3 = - 3,
- als Vorzeichen zum Bezeichnen der zu a entgegengesetzten Zahl – a, wie 3 ist zu – 3 oder – 4 ist zu 4 entgegengesetzt.

Da in der gegebenen Aufgabenstellung kein Variablengrundbereich festgelegt ist, sollte im Unterricht auch gezielt auf mögliche Zahlenbereiche eingegangen werden.

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** ist die folgende Aufgabe geeignet, um die Bedeutung der Zahl 0 im Bereich der natürlichen Zahlen bewusst zu machen.
„Gib an, ob die Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:
Wenn ich zur Zahl 5 eine natürliche Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 5."
Speziell zur Arbeit mit negativen Zahlen, aber auch wiederum zur Eigenschaft der Zahl Null bietet sich die folgende Aufgabe an.
„Gib an, ob die Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:
Wenn ich zur Zahl 0 eine ganze bzw. (rationale) Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 0."
Schließlich muss inhaltlich verstanden werden, dass es für das Widerlegen einer Allaussage genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben.

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnten aufgefordert werden, selbst Behauptungen bezüglich der Multiplikation oder der Division aufzustellen und diese zu prüfen.

Aufgabe 13

Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Nach Abschluss von Baumaßnahmen kann er jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren.
Wie viel Fahrzeit spart er ein?
Kreuze die richtige Antwort an.

☐ A 10 min ☐ B 30 min ☐ C 50 min ☐ D 1,0 h ☐ E 2,5 h

Lösung (gemäß Kodierung)

B (30 min)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler setzen die vorgegebene Situation in eine mathematische Struktur um (K3). Dabei übersetzen sie natürliche Sprache in formale Sprache und umgekehrt und führen Lösungsverfahren aus (K5). Konkret werden die Schülerinnen und Schüler, ausgehend von der Geschwindigkeits- und Entfernungsangabe, über die Eigenschaften der möglichen Zuordnungen auf die benötigte Fahrzeit schließen. Zum Abgleich mit den angegebenen Auswahlmöglichkeiten ist darüber hinaus eine einfache Umrechnungen von Zeitangaben erforderlich (L2). Auf Grund der Mehrschrittigkeit wurde Anforderungsbereich II zugeordnet.

Zu erwartende **Fehler** können u.a. folgende sein:
- Schülerinnen und Schüler verwenden nur die Größen, die Zeiteinheiten enthalten, und subtrahieren die Zahlenwerte, ohne die Einheiten zu berücksichtigen. Das Ergebnis wird nicht in der gegebenen Sachsituation interpretiert und geprüft. (60km/h - 50km/h → 10 → Ergebnisangabe: 10min)
- Für die Geschwindigkeit von 60km/h wird eine Fahrzeit von 2,5 Stunden berechnet, aber die Frage nach der Zeiteinsparung nicht mehr beantwortet. (→ Ergebnisangabe: 2,5h)

- Es wird die Zeiteinsparung von 0,5 h richtig berechnet und dann falsch in Minuten umgerechnet. (1h = 100min → 0,5h = 50 min → Ergebnisangabe: 50 min)

Entsprechend der auftretenden Fehler, die sich erst aus der Analyse von Lösungswegen erschließen (**Diagnose**), wird die Lehrkraft unterschiedliche Maßnahmen ergreifen, um die Schülerinnen und Schüler beim (vollständigen) Modellieren von Situationen zu fördern, beispielsweise:

- Die Aufgabe wird in eigenen Worten wiedergegeben.
- Es werden Skizzen angefertigt.
- Signalwörter werden unterstrichen.
- Das Vorgehen (auch Teilschritte) wird beschrieben.
- Ergebnisse werden an der gegebenen Situation interpretiert und geprüft.

Darüber hinaus kann die Lehrkraft Umrechnungen von Zeitangaben in täglichen Übungen festigen, wie 1,5 min = ... s, ¼ h = ... min, 0,75 min = ... s, 50 s = ... min, 1,25 h = ... min.

Anregungen für den Unterricht

Einfaches Variieren der Bedingungen der Aufgabe ermöglicht bereits eine **Differenzierung** nach Anforderungsbereichen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Dabei sollten Schülerinnen und Schüler auch angehalten werden, ihre Lösungswege zu erklären.

Beispiele:

- Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h.
Gib seine Fahrzeit in Stunden an. (AB I)
Gib seine Fahrzeit in Minuten an. (AB I)
- Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Nach Abschluss von Baumaßnahmen kann er jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren.
Wie viel Stunden ist der LKW dann unterwegs? (AB I)
- Ein LKW fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h, ein zweiter LKW fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Beide LKW sind 30 Minuten unterwegs.
Wie viel Kilometer hat der Schnellere von beiden mehr zurückgelegt? (AB II)
- Peter geht nach einer Wanderung mit seinem Hund nach Hause. Sie müssen noch 6 km laufen.
Peter geht mit 4 km/h, sein Hund rennt mit 12 km/h. Der Hund läuft mit dieser Geschwindigkeit bis zur Haustür, kehrt um, läuft zu Peter und wieder zur Haustür usw. Wie weit läuft der Hund, bis Peter an der Haustür angelangt ist? (K2, AB III)

Aufgabe 14

Gib für x eine rationale Zahl so an, dass der Wert des Terms $\frac{2x+1}{3}$ negativ ist.

Lösung (gemäß Kodierung)

Es wird eine beliebige rationale Zahl x mit $x < -0{,}5$ angegeben.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem Term bzw. nutzen ggf. Äquivalenzumformungen von Gleichungen/Ungleichungen, insbesondere auch unter Einbeziehung der rationalen Zahlen (L1, K5).
Dabei handelt es sich um die direkte Anwendung von Routineverfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang (AB I).

Eine Lösung kann durch Probieren gefunden werden, sinnvoll ist auch das Formulieren einer Gleichung $\frac{2x+1}{3} = 0$ bzw. Ungleichung $\frac{2x+1}{3} < 0$ mit anschließender Umformung zu $x = -0{,}5$ bzw. $x < -0{,}5$.

Fehler beim Umgang mit rationalen Zahlen, beim Aufstellen der Gleichung bzw. Ungleichung oder beim Ausführen der Äquivalenzumformungen deuten auf unterschiedlichen Förderbedarf hin. Die Aufgabenstellung verlangt nicht, dass die Schülerinnen und Schüler einen Lösungsweg angeben. Eine **Diagnose** ist deshalb erst nach einer detaillierten Besprechung im Unterricht möglich.

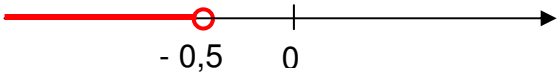
Anregungen für den Unterricht

In der Aufgabenstellung wurde nur nach einer Zahl gefragt, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt. Durch systematisches Probieren können daher einzelne Zahlen aus der Lösungsmenge erhalten werden, ohne einen Zusammenhang zur Zahlengerade herstellen zu müssen.
Im Unterricht sollte die Frage nach der gesamten Lösungsmenge als Motivation dienen, eine Äquivalenzumformung zu Hilfe zu nehmen. Hierzu werden für das Lösen einer Ungleichung die gleichen Gesetze und Regeln wie bei den Gleichungen benötigt.

Aufgabe 14

Es ist sinnvoll, die Lösung auf der Zahlengerade, die Mengen- und Intervallschreibweise gegenüberzustellen, um die Vielfalt der Darstellungsmöglichkeiten zu demonstrieren.

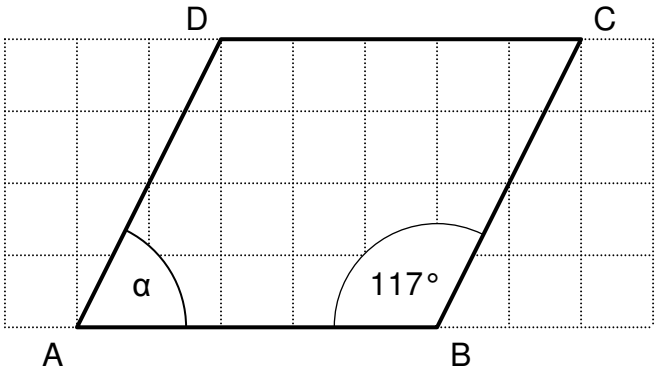
Beispiel:



$L = \{x \mid x < -0,5\}$ $x < -0,5$

Aufgabenstellungen für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** im Bereich der Termumformungen lassen sich vor allem durch Umwandlung in Textaufgaben erhalten. Zahlenrätsel, Altersrätsel oder geometrische Probleme lassen sich mit Hilfe von Gleichungen oder Ungleichungen mathematisieren. Auch die Komplexität der Termstruktur ist zur Differenzierung geeignet. Somit sind einfache Terme auch für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** verwendbar.

Aufgabe 15a



Ermittle den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.
(Hinweis: Die Seitenlänge der gestrichelten Quadrate beträgt 1 cm.)

Lösung (gemäß Kodierung)

20 cm^2

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

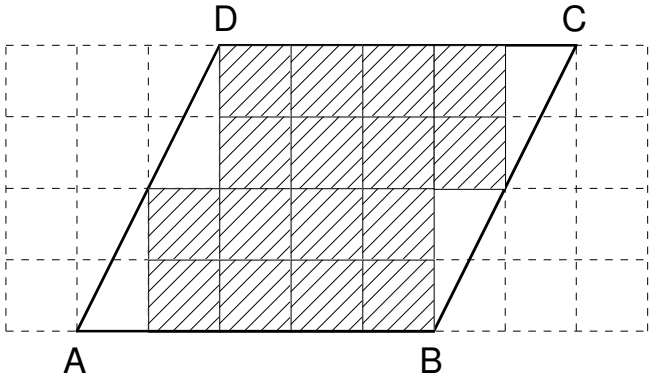
Die Schülerinnen und Schüler haben den Flächeninhalt des gegebenen Parallelogramms zu berechnen (L2). Verschiedene Wege sind dafür möglich. Das Anwenden des Grundprinzips des Messens durch Auszählen der Einheitsquadrate erscheint genauso nahe liegend wie die Berechnung des Flächeninhalts. Für letzteren müssen die Länge und die Höhe des Parallelogramms in der graphischen Darstellung erkannt (K4) und die ermittelten Werte bei der Berechnung des Flächeninhalts verwendet werden (K5). Für das Auszählen der Einheitsquadrate ist ein entsprechendes Zerlegen und Ergänzen von Teilen des Parallelogramms (im Kopf) notwendig (K 4), um mit „ganzen“ Einheitsquadraten arbeiten zu können (K5). Da diese Aufgabenstellung zur Routinehandlung von Schülerinnen und Schülern achter Klassen gehören sollte, wird der Anforderungsbereich AB I zugeordnet.
Als Voraussetzung für das Lösen dieser Aufgabe wird Sicherheit bei Flächenberechnungen von Rechtecken angesehen. Das Ablesen von Koordinaten aus dem Gitternetz, um damit auf Länge und Höhe des Parallelogramms zu schließen, muss beherrscht werden. Auch sollten die Schülerinnen und Schüler in der Zerlegung von flächengleichen Figuren geübt sein.

Je nach gewähltem Lösungsweg kann es zu unterschiedlichen **Fehlern** kommen. Wird die Formel $A = l \cdot b$ (l als Länge des Parallelogramms, b als Höhe) verwendet, wird oftmals die Strecke [BC] als b angesehen. Damit ergibt sich für den Flächeninhalt fälschlich: $A = 5\,\text{cm} \cdot 4{,}3\,\text{cm}$ bzw. $A = 21{,}5\,\text{cm}^2$. Eine weitere Möglichkeit, den Flächeninhalt des Parallelogramms zu berechnen, ist das Parallelogramm zu einem großen Rechteck zu ergänzen und dann den Flächeninhalt von zwei Dreiecken abzuziehen: $A = 7\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} - 2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}$. Es kann auch der Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks im Parallelogramm bestimmt und dann der Flächeninhalt der beiden Restdreiecke dazu addiert werden: $A = 3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} + 2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}$. Hier kann es zu einfachen Rechenfehlern kommen. Auch beim Auszählen der Einheitsquadrate kann dies auftreten. Wie meist bringt nur das Beschreiben des Bearbeitungsweges Sicherheit über mögliche **Defizite** bei einer Schülerin oder einem Schüler.

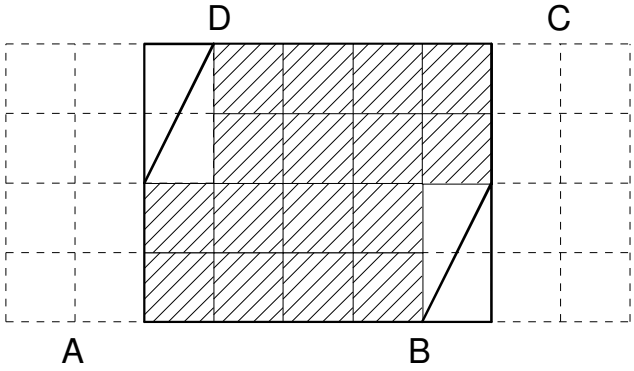
Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht kann man weitere Figuren bestimmen lassen, die den gleichen Flächeninhalt wie das vorgegebene Parallelogramm besitzen. Diese Öffnung der Aufgabe ist besonders für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** reizvoll.
Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** bietet es sich an, zur Hinführung auf diese Aufgabe, Flächeninhalte von Rechtecken und Quadraten bestimmen zu lassen. Grundvorstellungen zum Flächeninhalt etwa über das Auslegen mit Einheitsflächen sind hilfreich, um durch Verändern der Lage dieser Einheitsflächen zu flächengleichen anderen Figuren zu gelangen. Hier kann später auch nur durch Messen bzw. durch Berechung der jeweiligen Flächeninhalte vorgegangen werden.

Es bietet sich an, dass gleiche Vorgehen für ein Parallelogramm zu verwenden.



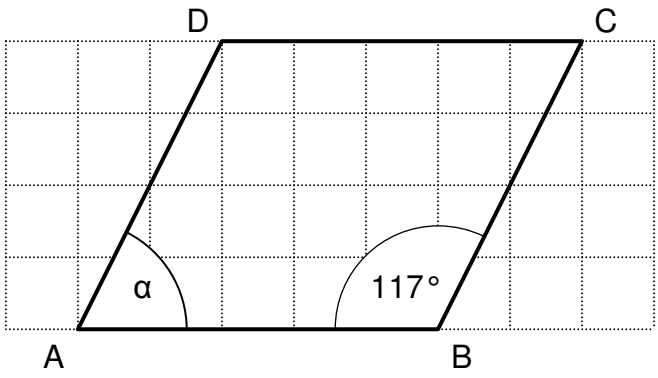
In das Parallelogramm werden so weit es möglich ist, Quadrate mit dem Flächeninhalt von 1 cm² eingezeichnet. Durch geschicktes Zerlegen der Restfigur, können wieder Figuren entstehen, die man mit Quadraten auslegen kann. Auch andere „Einheitsflächen“ sollten benutzt werden, um den Grundgedanken des Messens zu vertiefen.



Aufgabe 15a

Bei **leistungsstarken Schülerinnen und Schüler** können als Figur beispielsweise das gleichschenklige Trapez und das allgemeine Trapez vorgegeben werden und die Flächeninhalte berechnet werden bzw. kann nach anderen flächengleichen Figuren gefragt werden.

Aufgabe 15b



Gib die Größe des Winkels α an.
(Hinweis: Die Seitenlänge der gestrichelten Quadrate beträgt 1 cm.)

Lösung (gemäß Kodierung)

63°

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

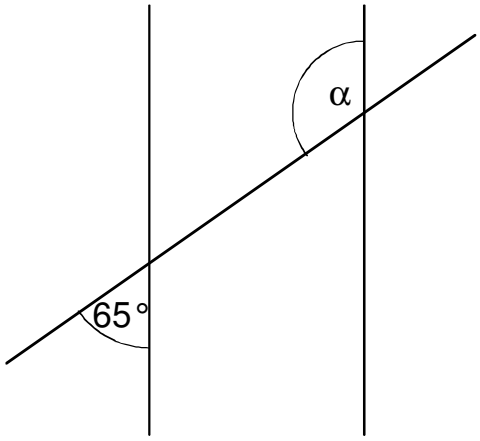
Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Für die Berechnung der Größe des gesuchten Winkels (L2) stehen mehrere Lösungswege zur Verfügung:
- Da die Summe der Innenwinkel im Viereck immer 360° beträgt und in einem Parallelogramm zwei gegenüberliegende Winkel die gleiche Größe haben, ergibt sich: $\alpha = \frac{360° - 2 \cdot 117°}{2}$.
- Die Berechnung kann auch mit Hilfe des Nebenwinkelsatzes erfolgen. So gilt hier: $\alpha = 180° - 117°$.

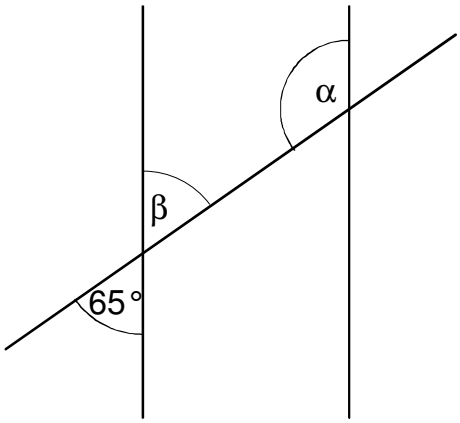
Bei beiden Lösungswegen ist es nötigt, dass Schülerinnen und Schüler grundlegende Sätze (wie Innenwinkelsätze, Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen, Nebenwinkelsatz) kennen und anwenden sowie mit Termen bzw. Gleichungen umgehen können, d. h. sie müssen die benötigten Gleichungen selber aufstellen und lösen (K4, K5). Fehlen derartige Voraussetzungen, kann kaum eine Lösung erwartet werden. Hier sollte in vielfältigen täglichen Übungen das „variable Sehen“ an geometrischen Figuren trainiert werden, damit bekannte Sätze angewendet werden können.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** bietet es sich im obigen Sinne an, zur Hinführung auf die gestellte Testaufgabe, Lagerelationen von Geraden und Winkelbeziehungen (wie oben benannt) erkennen zu lassen, bevor Winkelgrößen bestimmt werden.
In der folgenden Darstellung können zunächst das Parallelenpaar identifiziert sowie Winkelpaare, die an den geschnittenen Parallelen entstehen, markiert werden.

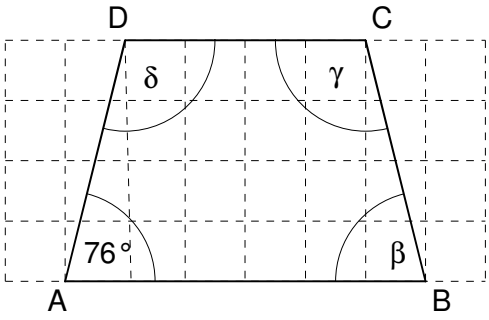


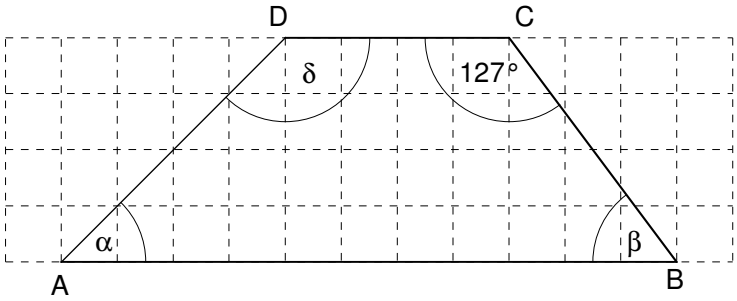
Es bietet sich auch an, Überlegungen anzustellen, wo überall gleiche Winkelmaße auftreten (Wechselwinkel, Stufenwinkel, Ergänzungswinkel) oder wo die Summe zweier Winkelmaße 180° beträgt. Über die Scheitelwinkelbeziehung ergibt sich für $\beta = 65°$. Die beiden Winkel α und β ergänzen sich zu 180°. Mit dieser Beziehung ergibt sich $\alpha + 65° = 180°$ und damit $\alpha = 115°$.
Aus diesen Betrachtungen lassen sich, wenn nicht bereits durch Schülerinnen oder Schüler angeboten, weitere Lösungswege ableiten, die zuerst verbalisiert und dann in Terme bzw. Gleichungen umgesetzt werden können. Man sollte diese vergleichen und bewerten. Bei komplizierteren Figuren kann dies bis in den Anforderungsbereich III der mathematischen Kompetenz Kommunizieren (K6) münden.



Aufgabe 15b

Bei **leistungsstarken Schülerinnen und Schülern** können ein gleichschenkliges oder ein allgemeines Trapez gegeben werden.

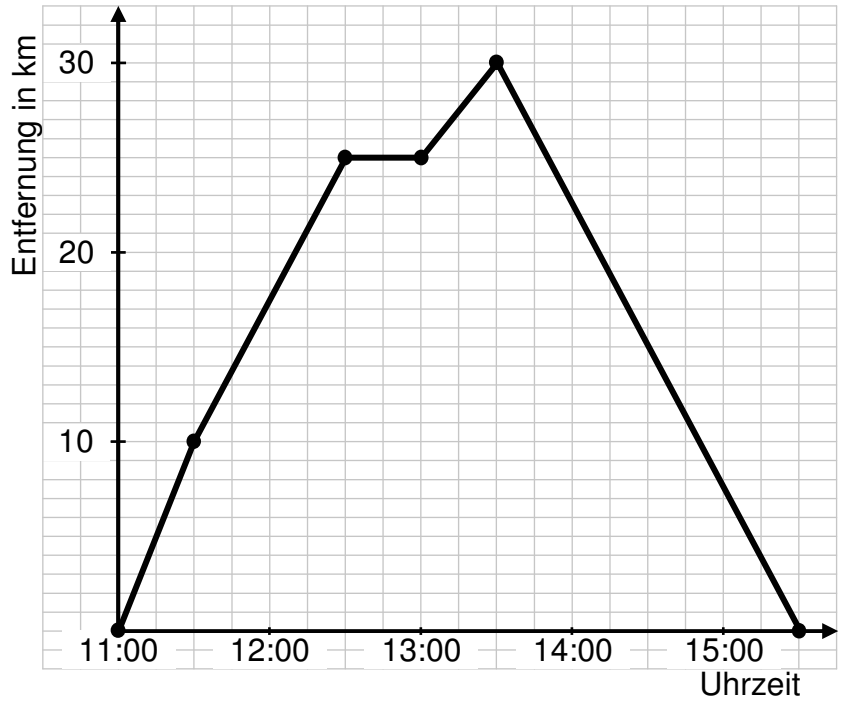




Hieran sollen entsprechende Winkelmaße bestimmt werden. Beim allgemeinen Trapez müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Winkel α das Maß $45°$ hat, da das Lot von D auf die Strecke [AB] die gleiche Länge hat, wie die Entfernung des Lotfußpunktes vom Punkt A. Beim gleichschenkligen Trapez müssen sie gerade diese Eigenschaft nutzen, um zu den fehlenden Winkelmaßen vorzudringen (AB III).

Aufgabe 16

Eine Radwandergruppe fährt als Training von ihrem Heimatort in den 30 km entfernten Zielort und auf der gleichen Straße wieder zurück. Entlang der Straße stehen Kilometersteine. Das folgende Diagramm beschreibt den Verlauf der Tour.



Gib an, welche Streckenlänge bis zur Pause zurückgelegt wurde.
Kreuze die richtige Lösung an.

- ☐ A 10 km
- ☐ B 12,4 km
- ☐ C 13,1 km
- ☐ D 25 km
- ☐ E 30 km
- ☐ F 60 km

Lösung (gemäß Kodierung)

D (25 km)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler ordnen einer einfachen Erscheinung aus ihrer Erfahrungswelt mathematische Objekte zu und prüfen das Resultat am Kontext (K3, AB I): Die Geschwindigkeit der Bewegung ist an der Steigung des Graphen abzulesen. Während einer Pause ist die Geschwindigkeit Null – der Graph verläuft demnach parallel zur waagerechten Achse. Dies ist am „Kilometerstein 25“ der Fall.
Eine vertraute Darstellung einer Situation als Graph im Koordinatensystem wird genutzt und interpretiert (K4).

Anregungen für den Unterricht

Graphen können vielfältig zur Beschreibung von Alltagssituationen herangezogen werden. Entsprechende Aufgabenstellungen können die mathematische Kompetenz Modellieren (K3) fördern.
Beispiele sind:
- Geschwindigkeit eines Rennwagens in Verbindung mit der Darstellung der Rennstrecke,
- Füllkurven von Körpern,
- Stromverbrauch in Abhängigkeit von der Tageszeit, etc.

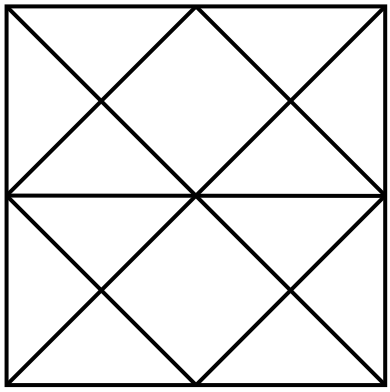
Es sind drei Varianten für eine Bearbeitung möglich:
1. Situation $\rightarrow$ Graph (Darstellung),
2. Graph $\rightarrow$ Situation (Verbalisierung),
3. Situation $\leftrightarrow$ Graph (Zuordnung).

Fächerübergreifende Bezüge zur Chemie und Physik sind im Themenbereich „Zuordnungen“ vielfältig möglich: Kleine Projekte, die reales Experimentieren einschließen, verzahnen die Kompetenzen bzw. -bereiche des mathematisch-naturwissenschaftlichen Aufgabenfeldes (z.B. Fall-Experimente oder Dichte-Messungen verschiedener Materialien).

Beschreibungen von Zuordnungen bieten hinsichtlich des Kommunizierens (K4) vielfältige Möglichkeiten, eine **Binnendifferenzierung** vorzunehmen. So ist es im Anforderungsbereich I möglich, aus Grafiken und Abbildungen Informationen zu entnehmen, im Anforderungsbereich II sollen Überlegungen oder Ergebnisse verständlich dargestellt, Grafiken und Abbildungen sinnentnehmend erfasst sowie die Fachsprache adressatengerecht verwendet werden.
Im Anforderungsbereich III bewerten Schülerinnen und Schüler Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten.
Zur Entwicklung der Fachsprache sollte ein angemessenes Vokabular zum Beschreiben eines Graphen zur Verfügung stehen: Hoch- und Tiefpunkte am Graphen, Merkmale wie steigend, konstant bleiben, stark oder schwach steigend, können verwendet werden.
Anhand von Tabellen oder beschreibenden Texten kann dann das Zeichnen von Graphen geübt werden.

Aufgabe 17

Ein Quadrat wurde durch seine Diagonalen und einige Verbindungslinien zwischen den Seitenmitten in Teilflächen zerlegt.



Färbe 75% der Gesamtfläche ein. Verwende nur gegebene Teilflächen.

Lösung (gemäß Kodierung)

75 % sind korrekt markiert, wenn alle Teilflächen schraffiert sind mit Ausnahme von (a) entweder 4 kleinen Dreiecken (b) oder 2 Quadraten (c) oder 1 Quadrat und 2 kleinen Dreiecken.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler können diese Aufgabe mit Sinn tragenden Vorstellungen von gebrochenen Zahlen/Prozentzahlen bearbeiten (L1), indem sie 75%, $\frac{3}{4}$ und 0,75 als gleichwertig erkennen (K5) und ihre Vorstellung vom Bruch als Teil eines Ganzen auf die gegebene Darstellung anwenden (K4).
Sie bearbeiten bekannte Sachverhalte in einer für sie wahrscheinlich neuen Variante, da insbesondere die senkrechte Symmetrieachse als Verbindungslinie fehlt (AB II).
Voraussetzung für ein erfolgreiches Bearbeiten sind das Verständnis von Bruch und Prozentdarstellungen bezüglich eines Ganzen an verschiedenen mathematischen Objekten.

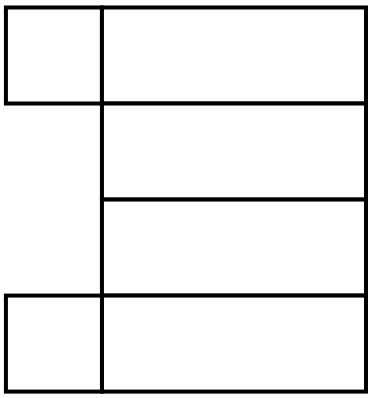
Da nur gegebene Teilflächen verwendet werden dürfen, wird ein häufig zu erwartender **Fehler** darin bestehen, dass die Schülerinnen und Schüler eines der Quadrate halbieren.
Bei der **Diagnose** auftretender Fehler sollten fehlende Grundvorstellungen von Anteilen von der Lehrkraft besonders beachtet werden.

Anregungen für den Unterricht

Aus der gegebenen Aufgabe können auch durch die Schülerinnen und Schüler selbst weitere Aufgaben bezüglich des Färbens von Anteilen entwickelt werden, entweder mit vorgegebenen gemeinen Brüchen, Dezimalzahlen oder Prozentzahlen bzw. durch Verändern der Darstellung, wie
- bei der vorgegebenen Figur die fehlende Symmetrieachse einzeichnen und dann färben lassen (AB I),
- bei „neuen“ Figuren (wie Rechtecken, Dreiecken, Sechsecken) Verbindungslinien einzeichnen und dann färben lassen (AB II).

Aufgabe 18

Sebastian soll das Netz eines Quaders mit quadratischer Grundfläche zeichnen. Seine Skizze sieht wie folgt aus:



Ist Sebastians Skizze korrekt? Begründe deine Entscheidung.

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss zwei Aspekte beinhalten:
(1) Die Feststellung, dass die Skizze nicht korrekt ist und
(2) die Begründung, dass sich die quadratischen Grundflächen in der Skizze überlagern.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Beim Umgang mit der Darstellung von Körpern (L3) muss hier der Bezug zwischen einem Quader und dem vorgegebenen Netz hergestellt (K4) und die Entscheidung begründet werden (K1). Zur Bearbeitung sind mehrere Schritte notwendig (AB II).
Es sind verschiedene Lösungsstrategien denkbar. In diesem Aufgabenkontext ist die Vorstellung, „aus diesem Netz einen Körper (hier einen Quader) zu falten“, besonders hilfreich. So erscheint die Begründung, dass die quadratische Fläche für eine („die rechte“) Seitenfläche fehlt, zu der durch die Kodierung vorgegebenen Lösung gleichwertig.

Liegt eine Begründung vor, können daraus Rückschlüsse auf die Vorgehensweise gezogen werden. So weist die Formulierung „ein Quadrat müsste auf der rechten Seite sein“ darauf hin, dass der Körper zerlegt wurde. Dabei kann es durchaus andere Zerlegungen geben, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt sein muss.
Ist die Begründung wenig aussagekräftig oder fehlt sie ganz, können zur **Diagnose** weitere Netze bzw. fehlerhafte Netze vorgelegt werden. So kann festgestellt werden, ob Defizite in der Interpretation der Netze (K4) und der damit verknüpften Vorstellung von räumlichen Figuren oder in der Erläuterung der Zusammenhänge (K1) vorliegen.

Anregungen für den Unterricht

Mögliche Variationen und Ergänzungen der Aufgabe sind vielfältig und hinlänglich bekannt, wie:

- Praktische Anfertigung von Modellen,
- Berechnen bzw. Abschätzen von Oberflächeninhalten (und Volumen),
- Vergleich von Flächen- und Kantenmodellen.

Eine Aufarbeitung von festgestellten Defiziten sollte dabei nicht in einer isolierten Wiederholung bezüglich Netzen von Quadern bestehen, sondern im Zusammenhang mit anderen Körpern erfolgen. Das Arbeiten mit und das Herstellen von verschiedenen Modellen von Prismen, Pyramiden, Kegeln (und exemplarisch komplexeren Körpern) erleichtern gerade auch Schülerinnen und Schülern mit Problemen im Bereich der räumlichen Anschauung den Zugang zu Aufgabenstellungen zur Bestimmung von Volumina und Oberflächeninhalten, wobei in Verbindung damit auf Defizite eingegangen werden kann, die im Rahmen des Tests festgestellt wurden.

Aufgabe 19

Die Summe dreier natürlicher Zahlen beträgt 154. Die größte Zahl ist um 8 größer als die mittlere Zahl, die kleinste Zahl ist um 7 kleiner als die mittlere Zahl.
Wie heißen die drei Zahlen?

Lösung (gemäß Kodierung)

44, 51 und 59

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Zusammenhänge zwischen den drei gegebenen natürlichen Zahlen erkennen (Addition und Kleiner - bzw. Größer - Relation).
Es bietet sich an, die entsprechenden Terme zu bilden (Ungleichungen, Gleichungen), um schließlich die Lösungen des Systems zu ermitteln (L4).
Dazu müssen Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, natürliche Sprache in symbolische Sprache zu übersetzen und umgekehrt (K5).
Systematisches Probieren, ggf. mit Hilfe von Tabellen, unter Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen den Zahlen ist als alternatives Lösungsverfahren möglich (K 2).
Der Anforderungsbereich (AB II) ergibt sich aus der Mehrschrittigkeit der Bearbeitung.

Häufige **Fehler** sind wahrscheinlich zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten haben, den Zusammenhang zwischen natürlicher Sprache (Text) und der Darstellung in einer Termstruktur herzustellen. Bei der schrittweisen Termbildung und Reduzierung auf eine Variable treten ebenfalls oft Probleme auf, ebenso beim Zusammenfassen der Zahlen bzw. Variablen und beim äquivalenten Umformen von Gleichungen.
Darüber hinaus ist zu erwarten, dass einige Schülerinnen und Schüler zwar nach Lösen der Gleichung zu einem Ergebnis gelangen, aber daraus nicht die beiden anderen Zahlen bestimmen. Sie überprüfen ihre Ergebnisse nicht an den Ausgangsbedingungen.

Beim systematischen Probieren können zusätzlich Fehler durch Vernachlässigung der gegebenen Bedingungen auftreten.
Für die **Diagnose** von Fehlern ist es notwendig, dass Schülerinnen und Schüler Gelegenheit bekommen, über ihr Vorgehen zu berichten. Dabei wird deutlich, inwieweit sie natürliche Sprache in formale übersetzen können, wie sie Fachbegriffe anwenden und einfache mathematische Beziehungen darstellen können. Natürlich sollten auch verschiedene Lösungswege gegenübergestellt und kommentiert werden.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** wäre es möglich, die Anzahl der natürlichen Zahlen in der Aufgabe auf zwei zu begrenzen, den Betrag der Summe auf einen überschaubaren Wert zu ändern und/oder die Beziehungen der Zahlen zu einander zu vereinfachen.
Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** könnte man die Anzahl der Summanden und/oder die damit verbundenen Bedingungen (wie die Operation) ändern.
Aufgabenbeispiele:
- Das Produkt zweier natürlicher Zahlen beträgt 65. Die zweite Zahl ist um 8 größer als die erste Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen? (AB II)
- Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 105. Die Differenz zwischen der größten und der mittleren Zahl sowie zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl ist gleich. Wie heißen diese drei Zahlen? (ABII)
- Bilde eine ähnliche Aufgabe zum Produkt dreier Zahlen mit einer zusätzlichen Bedingung. Es sollen mindestens zwei verschiedene Lösungen für die drei Zahlen entstehen. Beschreibe, wie du vorgegangen bist. (ABIII)

Aufgabe 20

Manuelas Zimmer ist 4,00 m lang, 3,50 m breit und 2,50 m hoch. Eine der beiden großen Wandflächen soll einen gelben Farbanstrich erhalten.

Von der letzten Renovierung ist noch eine halbe Büchse dieser Farbe übrig. Reicht die Menge für den Anstrich der Wand aus? Begründe deine Antwort.

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss drei Aspekte beinhalten:
(1.) die Schlussfolgerung, dass die Farbe reicht,
(2.) die Größe der Wandfläche muss korrekt ermittelt worden sein (10 m²) und
(3.) angeführt werden, dass die Farbe für 10 m² bis 12,5 m² reicht.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen Maßangaben aus dem Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse in Bezug auf die Sachsituation (L2). Die Übersetzung der Situation in mathematische Sprache, die Berechnung mit folgender Interpretation des Ergebnisses ist ein einfacher Modellierungsprozess (K3), bei dem Routine- und Kontrollverfahren durchgeführt werden (K5). Er ist mehrschrittig (AB II), erreicht

aber nicht eine Komplexität, die eine Zuordnung zu AB III rechtfertigen würde.

Ein wahrscheinlich auftretender **Fehler** (Berechnung der größten Fläche zu 14 m²) ist auf die ungenaue Interpretation der Angaben zurückzuführen, ferner ist zu erwarten, dass die Bearbeitung manchmal mit der Berechnung der noch vorhandenen Farbmenge (1,25 ℓ) vorzeitig abgebrochen wird.

Anregungen für den Unterricht

Variationen dieser Aufgabe, auch durch Schülerinnen und Schüler selbst durchgeführt (siehe „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 152 ff), ermöglichen es, den Kontext auszuleuchten und den Realitätsbezug weiter in den Vordergrund zu rücken. Die sich ergebenden Variationen bieten dabei auch Möglichkeiten zur **Binnendifferenzierung**, weil nahezu automatisch leichte und schwierigere Aufgaben entstehen.

Andererseits erfordert der Aufbau und die Erhaltung der bei dieser Aufgabe notwendigen mathematischen Kompetenzen die selbständige Bearbeitung von Aufgaben aus verschiedensten Sachzusammenhängen. So lassen sich bei festgestellten Defiziten Übungen hierzu in anderen Unterrichtseinheiten (z. B. zu quadratischen Zusammenhängen) gut integrieren.

Aufgabe 21

Max möchte sich einen Computer für 1050 € kaufen. Von seiner Oma bekommt er dafür 350 €. Er selbst kann monatlich 140 € sparen.
Mit welcher Gleichung kann Max berechnen, wie viele Monate er sparen muss?
Kreuze an.

☐ A $1050\ € = 140\ € \cdot x$

☐ B $x + 350\ € = 1050\ €$

☐ C $1050\ € - 350\ € = 140\ € \cdot x$

☐ D $140\ € \cdot x - 350\ € = 1050\ €$

☐ E $350\ € \cdot x + 140\ € = 1050\ €$

Lösung (gemäß Kodierung)

C

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen den mathematischen Zusammenhang zwischen Computerpreis, den monatlichen Sparbeträgen und dem Geldgeschenk der Oma herstellen und als Gleichung ausdrücken (K3).
Die gefundene Gleichung ist äquivalent umzuformen, um mit den Antwortangeboten vergleichen zu können (K5). Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich, weil Schülerinnen und Schüler die verbale Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs analysieren und interpretieren, also unter Beachtung der Anfangsbedingungen und des monatlichen Sparbetrages die Anzahl der Monate berechnen.
Die Aufgabe erfordert ein mehrschrittiges Arbeiten, so dass die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erfolgt.

Fehler sind zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen natürlicher Sprache (Text) und der Darstellung in einer Termstruktur nicht oder nur unvollständig herstellen können (Nichtbeachten des Geldgeschenkes bzw. des monatlichen Sparbetrags, falsche Operationszeichen, Vervielfachen - obwohl das Geldgeschenk einmalig ist).

Bei der Zuordnung der gefundenen Gleichung können auch Fehler beim äquivalenten Umformen entstehen.
Hinzu kommt, dass Schülerinnen und Schüler häufig ihre Ergebnisse nicht an den Ausgangsbedingungen überprüfen.

Anregungen für den Unterricht

Für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler ist es empfehlenswert, die Ausgangsbedingungen zu vereinfachen.
Denkbar wäre, vom Geldgeschenk der Oma zunächst abzusehen und nur nach der Anzahl der zu sparenden Monate zu fragen. Gleichung und Probieren führen schnell zum Ziel. Die errechneten Ergebnisse sind an der Sachsituation zu diskutieren.
Schülerinnen und Schüler, bei denen Schwierigkeiten im einfachen mathematischen Modellieren zu vermuten sind, können mit Übungen wie der folgenden gefördert werden:

Anzahl der Karten von Uta: a
Anzahl der Karten von Sven: n

	Auswahl		
Uta hat zwei Karten mehr als Sven.	$a - 2 = n$	$a = n$	$a+2=n$
Uta gibt 2 Karten ab, jetzt hat sie noch 4 Karten. Wie viele Karten hatte sie vorher?	$a - 2 = 4$	$2a = 4$	$a - 2 = n$
Sven hat doppelt so viele Karten wie Uta.	$0{,}5n = a$	$2a = n$	$2n = a$
Sven verdoppelt seine Karten auf 12.	$a = 12n$	$2n = 12$	$a + n = 12$

Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnte man die Bedingungen der Aufgabe komplexer gestalten.

Aufgabe 22

Um von Personen zu überprüfen, ob ihr Körpergewicht im gesundheitlich vertretbaren Bereich liegt, hat man den so genannten „Body Mass Index“ (BMI) eingeführt.
Der BMI berechnet sich aus dem Körpergewicht in Kilogramm dividiert durch das Quadrat der Körpergröße in Metern.
Verkürzt aufgeschrieben:

$$\text{BMI} = \text{Körpergewicht} : \text{Körpergröße}^2.$$

Eine Person hat eine Körpergröße von 175 cm und ein Körpergewicht von 80 kg. Wie groß ist ihr BMI?

Kreuze die richtige Lösung an.

☐ A 19,6

☐ B 24,7

☐ C 26,1

☐ D 29,4

☐ E 34,3

☐ F 35,1

Lösung (gemäß Kodierung)

C (26,1)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Verwendung des Body-Mass-Index zur Einschätzung des Gewichtes ist den Schülerinnen und Schülern wahrscheinlich aus den Medien bekannt. Sie müssen einer einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen (K3).
In die angegebene Rechenvorschrift werden Zahlen eingesetzt und das Ergebnis mit den Vorgaben verglichen. Es handelt sich daher um die Verwendung eines Routineverfahrens (K5). Der Bezug zum Kommunizieren (K6) ist darin zu sehen, dass aus einem kurzen, einfachen, mathematikhaltigen Text Informationen zu entnehmen sind. Die geringe Komplexität erlaubt dabei eine Einordnung in den Arbeitsbereich I.
Fehler könnten bei der Eingabe der Werte in den Taschenrechner auftreten, insbesondere wenn die Körpergröße zuvor nicht in Meter (richtige Kommasetzung) umgerechnet wird.

Anregungen für den Unterricht

Ein sinnvoller Zwischenschritt zur Berechnung des BMI besteht in der Aufstellung des Rechenterms mit Variablen oder Zahlen. Hier kann auch auf die möglichen Fehler bei der Eingabe der Werte und Maßzahlen in den Taschenrechner hingewiesen werden.

Eine Erweiterung und Öffnung der Aufgabe bietet sich am Kontext „Idealgewicht“ sehr gut an. Mögliche Fragen wären beispielsweise:
- Ein 1,90 m großer Mann hat ein Körpergewicht von 97 kg und möchte soweit abnehmen, dass sein BMI nicht über 24 liegt. Wie viel kg muss er mindestens abnehmen? (AB II)
- Ein Model soll einen BMI von unter 20 haben, aber mindestens einen BMI von 17 aufweisen. Welcher Gewichtsbereich bei einer Größe von 1,80 m ist also „erlaubt“? (AB II)

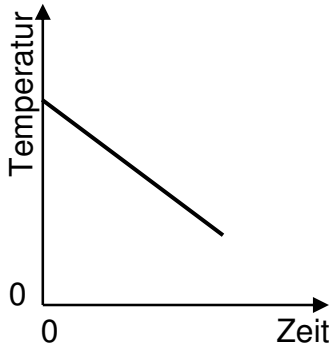
Neben den bereits angesprochenen werden hier Kompetenzen im Bereich des Problemlösens (K2) gefördert, die im Anforderungsbereich II liegen.
Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können in diesem Kontext auch aufgefordert werden, selbst Probleme zu formulieren.

In dem Begriff bzw. der Formel für den BMI steckt auch eine Modellierung (K3), die man zumindest mit guten Schülerinnen und Schülern diskutieren sollte: Idealgewicht und Quadrat der Körpergröße werden hier proportional zueinander gesetzt. Warum Quadrat und nicht nur die Körpergröße oder sogar die dritte Potenz? Offensichtlich sind „ähnliche Menschen“ nicht gleichermaßen „ideal“, sonst müsste man (bei angenommener gleicher mittlerer Körperdichte) die dritte Potenz nehmen. Bei Ähnlichkeit haben große Menschen einen größeren BMI! Warum? Riesen aus Märchen sind z.B. nicht lebensfähig ..... , Zwerge dürfen dick sein! Vielfältige Diskussionen bieten sich an.
Die Behandlung des BMI mit pubertierenden Schülerinnen und Schülern muss mit dem nötigen Feingefühl erfolgen, damit man niemanden verletzt. Die Diskussion sollte sich keinesfalls nur auf mathematische Aspekte beschränken.

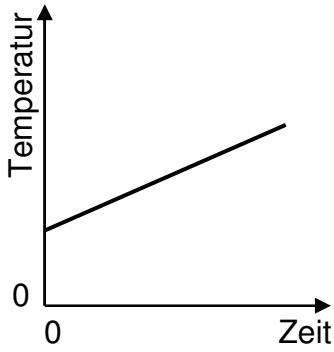
Aufgabe 23

In einem Topf wird Wasser mit Zimmertemperatur gleichmäßig erwärmt.
Welche der drei folgenden Darstellungen beschreibt diesen Vorgang?
Kreuze an.

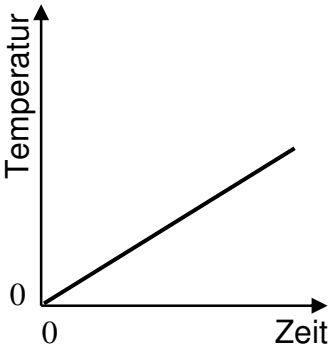
☐ A



☐ B



☐ C



Lösung (gemäß Kodierung)

B

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler sollen einen aus dem Alltag bekannten Vorgang, das Erwärmen von Wasser, mit einer mathematischen Darstellungen (K4) beschreiben bzw. Merkmale einer Darstellung in der entsprechenden Situation prüfen (K3). Dazu müssen sie sich mit gegebenen Graphen auseinandersetzen (L4).
Sie erkennen:
- Beim Diagramm A wird durch den Graphen ein Abkühlvorgang ab einer bestimmten Temperatur beschrieben.
- Der Graph in dem Diagramm C zeigt einen Erwärmungsvorgang, der bei 0°C beginnt.
- Die Darstellung B zeigt den Verlauf eines Graphen, der ebenfalls einen Erwärmungsvorgang darstellt. Die Erwärmung beginnt aber bei einer bestimmten Temperatur über 0°C.

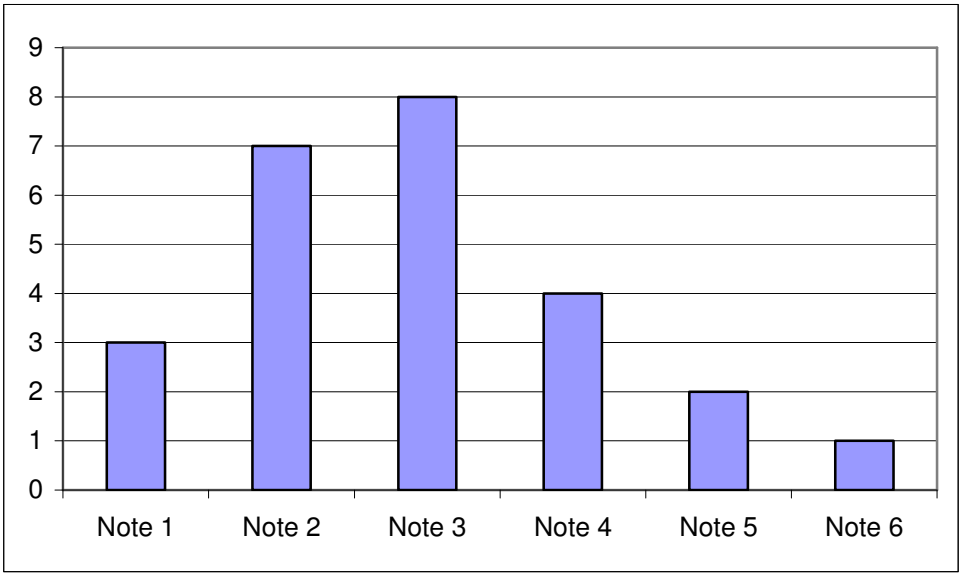
Ein häufiger auftretender **Fehler** besteht darin, die Anfangstemperatur in der Aufgabenstellung zu überlesen und somit die Darstellung C zu wählen.
Man sollte im Unterricht auch diskutieren, wie der Graph aussehen würde, wenn man die Erwärmung des Topfes berücksichtigt.
Um solche Aufgabentypen erfolgreich bearbeiten zu können, müssen entsprechende Darstellungsformen geübt und variiert werden.

Anregungen für den Unterricht

Als Aufgabenvariation bietet sich hier der vielfältige Einsatz von Diagrammen aus dem Alltag an. Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** dürfte ein Weg-Zeit-Diagramm als Einsteig und Vertiefung am besten geeignet sein, da sie hier eigene Erfahrungen einbringen können, wie z.B. den Weg zur Schule per Fuß oder Fahrrad. Mit **leistungsstarken Schülerinnen und Schülern** können Unterbrechungen an Ampeln o. Ä. mit ihren Auswirkungen auf den Verlauf des Graphen diskutiert werden. Auch könnte man in den gegebenen Darstellungen die Koordinatenachsen beschriften und dadurch ermöglichen, dass markante Punkte (Zimmertemperatur, Siedetemperatur) erkannt und interpretiert werden.

Aufgabe 24

Das Diagramm zeigt die Notenverteilung einer Klassenarbeit der Klasse 8a.



Der Lehrer hat sich entschieden, den Notendurchschnitt anzugeben. Welcher Durchschnitt wurde bei dieser Klassenarbeit erreicht?

Lösung (gemäß Kodierung)

2,92

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Gegeben ist die Darstellung der Häufigkeitsverteilung einzelner Noten einer Klasse, aus welcher die Schülerinnen und Schüler den Durchschnitt berechnen sollen (L5).
Sie entnehmen dem Diagramm Informationen (K4, K6), wählen ein mathematisches Werkzeug verständig aus und setzen es ein (K5).
Die Verwendung des arithmetischen Mittels ist den Schülerinnen und Schülern aus verschiedenen Situationen vertraut.
Die vorliegende Mehrschrittigkeit rechtfertigt den Anforderungsbereich II.

Aus mathematischer Sicht ist die Angabe eines Dezimalbruchs für den Durchschnitt von Zensuren problematisch, da diese tatsächlich nur als ganze Zahlen vorkommen. Gleichwohl geben die Zwischenwerte einen Sinn, da sie die Notentendenzen abbilden. Im weiter führenden Unterricht der Stochastik ist auf die korrekte Handhabung und Interpretation von Mittelwertberechnungen Wert zu legen.
Die Problematisierung der Berechnung eines Notendurchschnitts bietet sich in der Klasse 8 für **leistungsstarke Lerngruppen** an.

Fehler könnten beim Ablesen der Häufigkeit einzelner Noten vorkommen, da die Achseneinteilung nicht alle Werte darstellt. Auch die korrekte Eingabe der Summe mit anschließender Division könnte durch fehlende Klammersetzung falsche Werte erzeugen.
Bei Übungen zur Mittelwertberechnung ist dringend auf die schriftliche Darstellung des Rechenterms zu achten, auch um eine **Diagnose** der Fehler zu ermöglichen. Insbesondere in **leistungsschwachen Lerngruppen** sollte darauf Wert gelegt werden, dass alle Arbeitsschritte geklärt und dargestellt werden. Die Berechnung des Terms allein mit Hilfe des Taschenrechners verführt zu einer unreflektierten Eingabe von Werten, so dass bei Fehlern eine Klärung der Defizite nur schwer möglich ist.

Anregungen für den Unterricht

Eine Vertiefung und Öffnung der Aufgabe im Bereich der Leitidee Daten und Zufall ist vielfältig denkbar:
- Wie könnte ein Notendurchschnitt von 2,7 erreicht werden? (AB II)
- Visualisiere die Notenergebnisse der letzten drei Klassenarbeiten in einem Diagramm und vergleiche sie. (AB II)

Zum Anforderungsbereich III - Verallgemeinern und Reflektieren - führen Überlegungen zur Aussagefähigkeit des Noten-Mittelwertes bei Klassenarbeiten. Die Deutung des Mittelwertes – beispielsweise bei extremer Streuung (es kommen nur sehr gute und mangelhafte Noten vor) - weist auf die Notwendigkeit von weiteren Kennwerten hin.
Zudem bietet es sich an, mit Hilfe eines Computerprogramms wie Excel statistischen Fragestellungen nachzugehen und diese auszuwerten. Dies fördert die Kompetenzen im Bereich K5, AB II - mathematische Werkzeuge verständig auswählen und einsetzen.

Aufgabe 25

a) Welche der folgenden 15 Buchstaben sind achsensymmetrisch? Kreise sie ein.

A B C D E F G H I J K L M N O

b) Gib zwei Buchstaben an, die sowohl achsen- als auch punktsymmetrisch sind.

Lösung (gemäß Kodierung)

a) Lösungsmuster A B C D E F G H I J K L M N O

b) Es werden (mindestens) zwei der Buchstaben H, I, O und X genannt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler müssen Eigenschaften dargestellter geometrischer Objekte bezüglich der Achsen- und Punktsymmetrie analysieren und deren Unterschiede erkennen (L3, K4). Sie bearbeiten mit der Aufgabe bekannte Sachverhalte. Voraussetzungen sind vor allem Kenntnisse über Achsen- und Punktsymmetrie sowie über Objekte mit diesen Eigenschaften. Solche sind ihnen meist vertraut, da im Unterricht an diesen geübt wurde (z.B. mit Verkehrszeichen, Landesflaggen, Spielkarten). Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich aus der Mehrschrittigkeit der Prüfung der Symmetrien.
Wahrscheinlich werden im Aufgabenteil a) bei einigen Schülerinnen und Schülern nicht alle achsensymmetrischen Buchstaben eingekreist sein oder auch solche, für die diese Eigenschaft nicht gilt.
Ob hier eine Nachlässigkeit oder Lücken im begrifflichen Verständnis Ursache sind, lässt sich nur bei der Besprechung der Aufgabe ermitteln. Auf jeden Fall sollten die Schülerinnen und Schüler die durch sie erkannte Eigenschaft begründen.
Bei Aufgabe b) werden die meisten Schülerinnen und Schüler nicht das gesamte Alphabet untersuchen und daher den Buchstaben X nicht als Lösung angeben.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** kann die gegebene Aufgabe mit der Textverarbeitung des Computers neu erstellt werden, indem
- die Ziffern 0 bis 9 (bzw. die Buchstaben A bis X) in der gleichen Schriftart betrachtet werden, um den Symmetriebegriff zu klären,
- einige der Buchstaben A bis X in vier bis fünf verschiedenen Schriftarten (wie Arial, Times, Courier) analysiert werden.

Eventuell bietet es sich an, eine Öffnung der Aufgabenstellung vorzunehmen (Entdecken und Analysieren von realen Objekten wie von Fotografien oder Kunstwerken). Auch viele innermathematische Bezüge lassen sich im Koordinatensystem oder in der Viereckfamilie untersuchen. Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** kann dies auf Körpern und Rotationskörper (Flächensymmetrie) ausgedehnt werden. (AB III)

Aufgabe 26

Berechne und gib das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit an.

Ein Auto verbraucht etwa 8 ℓ Benzin je 100 km. Im Tank sind noch etwa 35 ℓ Benzin. Wie weit kann der Fahrer des Autos damit ungefähr noch kommen?

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss die korrekte Hochrechnung auf ca. 437,5 km beinhalten, wobei zusätzliche Relativierungen (Stau etc.) vorgenommen werden können.

Genauigkeit: Circa-Angabe und Runden auf volle km möglich

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Sachsituation vereinfacht als eine proportionale Zuordnung erfassen (K3), die Umrechnung für 35 ℓ als Routineverfahren durchführen (K5) und das Ergebnis sachgerecht angeben (K3). Es sind vertraute und direkt erkennbare Modelle zu nutzen und Routineverfahren zu verwenden (AB I).

Fehlt die Angabe der „genauen“ Lösung, so gibt die geforderte Angabe eines Ergebnisses mit einer sinnvollen Genauigkeit keine Auskunft darüber, wie die Schülerin oder der Schüler vorgegangen ist.
Sind keine zusätzlichen Notizen zum Bearbeitungsweg vorhanden, so sollte man zur **Diagnose** Aufgaben stellen, in denen die beiden Aspekte „Mathematisch modellieren“ und „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ einzeln erkennbar werden. Dies gelingt schon durch Ergänzungen wie „Beschreibe deinen Lösungsweg“.

Anregungen für den Unterricht

Diese enge Testaufgabe bezieht sich nur auf einen kleinen Ausschnitt der zugeordneten Kompetenzen.
Variationen und Öffnungen der Aufgabenstellung sind in vielfältiger Weise möglich und hinreichend bekannt.
Insbesondere sollten aber Ungenauigkeiten und Grenzen der Modellierung (hier: Durchschnittsverbrauch nur bei entsprechenden Randbedingungen, z. B. Geschwindigkeit etc. übertragbar) herausgestellt werden.
Sinnvollerweise werden diese Aspekte nicht isoliert wiederholt, sondern im Rahmen weiterer Modelle (wie quadratische Zusammenhänge) aufgenommen.

Aufgabe 27

„Heute habe ich beim Einkauf 40 € gespart.
Das sind 20% des ursprünglichen Preises“, erzählt Tina.
Wie viel hätte Tina ursprünglich bezahlen müssen?

Lösung (gemäß Kodierung)

200 Euro

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten eine alltagsnahe Problemstellung, indem sie ihre Kenntnisse aus der Prozentrechnung sachgerecht anwenden (L1). Sie müssen dabei eine Lösungsstrategie nutzen (K2) und Lösungs- bzw. Kontrollverfahren ausführen (K5), z. B.: 40 € sind 20% oder 1/5 des ursprünglichen Preises, damit ist das Fünffache der ursprüngliche Preis. Der Anforderungsbereich II ist durch die Mehrschrittigkeit der Aufgabenstellung gegeben.

Zu erwarten sind u.a. folgende **Fehler**:
- Schülerinnen und Schüler arbeiten nur mit den „Zahlensignalen“ ohne den Text vollständig zu erfassen. Sie verwenden z. B. den Betrag von 40 € als Grundwert (z.B. 20% von 40 € sind 8 €, 40 € + 8 € = 48 €).
- Bei dem beschriebenen Sachverhalt liegt es für manche Schülerinnen und Schüler nahe, den Betrag zu berechnen, der noch zu bezahlen ist. Sie lesen die Aufgabe nur oberflächlich und erhalten 160 € als Ergebnis. Diese werden dann „als noch zu zahlender Betrag“ im Antwortsatz aufgenommen, da die Frage gar keine Beachtung mehr findet.

Sicherheit über das Vorgehen von Schülerinnen und Schülern (**Diagnose**) kann sich die Lehrkraft verschaffen, indem diese aufgefordert werden, ihre Lösungswege in schriftlicher oder mündlicher Form zu beschreiben. Zum vollständigen Erfassen der Aufgabe bieten sich verschiedene Maßnahmen an, die bei Kommentierung von Aufgabe 13 exemplarisch benannt sind.

Anregungen für den Unterricht

Auf besondere Sorgfalt beim Lesen einer Aufgabe ist im Unterricht immer wieder Wert zu legen, desgleichen auf das sachgerechte Anwenden von Grundbegriffen der Prozentrechnung (Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert).
Zur **Differenzierung** bieten sich beispielsweise folgende Aufgaben an:
- „Heute habe ich beim Einkauf 20% gespart. Eigentlich sollte ich 200 € bezahlen“, erzählt Tina. Wie viel Euro hat Tina gespart? (AB I) Wie viel musste Tina bezahlen? (AB II)
- „Heute habe ich beim Einkauf nur 80% bezahlt. Eigentlich sollte ich 200 € bezahlen“, erzählt Tina. Wie viel Euro hat Tina gespart? (AB II) Wie viel musste Tina bezahlen? (AB I)
- „Heute habe ich beim Einkauf 160 € bezahlt. Dabei habe ich 20% des eigentlichen Preises gespart“, erzählt Tina. Wie viel hat Tina gespart? (AB II) Wie viel hätte sie ursprünglich bezahlen müssen? (AB II)

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnten aufgefordert werden, ausgehend von einer Initialaufgabe zu einem Thema selbstständig Aufgaben zu finden, zu lösen und Probemöglichkeiten anzuwenden.

Aufgabe 28

Rechne nach, welches gerundete Taschenrechnerergebnis richtig ist.
Kreuze an.

$\frac{27{,}5+8{,}6}{1{,}43}$

33,5	27,8	25,2	165,4	Keines der angegebenen
☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E

Lösung (gemäß Kodierung)

C (25,2)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Lösen dieser Aufgabe müssen Schülerinnen und Schüler den elektronischen Taschenrechner verständig einsetzen (K5) und ihr Ergebnis sinnvoll runden (L1). Es handelt sich um eine geübte Situation, weshalb die Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen ist.

Um zum richtigen Ergebnis zu gelangen, muss den Schülerinnen und Schülern die Eingabe von Zahlen in einen elektronischen Taschenrechner bei Termen, speziell Bruchtermen, wo die Distributivität zu beachten ist (Vorrangregel), geläufig sein. Ansonsten liegt hier eine häufige **Fehlerquelle.** Einige der Schülerinnen und Schüler werden das Ergebnis E ankreuzen, da sie in der Aufgabenstellung nicht erkennen, dass das gerundete Taschenrechnerergebnis gefordert ist. Die Auswahlantworten sind so gewählt, dass häufige Fehlvorstellungen aufgegriffen werden, wie:

$27{,}5+\frac{8{,}6}{1{,}43}\approx 33{,}5$ oder $\frac{27{,}5}{1{,}43}+8{,}6\approx 27{,}8$ oder $\frac{27{,}5\cdot 8{,}6}{1{,}43}\approx 165{,}4.$

Gerade bei Eingaben in den Taschenrechner ist ein bewusstes Ausführen der Reihenfolge der Rechenschritte eine notwendige Voraussetzung vor dem Auslösung der Berechnung.

Anregungen für den Unterricht

Berechnungen dieser Art kommen in den späteren Jahrgangsstufen immer wieder vor und sollten mit hoher Sicherheit ausgeführt werden können. Es ist daher nötig, diese Aufgabenformen immer wieder aufzugreifen und zu üben. Dabei sollte auch der Überschlag beachtet werden.
Es bietet sich hier ein breites Spektrum von Aufgabenvariationen an, wie:
$\frac{1,43}{27,5+8,6}$ oder $\frac{27,5 \cdot 8,6}{27,5+8,6}$.
Bei **leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern** empfiehlt sich, die Aufgabenbeispiele zu vereinfachen, indem nur ganze Zahlen in den Brüchen verwendet werden, wie $\frac{28+19}{4}$. Des Weiteren wäre es sinnvoll, dass bei solchen Berechnungen mit dem elektronischen Taschenrechner die Aufgabenstellung in der Notation für den elektronischen Taschenrechner zuerst auf Papier geschrieben wird: $(28+19) \div 4$. Dadurch kann ohne Rechner schon überprüft werden, wo eventuell Fehler auftreten können.

Aufgabe 29

Corinna und Sebastian haben die Ergebnisse einer Verkehrszählung in einer Tabelle zusammengestellt:

PKW	LKW	Busse	Motorräder
50%	26%	8%	16%

Corinna wird nach Schulschluss von ihrer Freundin nach der Anzahl der jeweils gezählten Fahrzeuge gefragt. Da Sebastian die Strichliste mit nach Hause genommen hat, versucht Corinna sich zu erinnern. Sie weiß genau, dass sie 13 LKW gezählt haben.
Berechne aus der Tabelle und Corinnas Aussage, wie viele Motorräder gezählt wurden.

Lösung (gemäß Kodierung)

8

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen den Text und die eingebundene Tabelle verstehend lesen (K6). Damit verbunden ist das Eindenken in die reale Situation, also Modellierungsfähigkeit (K3). Mathematisch geht es um die Vertrautheit mit Prozentsätzen (Anteilen) und die Fähigkeit, mit linearen Zusammenhängen umzugehen. Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe durch Nutzung proportionaler Zuordnungen oder mit Hilfe der Prozentrechnung lösen. Dies erfordert, den Begriff der Proportionalität bzw. Begriffe der Prozentrechnung sachgerecht zu verwenden und Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen zu nutzen (L1) sowie Lösungsverfahren auszuführen (K5). Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten bekannte Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten entsprechend der Situation verknüpft werden. Die Bearbeitung erfordert mehrere Schritte (AB II), ohne das eine Verallgemeinerung oder vertiefende Reflexion notwendig ist.

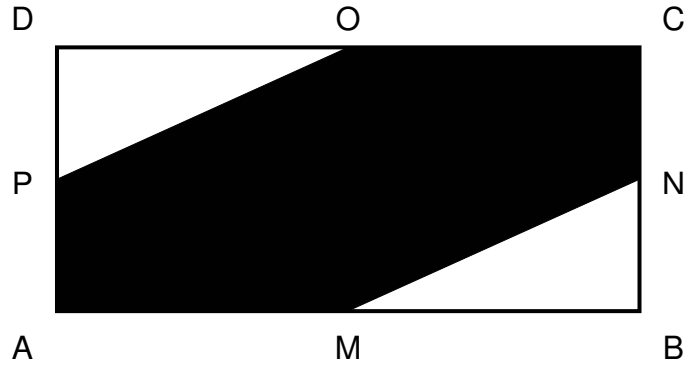
Fehler können u. a. durch eine falsche Verknüpfung von Text und Tabelle, insbesondere über einen „verdrehten“ Ansatz (z.B. 13 als Grundwert) auftreten.
Zur **Diagnose** können weiterhin Grundkenntnisse der Proportionalität und Prozentrechnung auf diesbezügliche Lücken überprüft werden. Es sollte auch festgestellt werden (ggf. durch Vorrechnen, Erklären, Begründen), ob notwendige Kenntnisse und Fähigkeiten ausreichend gefestigt bzw. verknüpft sind.
Darüber hinaus können Übungen zum Zusammenhang von Bruch-, Dezimalbruch- und Prozentangaben erfolgen. Diese kann man mit Kärtchen oder Tabellen durchführen, wobei hier abwechselnd zwei der drei Spalten abzudecken sind.
Beispiele: 3/100 – 0,03 – 3%,
4/5 – 0,8 – 80%,
$1/3 – 0,\overline{3} – 33,\overline{3}\,\%$,
5/4 – 1,25 – 125%

Anregungen für den Unterricht

Aus der gegebenen Aufgabe können zur **Differenzierung** weitere Aufgaben bezüglich der Prozentrechnung entwickelt werden, wie:
- Ausgehend von den gegebenen Werten in der Tabelle wird die Gesamtzahl aller Fahrzeuge (Grundwert) vorgegeben. Die Anzahl der einzelnen angegebenen Verkehrsmittel ist zu berechnen (AB I).
- Unter Beibehaltung der gegebenen Werte in der Tabelle wird eine „einfache“ Zahl für die Anzahl der Pkw (für 50%) vorgegeben. Die übrigen Anzahlen sind zu berechnen (AB I).
- Bei anderen Prozentsätzen und Prozentwerten (z. B. 12,5%, 97 Fahrzeuge, andere Tabellenspalte) kann eine analoge Aufgabe gestellt werden (AB II).
- Eine analoge Aufgabe mit Vorgabe eines Diagramms statt einer Tabelle wird gestellt (AB II, ggf. auch K4).
- Eine weitere analoge Aufgabe entsteht, wenn die Werte in der Tabelle als Prozentzahl, gemeiner Bruch und/oder Dezimalzahl gegeben werden (AB II).
- Ähnliche Aufgabenstellungen bieten sich mit anderen Sachverhalten (z. B. Länge des Schulweges, Anzahl der Schülerinnen und Schüler einer Schule pro Klassenstufe, ...) an (AB II).
- Als Säulendiagramm wird die Lösungshäufigkeit einer Aufgabe in Prozent jeweils für Aufgabe 1, 2, 3 und 4 vorgeben, und zwar für Schulteil A (120 Schülerinnen und Schüler) und Schulteil B (180 Schülerinnen und Schüler). Es ist ein Diagramm für die gesamte Schule zu erstellen (AB III).

Aufgabe 30

Gegeben ist ein Rechteck ABCD. Die Punkte M, N, O und P sind Mittelpunkte der Rechteckseiten.



Welcher Anteil der gesamten Rechteckfläche ist dunkel?

Lösung (gemäß Kodierung)

$\frac{3}{4}$ (Äquivalente: zulässig)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen anhand der gegebenen Zeichnung (K4) einen Lösungsweg entwickeln; in der Regel verwenden sie hierzu die Strategie „Zeichnen von Hilfslinien“ (K2) (vgl. auch“ Bildungsstandards Mathematik: konkret“, Teil I, Kapitel 2.2).
Die Schülerinnen und Schüler bauen dabei auf ihren Erfahrungen zur Flächenberechnung durch Flächenzerlegung auf und beziehen ggf. auch Symmetriebetrachtungen mit ein.

Abgesehen von Defiziten in diesen grundlegenden Voraussetzungen können auch **Fehler** bei der Anteilsbildung auftreten.
Da eine Beschreibung des Lösungsweges hier nicht verlangt ist, ist eine Analyse der Schülerfehler anhand der Testbearbeitung nur möglich, wenn die Schülerinnen und Schüler von sich aus einen Lösungsweg dokumentieren. Anderenfalls kann eine **Fehlerdiagnose** erst im Unterricht erfolgen.

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht kann eine Öffnung der Aufgabe in Richtung mathematisches Kommunizieren (K6) erfolgen, indem eine Beschreibung oder Erklärung des Lösungswegs gefordert wird, wie es ja auch in Leistungserhebungen meist der Fall sein wird. Dies erleichtert Fehleranalyse und **Diagnose**.

Bei festgestellten Defiziten kann nicht nur durch eine direkte Wiederholung reagiert werden, sondern auch im Rahmen einer Vernetzung bei verwandten Themen: Andere Figuren bzw. auch andere Körper ermöglichen ähnliche Fragestellungen. Es bietet sich an, entsprechende Fragestellungen auch von Schülerinnen und Schülern selbst erfinden zu lassen (völlig frei, oder mit vorgegebenem Flächenanteil), was insbesondere eine **innere Differenzierung** ermöglicht.

Grundsätzlich können die beiden in obiger Aufgabe auftretenden Anforderungsfelder „Flächenzerlegung“ und „Anteile“ auch getrennt vertieft werden, was insbesondere **leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern** entgegenkommt.