Material zur Weiterarbeit
zur
Vergleichsarbeit im Fach Mathematik im Schuljahrgang 8

Adressaten des Materials
Standardorientierte Tests, wie der, zu dem das vorliegende Material erarbeitet wurde, zielen zwar auch auf die Leistungserhebung für eine Klasse, sie dienen vor allem aber dazu, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu identifizieren. Daher richtet sich das vorliegende Material mit dieser Zielstellung an die einzelne Lehrkraft, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie im Weiteren an Fachkonferenzen oder andere innerschulische Gruppen.

Aufbau des Materials
Im vorliegenden Material ist jede Aufgabe des Testhefts kommentiert. Umfang und Tiefe der Kommentierung richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zusätzlich am rechten Rand ersichtlich.
Eine Kommentierung zu einer Aufgabe schließt folgende Teile ein:

- Ausweisen der Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik[1],
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler,
- Anregungen für den Unterricht.

An verschiedenen Stellen werden Bezüge zur Veröffentlichung des IQB[2] „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ hergestellt, da hier für den Sekundarbereich I u. a. eine große Zahl von Aufgaben mit ausgewiesenem Standardbezug und Unterrichtsanregungen gegeben werden.

Bezug des Materials zu den Nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik
Das Testheft, auf das sich die Aufgabenkommentierungen beziehen, ist erstmals im Verbund mehrerer Länder entwickelt worden. Deshalb musste die Erprobung der Aufgaben durch die Pilotierung in allen beteiligten Länden auch der Feststellung dienen, welches Aufgabenniveau für den gemeinsamen Test bei der Auswahl der Aufgaben möglich ist. Diese Erkenntnisse haben die Zusammenstellung des Testheftes wesentlich beeinflusst, so dass es insbesondere auch bei der durch die kurze Entwicklungszeit beschränkten Aufgabenmenge nicht gelingen konnte, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben für das Testheft nur die „hinführende“ Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf mathematisch interessantere verzichtet werden. Die Kommentierungen im vorliegenden Materials haben nun ermöglicht, diese Teilaufgaben aufzugreifen und weitere Variationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung des Materials
Für einen Mathematikunterricht, der zur Förderung und Weiterentwicklung mathematischer Kompetenzen beitragen soll und in dessen Zentrum auch über längere Zeiträume hinweg der Aufbau dieser Kompetenzen steht, muss die Lehrkraft u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential für dieses Ziel in jeder einzelnen Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann.
Im vorliegenden Material wird daher für jede Aufgabe die Zuordnung der Standardmerkmale (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen kann deutlich gemacht werden, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zur

[1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. In: www.kmk.org/schul/home/htm.
[2] Werner Blum/Christina Drüke-Noe/Ralph Hartung/Olaf Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006

mathematischen Kompetenz bestimmt. Dabei wird die Aufmerksamkeit der Lehrkraft auf diejenigen Überlegungen gelenkt, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können. Betrachtet werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Testaufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und zu erwartende häufige Fehler sowie Möglichkeiten zur Diagnose. Dies soll die Lehrkraft auch in ihrer Individualdiagnose unterstützen und helfen, Ansätze zur individuellen Förderung aufzudecken.
Darauf aufbauend wird für jede Aufgabe vorgeschlagen, wie diese verändert oder variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Solche Anregungen beinhalten die Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, den Umgang mit verschiedenen Lösungen, eine Diskussion zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts, den Einsatz von Aufgabenvariationen u. a. m. Dabei wird auch deutlich, wie sich Testaufgaben und Unterrichtsaufgaben bzw. Aufgaben für Lernstandserhebungen in der eigenen Klasse unterscheiden können.

Hinweise der Nutzer und für die Nutzer
Hinweise zur Weiterentwicklung des Materials, zur gewählten Präsentationsform sowie zu wichtigen Ergänzungen können an das Niedersächsische Kultusministerium gerichtet werden. Weitere Informationen finden Sie unter http://cuvo.nibis.de .

Kommentierungen

Aufgabe 1

Der Nettopreis (Preis ohne Mehrwertsteuer) für einen Liter Superbenzin setzte sich im Juli 2003 wie folgt zusammen:

Einkaufs- und Herstellungskosten	19,9 Cent
Mineralölsteuer	65,5 Cent
Gewinn für den Tankstellenbesitzer	8,5 Cent

Berechne den Nettopreis für einen Liter Superbenzin.

Lösung (gemäß Kodierung)

93,9 Cent

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten einen Sachzusammenhang, in dem wesentliche Angaben mit Hilfe von Dezimalbrüchen erfolgen (L1). Sie wenden zum Lösen ein Routineverfahren (schriftliche Addition) an und nutzen gegebenenfalls den Taschenrechner (K5, AB I).

Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabenstellung müssen die Schülerinnen und Schüler lediglich die Grundrechenoperation der Addition beherrschen. Ursachen für auftretende **Fehler** können im Erfassen des Kontextes der Aufgabe oder im Rechen liegen. Letztere können durch Fehler im stellengerechten Untereinanderschreiben der Zahlen bzw. durch Nichtbeachten von Überträgen entstehen. Eine **Diagnose** erfordert in jedem Fall die Darstellung des Lösungsweges.

Anregungen für den Unterricht

In der vorliegenden Aufgabe ist innerhalb eines realen Kontextes die Addition von drei Dezimalzahlen gefordert. Die Aufgabe lässt sich zur **Differenzierung** hinsichtlich der Anforderungsbereiche variieren, in dem sie beispielsweise mit veränderten Zahlen zu lösen ist, in eine Subtraktionsaufgabe umgewandelt oder die Komplexität erhöht wird.

Aufgabenbeispiele:
- Die Einkaufs- und Herstellungskosten sanken im August um 3,5 Cent.
Berechne den neuen Nettopreis für August 2003. (AB I)

- Im September 2003 betrug der Nettopreis für einen Liter Superbenzin 98,9 Cent. Dieser Nettopreis enthält Einkaufs- und Herstellungskosten in Höhe von 19,9 Cent und die Mineralölsteuer in Höhe von 65,5 Cent.
Welchen Gewinn erzielte der Tankstellenbesitzer pro Liter Superbenzin? (AB II)
- Ein Tankstellenbesitzer verkauft in einer Stunde etwa 1200 Liter Superbenzin. Der Nettopreis für einen Liter Superbenzin enthält Einkaufs- und Herstellungskosten in Höhe von 19,9 Cent und die Mineralölsteuer in Höhe von 65,5 Cent.
Zu welchem Nettopreis muss der Tankstellenbesitzer einen Liter Superbenzin mindestens verkaufen, wenn er pro Stunde 100 € Gewinn erzielen möchte? (AB III)

Außerdem sollten Übungen zum schriftlichen Rechnen mit Dezimalbrüchen gelegentlich auch ohne den Taschenrechner bearbeitet werden.

Aufgabe 2a

Kreuze jeweils an, ob die angegebene Zahl x Lösung der Gleichung ist oder nicht.

Gleichung	Lösung	ja	nein
$6x - 3 + 15 = 8$	$x = 4$		

Lösung (gemäß Kodierung)

nein

Aufgabe 2a

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich aus dem Bezug zum Lösen von Gleichungen (L4). Das Verwenden von Routineverfahren im Umgang mit linearen Gleichungen impliziert den Anforderungsbereich I in der allgemeinen mathematischen Kompetenz K5.
Zur Lösung der Aufgabe wäre eigentlich ein sicherer Umgang mit den Grundrechenarten ausreichend, denn durch das Einsetzen des Lösungswertes für x können Schülerinnen und Schüler überprüfen, ob sich eine wahre Aussage ergibt und damit die angegebene Lösung richtig (ja) oder falsch (nein) ist.
Möglich ist allerdings auch, dass Schülerinnen und Schüler die Gleichung selbst lösen. Bei einem solchen Vorgehen entstehen ganz andere Anforderungen und auch andere **Fehlerquellen** als beim Ausführen der Probe. Da das Aufgabenformat keine **Diagnose** bezüglich des gewählten Vorgehens erlaubt, sollte hier im Unterricht eine entsprechende Aufarbeitung erfolgen.
Das Aufgabenformat verführt insbesondere auch zu einer Überschätzung der Schülerleistungen, da die Ratewahrscheinlichkeit nicht zu vernachlässigen ist und häufige Schülerfehler auch zur richtigen Antwort "nein" führen.
So könnte von Schülerinnen und Schülern $6 \cdot 4 - 3 + 15 = 8$ wie folgt aufgelöst werden: $6 \cdot 1 + 15 = 8$.

Anregungen für den Unterricht

Eine Analyse im Unterricht sollte zunächst einen ausführlichen Rechenweg einfordern. Je nach festgestellten Defiziten können Vorteile des Einsetzverfahrens (Probe) im Vergleich zum Lösen der Gleichung sowie typische Rechenfehler besprochen werden. Das Aufschreiben des Rechenwegs, das gerade **leistungsschwache Schülerinnen und Schülern** gerne vermeiden, erweist sich gerade für sie als hilfreich.
Bei festgestellten Defiziten im Bereich der Rechenfertigkeiten oder beim Auflösen von Gleichungen bietet es sich an, die Anforderungen schrittweise zu steigern. Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** vgl. Ausführungen zur Teilaufgabe b.

Aufgabe 2b

Kreuze jeweils an, ob die angegebene Zahl x Lösung der Gleichung ist oder nicht.

Gleichung	Lösung	ja	nein
$-2(6x + 24) = 8(1 + x) + 44$	$x = 1$		

Lösung (gemäß Kodierung)

nein

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich wiederum aus dem Bezug zu Gleichungen. Das Verwenden von Routineverfahren im Umgang mit linearen Gleichungen impliziert wie in der Teilaufgabe a die allgemeine mathematische Kompetenz K5. Aufgrund der komplexeren Gleichung kann diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** bieten sich weitere Aufgaben an, z.B. $-2(6x+24)=8(1+x)+44x$ bzw. $44=(1+x)8-2(6x+24)$ oder $\frac{8}{2(x+6)}=\frac{1}{2}$. Hierzu kann die Lehrkraft entscheiden lassen, ob eine vorgegebene Zahl Lösung der betreffenden Gleichung ist oder nicht und eine Begründung dazu fordern.

Aufgabe 2b

Aufgabe 2b

Aufgabe 3

Gib an, ob die folgende Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:

„Wenn ich zur Zahl 5 eine Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 5."

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Aussage ist falsch. Zur Begründung muss auf negative Zahlen oder die Zahl 0 verwiesen werden bzw. in einer Beispielrechnung Bezug genommen werden.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen Sinn tragende Vorstellungen von rationalen, insbesondere von ganzen Zahlen besitzen, die Operation Addition und die Relation „größer als" sicher anwenden können (L1).
Sie müssen Zusammenhänge erkennen und eine überschaubare Argumentation (Gegenbeispiel) entwickeln können (K1).
Diese ist nicht trivial und verdient die Zuordnung zum Anforderungsbereich II.

Folgende **Fehler** sind vermutlich häufig zu erwarten:
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig, da Addieren für sie mit Vergrößern (Vermehren) gleichbedeutend ist.
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig und führen ein Beispiel (wie $5 + 1 > 5$) als Begründung an. Hier sind falsche Vorstellungen darüber zu vermuten, was erforderlich ist, um die Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit einer Allaussage zu begründen.
Ein häufig vorkommender Schülerfehler kann auch in der Vorstellung bestehen, dass eine Zahl a immer positiv und eine Zahl – a immer negativ ist.
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig, da sie vermutlich die natürlichen Zahlen als Grundbereich voraussetzen, aber die Zahl Null nicht berücksichtigen. Die Eigenschaft der Null, neutrales Element bezüglich der Addition zu sein, wird vermutlich nicht herangezogen.
(Vgl. „Bildungsstandards Mathematik: konkret" zur Analyse von Fehlvorstellungen, S. 111 ff.)

Aufgabe 3

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht sollten die verschiedenen Bedeutungen des Minuszeichens in der Menge der ganzen bzw. rationalen Zahlen thematisiert werden:
- als Operationszeichen zum Ausdrücken einer Differenz a – b, wie 4 – 2 = 2, 2 – 4 = - 2, 0 – 3 = - 3,
- als Vorzeichen zum Bezeichnen der zu a entgegengesetzten Zahl – a, wie 3 ist zu – 3 oder – 4 ist zu 4 entgegengesetzt.

Da in der gegebenen Aufgabenstellung kein Variablengrundbereich festgelegt ist, sollte im Unterricht auch gezielt auf mögliche Zahlenbereiche eingegangen werden.

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** ist die folgende Aufgabe geeignet, um die Bedeutung der Zahl 0 im Bereich der natürlichen Zahlen bewusst zu machen.
„Gib an, ob die Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:
Wenn ich zur Zahl 5 eine natürliche Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 5.“
Speziell zur Arbeit mit negativen Zahlen, aber auch wiederum zur Eigenschaft der Zahl Null bietet sich die folgende Aufgabe an.
„Gib an, ob die Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:
Wenn ich zur Zahl 0 eine ganze bzw. (rationale) Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 0.“
Schließlich muss inhaltlich verstanden werden, dass es für das Widerlegen einer Allaussage genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben.

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnten aufgefordert werden, selbst Behauptungen bezüglich der Multiplikation oder der Division aufzustellen und diese zu prüfen.

Aufgabe 4a

Welche ganze Zahl musst du zu – 4 addieren, um 2 zu erhalten?

Lösung (gemäß Kodierung)

6

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe sind elementare Kenntnisse im Umgang mit ganzen Zahlen direkt anzuwenden (L1, K5, ABI).
Das gewählte Zahlenmaterial erlaubt eine Lösung „im Kopf“, ggf. auch ein systematisches Probieren; ein formalerer Ansatz führt zu einer elementaren linearen Gleichung.

Anregungen für den Unterricht

vgl. Ausführungen zur Teilaufgabe b

Aufgabe 4a

Aufgabe 4b

Welche ganze Zahl musst du von – 4 subtrahieren, um 2 zu erhalten?

Lösung (gemäß Kodierung)

- 6

Aufgabe 4b

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe sind elementare Kenntnisse im Umgang mit ganzen Zahlen direkt anzuwenden (L1, K5, ABI).
Das gewählte Zahlenmaterial erlaubt eine Lösung „im Kopf“, ggf. auch durch systematisches Probieren; ein formalerer Ansatz führt zu einer elementaren linearen Gleichung.
Die Aufgabe entspricht in ihrer Struktur und Klassifizierung Teilaufgabe a; gleichwohl fällt sie den Schülerinnen und Schülern deutlich schwerer.
Das Subtrahieren einer negativen Zahl bleibt für **leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler** oft unnatürlich und unanschaulich. Zu erwartende **Falschantworten** sind (trotz oder gerade wegen der vorgeschalteten Teilaufgabe a) das Ergebnis „6“ oder die Antwort „geht nicht“.

Anregungen für den Unterricht

Bringt die Fehleranalyse die Erkenntnis, dass Schülerinnen und Schüler in der Tat Probleme hinsichtlich der Vorstellung „Subtraktion einer negativen Zahl“ haben, ist eine Art „Überzeugungsarbeit“ zu leisten. Kurze formale Argumentationen bringen bei tief verwurzelten Fehlvorstellungen kaum langfristigen Lernerfolg. Zudem laufen Merkhilfen wie „Minus minus gibt plus“ bei der vorliegenden Aufgabe ins Leere, wenn die Situation gar nicht erst mit der Merkhilfe in Verbindung gebracht wird.

Ein erster Schritt kann es sein, auf die Bedeutung einer „Probe“ hinzuweisen, und diese (sowohl mit dem richtigen Ergebnis als auch mit falschen Ergebnissen) durchzuführen:

$-4-6=-10$, aber $-4-(-6)=-4+6=2$

Der jetzt wirklich sichtbar gewordene Schritt $-(-6)$ kann dann durch die gängigen Anwendungsbeispiele (Schulden u. Ä.) und durch Arbeiten an der Zahlengerade veranschaulicht werden.

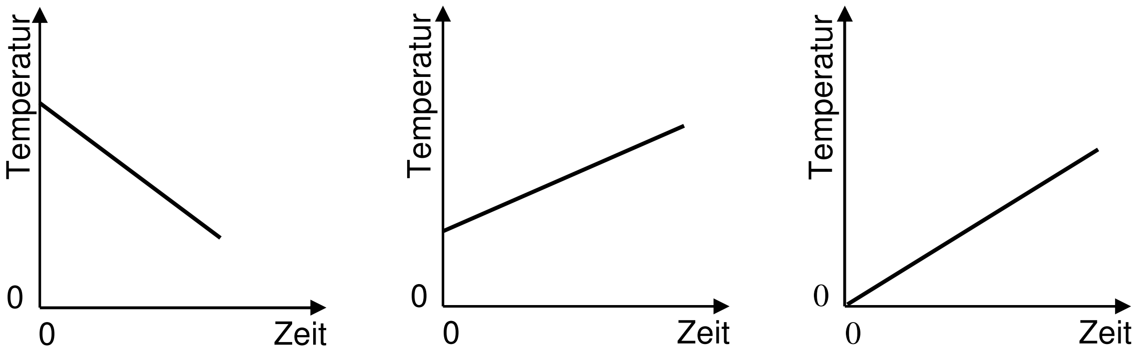
Das explizite Aufstellen einer Gleichung sollte gerade bei **leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern** eingefordert werden: Der Ansatz ist elementar, kann vor leichtsinnigen Lösungsvermutungen bewahren und führt auf die Probe als Lösungskontrolle hin.

Die gewonnenen Erkenntnisse können im laufenden Unterricht durch gelegentlich eingestreute kleine Aufgaben ähnlicher Art wach gehalten werden. Dabei bietet es sich an, zur Abgrenzung auch andere Fehlvorstellungen in grundlegenden Rechenarten mit aufzugreifen:
- Aufgabe 3 aus diesem Test
- Multiplikation mit bzw. Division durch einen echten Bruch
- „Die Wurzel aus einer Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst.“ u. Ä.

Aufgabe 5

In einem Topf wird Wasser mit Zimmertemperatur gleichmäßig erwärmt.
Welche der drei folgenden Darstellungen beschreibt diesen Vorgang?
Kreuze an.

☐ A ☐ B ☐ C



Lösung (gemäß Kodierung)

B

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler sollen einen aus dem Alltag bekannten Vorgang, das Erwärmen von Wasser, mit einer mathematischen Darstellungen (K4) beschreiben bzw. Merkmale einer Darstellung in der entsprechenden Situation prüfen (K3). Dazu müssen sie sich mit gegebenen Graphen auseinandersetzen (L4).

Sie erkennen:
- Beim Diagramm A wird durch den Graphen ein Abkühlvorgang ab einer bestimmten Temperatur beschrieben.
- Der Graph in dem Diagramm C zeigt einen Erwärmungsvorgang, der bei 0°C beginnt.
- Die Darstellung B zeigt den Verlauf eines Graphen, der ebenfalls einen Erwärmungsvorgang darstellt. Die Erwärmung beginnt aber bei einer bestimmten Temperatur über 0°C.

Ein häufiger auftretender **Fehler** besteht darin, die Anfangstemperatur in der Aufgabenstellung zu überlesen und somit die Darstellung C zu wählen.
Man sollte im Unterricht auch diskutieren, wie der Graph aussehen würde, wenn man die Erwärmung des Topfes berücksichtigt.
Um solche Aufgabentypen erfolgreich bearbeiten zu können, müssen entsprechende Darstellungsformen geübt und variiert werden.

Anregungen für den Unterricht

Als Aufgabenvariation bietet sich hier der vielfältige Einsatz von Diagrammen aus dem Alltag an. Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** dürfte ein Weg-Zeit-Diagramm als Einsteig und Vertiefung am besten geeignet sein, da sie hier eigene Erfahrungen einbringen können, wie z.B. den Weg zur Schule per Fuß oder Fahrrad. Mit **leistungsstarken Schülerinnen und Schülern** können Unterbrechungen an Ampeln o. Ä. mit ihren Auswirkungen auf den Verlauf des Graphen diskutiert werden. Auch könnte man in den gegebenen Darstellungen die Koordinatenachsen beschriften und dadurch ermöglichen, dass markante Punkte (Zimmertemperatur, Siedetemperatur) erkannt und interpretiert werden.

Aufgabe 6

Um von Personen zu überprüfen, ob ihr Körpergewicht im gesundheitlich vertretbaren Bereich liegt, hat man den so genannten „Body Mass Index" (BMI) eingeführt.
Der BMI berechnet sich aus dem Körpergewicht in Kilogramm dividiert durch das Quadrat der Körpergröße in Metern.
Verkürzt aufgeschrieben:

$$\text{BMI} = \text{Körpergewicht} : \text{Körpergröße}^2.$$

Eine Person hat eine Körpergröße von 175 cm und ein Körpergewicht von 80 kg. Wie groß ist ihr BMI?

Kreuze die richtige Lösung an.

☐ A 19,6

☐ B 24,7

☐ C 26,1

☐ D 29,4

☐ E 34,3

☐ F 35,1

Lösung (gemäß Kodierung)

C (26,1)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Aufgabe 6

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Verwendung des Body-Mass-Index zur Einschätzung des Gewichtes ist den Schülerinnen und Schülern wahrscheinlich aus den Medien bekannt. Sie müssen einer einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen (K3).
In die angegebene Rechenvorschrift werden Zahlen eingesetzt und das Ergebnis mit den Vorgaben verglichen. Es handelt sich daher um die Verwendung eines Routineverfahrens (K5). Der Bezug zum Kommunizieren (K6) ist darin zu sehen, dass aus einem kurzen, einfachen, mathematikhaltigen Text Informationen zu entnehmen sind. Die geringe Komplexität erlaubt dabei eine Einordnung in den Arbeitsbereich I.
Fehler könnten bei der Eingabe der Werte in den Taschenrechner auftreten, insbesondere wenn die Körpergröße zuvor nicht in Meter (richtige Kommasetzung) umgerechnet wird.

Anregungen für den Unterricht

Ein sinnvoller Zwischenschritt zur Berechnung des BMI besteht in der Aufstellung des Rechenterms mit Variablen oder Zahlen. Hier kann auch auf die möglichen Fehler bei der Eingabe der Werte und Maßzahlen in den Taschenrechner hingewiesen werden.

Eine Erweiterung und Öffnung der Aufgabe bietet sich am Kontext „Idealgewicht“ sehr gut an. Mögliche Fragen wären beispielsweise:
- Ein 1,90 m großer Mann hat ein Körpergewicht von 97 kg und möchte soweit abnehmen, dass sein BMI nicht über 24 liegt. Wie viel kg muss er mindestens abnehmen? (AB II)
- Ein Model soll einen BMI von unter 20 haben, aber mindestens einen BMI von 17 aufweisen. Welcher Gewichtsbereich bei einer Größe von 1,80 m ist also „erlaubt“? (AB II)

Neben den bereits angesprochenen werden hier Kompetenzen im Bereich des Problemlösens (K2) gefördert, die im Anforderungsbereich II liegen.
Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können in diesem Kontext auch aufgefordert werden, selbst Probleme zu formulieren.

In dem Begriff bzw. der Formel für den BMI steckt auch eine Modellierung (K3), die man zumindest mit guten Schülerinnen und Schülern diskutieren sollte: Idealgewicht und Quadrat der Körpergröße werden hier proportional zueinander gesetzt. Warum Quadrat und nicht nur die Körpergröße oder sogar die dritte Potenz? Offensichtlich sind „ähnliche Menschen“ nicht gleichermaßen „ideal“, sonst müsste man (bei angenommener gleicher mittlerer Körperdichte) die dritte Potenz nehmen. Bei Ähnlichkeit haben große Menschen einen größeren BMI! Warum? Riesen aus Märchen sind z.B. nicht lebensfähig ..... , Zwerge dürfen dick sein! Vielfältige Diskussionen bieten sich an.
Die Behandlung des BMI mit pubertierenden Schülerinnen und Schülern muss mit dem nötigen Feingefühl erfolgen, damit man niemanden verletzt. Die Diskussion sollte sich keinesfalls nur auf mathematische Aspekte beschränken.

Aufgabe 7

Setze das passende Zeichen ein.

		kleiner als < gleich = größer als >	
a)	Höhe einer Zimmertür		200 mm
b)	Alter eines Schülers		1500 Tage
c)	Masse eines Fahrrades		$\frac{1}{2}$ t
d)	Fläche deines Klassenzimmers		$\frac{1}{4}$ ha
e)	Fassungsvermögen eines Wassereimers		1000 mℓ

Lösung (gemäß Kodierung)

a) Höhe einer Zimmertür > 200 mm
b) Alter eines Schülers > 1500 Tage
c) Masse eines Fahrrades < $\frac{1}{2}$ t
d) Fläche deines Klassenzimmers < $\frac{1}{4}$ ha
e) Fassungsvermögen eines Wassereimers > 1000 ml

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten und wählen dazu Einheiten von Größen, insbesondere für Zeit, Masse, Länge, Fläche, und Volumen situationsgerecht aus (L2).
Dabei werden einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler mathematische Objekte zugeordnet (K3). Es ist jeweils ein Umrechnen der Maßeinheit notwendig (K5). Damit ist die Aufgabe mehrschrittig und bedingt Anforderungsbereich II.

Aufgabe 7

Eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert bei Schülerinnen und Schülern differenzierte Fähigkeiten in der Arbeit mit Längen, Zeiten, Massen, Flächen- und Rauminhalten.
Dazu gehört:
- das Verbinden von Größenangaben mit sinnvollen Vorstellungen von Repräsentanten und
- das Umrechnen von Größenangaben in Angaben mit für den jeweiligen Sachverhalt geeignete Maßeinheiten.

Fehler können vermutlich wie folgt erklärt werden:
- Die Schülerinnen und Schüler verbinden mit den gegebenen realen Gegenständen bzw. Sachverhalten keine konkreten Größenvorstellungen.
- Sie haben Schwierigkeiten dabei, die gegeben Größen so umzurechnen, dass das erfasste Merkmal des realen Gegenstands bzw. Sachverhalts in einer passenden Maßeinheit angegeben wird.

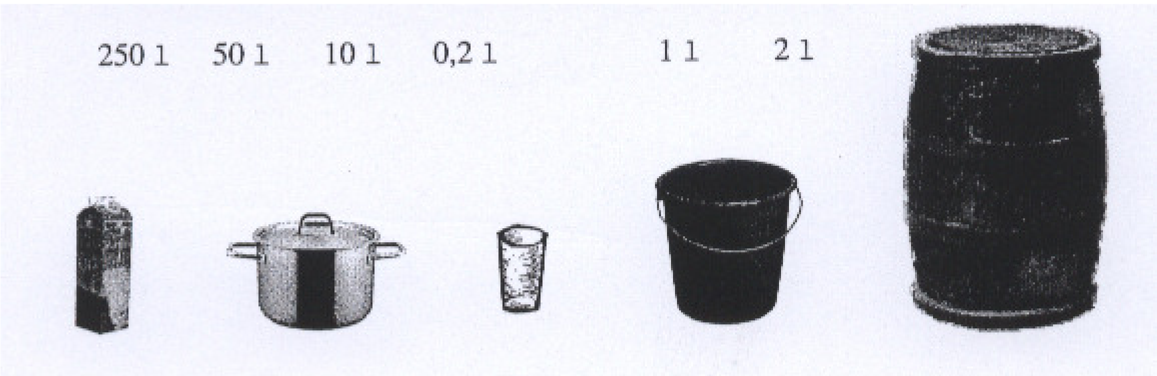
Diagnostische Aussagen allein auf Grund der von den Schülerinnen und Schülern angegebenen Lösungen sind angesichts der Aufgabenstellung in der Regel nicht möglich, da bei falscher Angabe die Ursache des Fehlers nicht deutlich wird. Daher wird die Lehrkraft zur **Diagnose** entweder von den Schülerinnen und Schülern eine Beschreibung ihres Vorgehens einfordern oder die genannten Teilleistungen in einzelnen Aufgaben gesondert prüfen.

Anregungen für den Unterricht

Die folgenden Übungen bieten sich an:
- Schülerinnen und Schüler nennen zu Maßangaben verschiedener Größen geeignete Repräsentanten.
- Schülerinnen und Schüler machen zu realen Gegenständen bzw. Sachverhalten Größenangaben, die bestimmte Merkmale der Gegenstände bzw. Sachverhalte erfassen. In der Regel genügen hier Schätzungen.
- Schülerinnen und Schüler rechnen Größenangaben um.

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** kann es sinnvoll sein, reale Gegenstände oder Abbildungen von diesen einzubeziehen.

z. B. Ordne den Gefäßen die richtige Größe zu. Welche bleibt übrig?



Aufgabe 8

Peter baut mit Holzwürfeln unterschiedlicher Kantenlänge einen Turm. Zum ersten Würfel, der eine Kantenlänge von 1 cm hat, kommt der zweite Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm. Der dritte Würfel hat eine Kantenlänge von 3 cm und so weiter.

Wie hoch ist der Turm, wenn er auf diese Weise aus insgesamt 5 Würfeln gebaut wurde?

Lösung (gemäß Kodierung)

15 cm

Aufgabe 8

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Lösung der Aufgabe ist sowohl über eine zeichnerische Darstellung als auch algebraisch möglich.
Da es sich dabei um eine einfache Addition der ersten 5 natürlichen Zahlen, also ein Routineverfahren (K5, AB I), handelt, ist fehlende Rechenfertigkeit kaum als Ursache für eventuelle Fehler anzunehmen. Vielmehr weisen falsche Ergebnisse auf fehlende Lesekompetenz oder Schwierigkeiten im Umgang mit Körpern, speziell ihren Abmessungen (L2), hin.

Anregungen für den Unterricht

Raumvorstellungen von Körpern, die aus (Einheits-) Würfeln aufgebaut sind, sollten gerade auch **leistungsschwache Schülerinnen oder Schüler** in der realen Handhabung erwerben.
Aufgaben zu Würfeltreppen, Somawürfel oder auch zu Würfelnetzen verbessern die Kompetenzen in den Leitideen Messen und Raum und Form.
Insbesondere für leistungsschwache Schülerinnen oder Schüler sollten die Lösungsideen auch in Form von Rechenwegen schriftlich formuliert werden, um das Ergebnis nachvollziehbar zu machen.

Aufgabe 8

Andere Aufgaben zum Würfelturm (K5, AB II) können sich anschließen, beispielsweise:

- Berechne das Volumen dieses Turms.

Lösung: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$
Der gesamte Turm hat ein Volumen von 225 cm^3.
Falsche Lösung: $15^3 = 3375$
(Nachfolgefehler: Höhe wird als Kantenlänge angenommen)

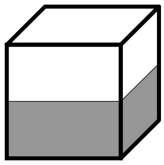
- Wie groß ist der Oberflächeninhalt dieses Turms?

Lösung: $4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 6 \cdot 5^2 = 270$
Der Turm hat einen Oberflächeninhalt von 270 cm^2.
Falsche Lösung: 330 cm^3
(Es wurden die Oberflächen aller Würfel addiert.)

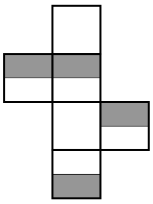
Eine Vertiefung in den Anforderungsbereich III ist möglich, wenn die Würfel verdeckt liegen und/oder unterschiedlich große Quaderblöcke dargestellt werden (siehe auch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 106 ff.). Die Berechnung der nicht sichtbaren Kantenlängen sollte begründet werden. Dabei ist das Erfassen von Längen im Raum mit perspektivischer Verkürzung sowie das Einsichtigmachen eines schnell gefundenen Ergebnisses wichtig (K6, AB II).

Aufgabe 9

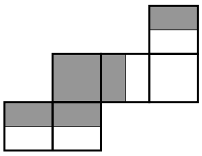
Ein Würfel wird zur Hälfte in Farbe getaucht.
Welches der folgenden Netze gehört zu diesem Würfel?
Kreuze an.



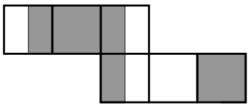
☐ A



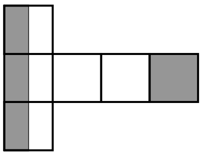
☐ B



☐ C



☐ D



Lösung (gemäß Kodierung)

B

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler mit den Begrenzungsflächen des Würfels operieren (L3). Im Schrägbild nicht dargestellte Flächen des Körpers müssen gedanklich ergänzt und abgezählt werden. Eine besondere Anforderung besteht in der Transformation der dreidimensionalen Darstellung als Schrägbild in eine zweidimensionale

Aufgabe 9

Abbildung als Netz (K4). Dies begründet auch den Anforderungsbereich III, da verschiedene Formen der Darstellung in der Ebene zweckentsprechend beurteilt werden müssen.
Die einfachste Lösungsstrategie besteht in der Annahme, dass es fünf gefärbte Flächen geben muss: ein ganzes Quadrat und vier halbe. Somit kommt nur die Auswahlmöglichkeit B in Betracht.
Dieses Vorgehen durch Ausschluss ist bei MC-Aufgaben oft hilfreich, kann aber mangelnde Kompetenz zum eigentlichen Aufgabenkern verdecken. Im Unterricht sollte diesem Lösungsweg deshalb unbedingt ein weiterer gegenübergestellt werden.

Fehler sind vermutlich bedingt durch mangelndes Vorstellungsvermögen bei räumlichen Anordnungen sowie durch Defizite beim Interpretieren der verschiedenen Möglichkeiten ihrer Darstellung in der Ebene.

Anregungen für den Unterricht

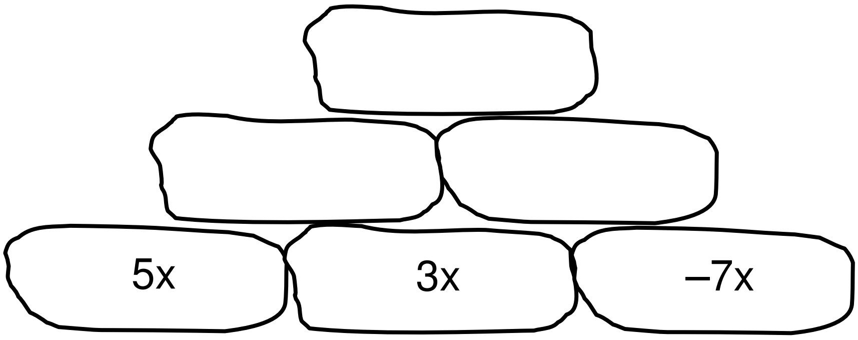
Fördermaßnahmen zur Verbesserung des räumlichen Vorstellungsvermögens – insbesondere für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** – sollten das aktive Handeln mit den Körpern einschließen: z. B. Beobachten der Änderung der Oberflächengröße beim Zerteilen oder das Einfärben der äußeren Flächen (bzw. von Teilen dieser).
Das perspektivische Zeichnen von Quadern in unterschiedlicher Lage und deren Übertragung in ein Netz könnten weitere Schritte darstellen. So kann u. a. die Zugehörigkeit verschiedener Netze zu einem einzelnen Körper veranschaulicht werden.

Netze von Pyramiden erleichtern evtl. das Übertragen von Körperdarstellungen in die Ebene, da die Dreiecksflächen einfacher zuzuordnen sind als beispielsweise ausschließlich die Quadrate von Würfeln. Unterschiedliche Einfärbungen einer jeden Begrenzungsfläche und der Übertrag auf die Netzebene verdeutlichen zudem die Position einer einzelnen Fläche im Raum gegenüber der Lage in der Ebene.

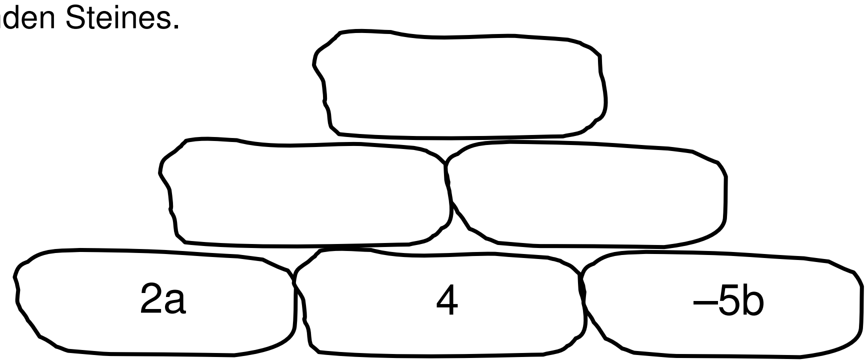
Ein Bezug zur mathematischen Kompetenz Kommunizieren (K6) wird hergestellt, wenn die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden zu begründen, warum ein Netz zu einem Körper passt. Dabei müssen sie die Fachsprache adressatengerecht verwenden und Lösungswege verständlich darstellen.

Aufgabe 10

a) Vervollständige die Termmauer.
Die Summe zweier benachbarter Steine ergibt den Term des darüber liegenden Steines.



b) Vervollständige die Termmauer.
Das Produkt zweier benachbarter Steine ergibt den Term des darüber liegenden Steines.



Lösung (gemäß Kodierung)

a) oben: 4x, Mitte links: 8x, Mitte rechts: - 4x

b) oben: - 160ab, Mitte links: 8a, Mitte rechts: - 20b

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Aufgabe 10

Aufgabe 10

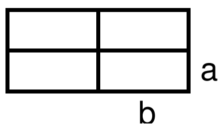
Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Es handelt sich hier um Routineaufgaben zum Rechnen mit Termen (K5, AB I). Vorkenntnisse zum Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von rationalen Zahlen sind zur Lösung notwendig (L1).
Zum einen sind die häufigen **Fehler** beim Zusammenfassen von Termen mit Variablen zu erwarten, zum anderen ist es möglich, dass die Schülerin oder der Schüler die Aufgabenstellung an sich nicht richtig erfasst, da sie oder er die Arbeitsanweisung nicht in einen Term umsetzen kann.

Anregungen für den Unterricht

Das Vereinfachen von Termen kann als Routineaufgabe mit festen Regeln bearbeitet werden.
Rechenbäume, welche in eine algebraische Form gebracht werden (und umgekehrt), erleichtern es den Schülerinnen und Schülern, die Rechenoperationen nachvollziehen zu können.

Ein vertieftes Verständnis kann durch Visualisierungen anhand von Flächen oder Quadern (K4) erreicht werden. Hier bieten sich auch Erweiterungen in die Anforderungsbereiche II und III an, indem die Schülerinnen und Schüler Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen, eigene Darstellungen entwickeln oder nicht vertraute Darstellungen lesen und ihre Aussagekraft beurteilen.
Beispiel:
- Übersetzte das Bild in die Sprache der Algebra: (AB II)



- Entwickle eine Darstellung zur Termumformung (4ab + 2ab) · 3. (AB III)

Aufgabe 11

Schreibe das Fünffache einer Zahl als Term.

Lösung (gemäß Kodierung)

5x (Äquivalente: zulässig)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert, dass die Schülerinnen und Schüler umgangssprachliche und fachspezifische Formulierungen aus verschiedenen Kontexten in Terme übersetzen können (bzw. umgekehrt Terme verbalisieren können). Neben der Angabe der Lösung mit einer Variablen sind auch Formulierungen wie „$5 \cdot 3$“ o. ä. als richtig zu werten (L1, K5). Der Anforderungsbereich I ist zugeordnet, da hier mit vertrauten Symbolen umzugehen ist.

Bei auftretenden **Fehlern** kann vermutet werden, dass Schülerinnen und Schüler den Begriff Vielfaches nicht mit der Multiplikation verbinden oder den zweiten Faktor nicht ausdrücken können.
Zur Behebung der genannten Defizite bieten sich Aufgaben mit verschiedenen Formulierungen zur selben Rechenoperation an, z.B. das Fünffache einer Zahl, das Produkt aus einer Zahl und 5, multipliziere eine Zahl mit 5 („Übersetzungshilfen“).

Anregungen für den Unterricht

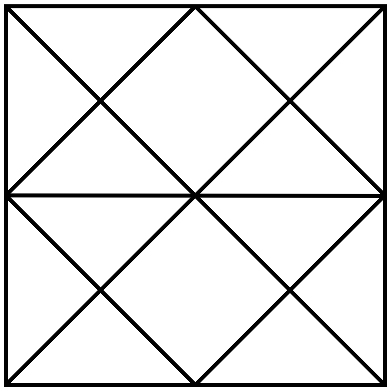
Die Aufgabe kann auch für die Verwendung anderer Rechenoperationen verändert werden, wie:
Schreibe als Term: eine um 5 vermehrte Zahl,
eine um 5 verminderte Zahl,
den fünften Teil einer Zahl. (AB I)
Eine weitere Aufgabenvariation wäre das Verbalisieren gegebener Terme, wie:
Beschreibe folgende Terme: $4x$; $y + 7$ (AB I)
Natürlich kann die Aufgabe auch bezüglich des Anforderungsbereiches verändert werden, wie:
Schreibe als Term: Die Summe aus dem Vierfachen einer Zahl und 3. (AB II)
Vermindere das Doppelte einer Zahl um die fünffache Differenz aus dieser Zahl und 10. (AB III)

Die Kompetenz Kommunizieren wird bei folgender Aufgabe stärker betont:
Ordne die Terme $x \cdot 5$, $x + 5$, $x - 5$
den Sätzen a) bis c) zu und erkläre jeweils die Bedeutung der Variablen.
a) Tom ist 5 Jahre älter als Max.
b) Das Päckchen wiegt 5 kg weniger als das Paket.
c) Das Rechteck ist 5 mal so lang wie breit. (AB II)

Aufgabe 11

Aufgabe 12

Ein Quadrat wurde durch seine Diagonalen und einige Verbindungslinien zwischen den Seitenmitten in Teilflächen zerlegt.



Färbe 75% der Gesamtfläche ein. Verwende nur gegebene Teilflächen.

Lösung (gemäß Kodierung)

75 % sind korrekt markiert, wenn alle Teilflächen schraffiert sind mit Ausnahme von (a) entweder 4 kleinen Dreiecken (b) oder 2 Quadraten (c) oder 1 Quadrat und 2 kleinen Dreiecken.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler können diese Aufgabe mit Sinn tragenden Vorstellungen von gebrochenen Zahlen/Prozentzahlen bearbeiten (L1), indem sie 75%, $\frac{3}{4}$ und 0,75 als gleichwertig erkennen (K5) und ihre Vorstellung vom Bruch als Teil eines Ganzen auf die gegebene Darstellung anwenden (K4).
Sie bearbeiten bekannte Sachverhalte in einer für sie wahrscheinlich neuen Variante, da insbesondere die senkrechte Symmetrieachse als Verbindungslinie fehlt (AB II).
Voraussetzung für ein erfolgreiches Bearbeiten sind das Verständnis von Bruch und Prozentdarstellungen bezüglich eines Ganzen an verschiedenen mathematischen Objekten.

Aufgabe 12

Da nur gegebene Teilflächen verwendet werden dürfen, wird ein häufig zu erwartender **Fehler** darin bestehen, dass die Schülerinnen und Schüler eines der Quadrate halbieren.
Bei der **Diagnose** auftretender Fehler sollten fehlende Grundvorstellungen von Anteilen von der Lehrkraft besonders beachtet werden.

Anregungen für den Unterricht

Aus der gegebenen Aufgabe können auch durch die Schülerinnen und Schüler selbst weitere Aufgaben bezüglich des Färbens von Anteilen entwickelt werden, entweder mit vorgegebenen gemeinen Brüchen, Dezimalzahlen oder Prozentzahlen bzw. durch Verändern der Darstellung, wie
- bei der vorgegebenen Figur die fehlende Symmetrieachse einzeichnen und dann färben lassen (AB I),
- bei „neuen“ Figuren (wie Rechtecken, Dreiecken, Sechsecken) Verbindungslinien einzeichnen und dann färben lassen (AB II).

Aufgabe 13

Die Summe dreier natürlicher Zahlen beträgt 154. Die größte Zahl ist um 8 größer als die mittlere Zahl, die kleinste Zahl ist um 7 kleiner als die mittlere Zahl.
Wie heißen die drei Zahlen?

Lösung (gemäß Kodierung)

44, 51 und 59

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Zusammenhänge zwischen den drei gegebenen natürlichen Zahlen erkennen (Addition und Kleiner- bzw. Größer-Relation).
Es bietet sich an, die entsprechenden Terme zu bilden (Ungleichungen, Gleichungen), um schließlich die Lösungen des Systems zu ermitteln (L4).
Dazu müssen Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, natürliche Sprache in symbolische Sprache zu übersetzen und umgekehrt (K5).
Systematisches Probieren, ggf. mit Hilfe von Tabellen, unter Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen den Zahlen ist als alternatives Lösungsverfahren möglich (K 2).
Der Anforderungsbereich (AB II) ergibt sich aus der Mehrschrittigkeit der Bearbeitung.

Häufige **Fehler** sind wahrscheinlich zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten haben, den Zusammenhang zwischen natürlicher Sprache (Text) und der Darstellung in einer Termstruktur herzustellen. Bei der schrittweisen Termbildung und Reduzierung auf eine Variable treten ebenfalls oft Probleme auf, ebenso beim Zusammenfassen der Zahlen bzw. Variablen und beim äquivalenten Umformen von Gleichungen.
Darüber hinaus ist zu erwarten, dass einige Schülerinnen und Schüler zwar nach Lösen der Gleichung zu einem Ergebnis gelangen, aber daraus nicht die beiden anderen Zahlen bestimmen. Sie überprüfen ihre Ergebnisse nicht an den Ausgangsbedingungen.

Beim systematischen Probieren können zusätzlich Fehler durch Vernachlässigung der gegebenen Bedingungen auftreten.
Für die **Diagnose** von Fehlern ist es notwendig, dass Schülerinnen und Schüler Gelegenheit bekommen, über ihr Vorgehen zu berichten. Dabei wird deutlich, inwieweit sie natürliche Sprache in formale übersetzen können, wie sie Fachbegriffe anwenden und einfache mathematische Beziehungen darstellen können. Natürlich sollten auch verschiedene Lösungswege gegenübergestellt und kommentiert werden.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** wäre es möglich, die Anzahl der natürlichen Zahlen in der Aufgabe auf zwei zu begrenzen, den Betrag der Summe auf einen überschaubaren Wert zu ändern und/oder die Beziehungen der Zahlen zu einander zu vereinfachen.
Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** könnte man die Anzahl der Summanden und/oder die damit verbundenen Bedingungen (wie die Operation) ändern.
Aufgabenbeispiele:
- Das Produkt zweier natürlicher Zahlen beträgt 65. Die zweite Zahl ist um 8 größer als die erste Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen? (AB II)
- Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 105. Die Differenz zwischen der größten und der mittleren Zahl sowie zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl ist gleich. Wie heißen diese drei Zahlen? (AB II)
- Bilde eine ähnliche Aufgabe zum Produkt dreier Zahlen mit einer zusätzlichen Bedingung. Es sollen mindestens zwei verschiedene Lösungen für die drei Zahlen entstehen. Beschreibe, wie du vorgegangen bist. (AB III)

Aufgabe 14

Führe für die folgenden Aufgaben jeweils einen Überschlag aus und kreuze dann das richtige Ergebnis an.

a) $6{,}25 \cdot 397{,}8 \cdot 0{,}48$

- ☐ A 11934
- ☐ B 1193,4
- ☐ C 119,34
- ☐ D 11,934

b) $3\,644{,}16 : 58{,}4$

- ☐ A 6240
- ☐ B 624
- ☐ C 62,4
- ☐ D 6,24

Lösung (gemäß Kodierung)

a) B (1193,4)

b) C (62,4)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Ausführen des Überschlags müssen die Schülerinnen und Schüler Dezimalbrüche sinnvoll runden und Grundrechenoperationen ausführen (L1, K5). Dies sind Routinearbeiten, die aus dem Unterricht vertraut sein sollten (AB I).

Die Verwendung des Taschenrechners ist für die Ausführung eines Überschlags nicht sinnvoll, kann aber bei der gegebenen Aufgabenstellung nicht verhindert werden. Durch den Einsatz des Taschenrechners unterbleibt häufig eine Überprüfung des Ergebnisses auf Plausibilität. Gerade der Überschlag ist daher ein wichtiges Kontrollverfahren. Im Unterricht sollte durch geeignete Aufgaben die Einstellung dazu gestärkt werden. So sind Aufgaben denkbar, in denen mit Hilfe des Überschlags die Kommasetzung im Ergebnis überprüft werden soll.
Defizite werden deutlich, wenn Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen erläutern und den Rechenweg beschreiben.

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht ist regelmäßig auf das Bestimmen des Überschlags Wert zu legen. Dabei kann auch exemplarisch die Differenz zwischen Überschlag und dem exakt ermittelten Ergebnis bestimmt und für verschiedene Überschläge verglichen und diskutiert werden, um die Funktion und die Qualität des Überschlagens deutlich zu machen.
Bei vielen Berechnungen im täglichen Leben reicht ein Überschlag völlig aus. Auch dieser Gesichtspunkt sollte im Unterricht eine Beachtung finden und Kriterien dafür überdacht werden.

Es ist aber auch möglich, über die routinierte Bearbeitung hinausgehend, Aufgabenstellungen im Bereich des Überschlags zu stellen, die zur Reflexion des Lösungsweges anregen (siehe „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 94). Statt nur Aufgabenpakete zu berechen, kann danach gefragt werden, welches Ergebnis am nächsten bei einer bestimmten Zahl liegt. Schülerinnen und Schüler sollten durch die Aufforderung zum Begründen angeregt werden, ihre Rechenstrategien zu erläutern und zu vergleichen (K6, AB II).

Aufgabe 15

Gib für x eine rationale Zahl so an, dass der Wert des Terms $\frac{2x+1}{3}$ negativ ist.

Lösung (gemäß Kodierung)

Es wird eine beliebige rationale Zahl x mit $x < -0{,}5$ angegeben.

Aufgabe 15

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem Term bzw. nutzen ggf. Äquivalenzumformungen von Gleichungen/Ungleichungen, insbesondere auch unter Einbeziehung der rationalen Zahlen (L1, K5).
Dabei handelt es sich um die direkte Anwendung von Routineverfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang (AB I).

Eine Lösung kann durch Probieren gefunden werden, sinnvoll ist auch das Formulieren einer Gleichung $\frac{2x+1}{3} = 0$ bzw. Ungleichung $\frac{2x+1}{3} < 0$ mit anschließender Umformung zu $x = -0{,}5$ bzw. $x < -0{,}5$.

Fehler beim Umgang mit rationalen Zahlen, beim Aufstellen der Gleichung bzw. Ungleichung oder beim Ausführen der Äquivalenzumformungen deuten auf unterschiedlichen Förderbedarf hin. Die Aufgabenstellung verlangt nicht, dass die Schülerinnen und Schüler einen Lösungsweg angeben. Eine **Diagnose** ist deshalb erst nach einer detaillierten Besprechung im Unterricht möglich.

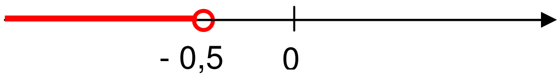
Anregungen für den Unterricht

In der Aufgabenstellung wurde nur nach einer Zahl gefragt, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt. Durch systematisches Probieren können daher einzelne Zahlen aus der Lösungsmenge erhalten werden, ohne einen Zusammenhang zur Zahlengerade herstellen zu müssen.
Im Unterricht sollte die Frage nach der gesamten Lösungsmenge als Motivation dienen, eine Äquivalenzumformung zu Hilfe zu nehmen. Hierzu werden für das Lösen einer Ungleichung die gleichen Gesetze und Regeln wie bei den Gleichungen benötigt.

Aufgabe 15

Es ist sinnvoll, die Lösung auf der Zahlengerade, die Mengen- und Intervallschreibweise gegenüberzustellen, um die Vielfalt der Darstellungsmöglichkeiten zu demonstrieren.

Beispiel:



$L = \{x \mid x < -0{,}5\}$ $\qquad$ $x < -0{,}5$

Aufgabenstellungen für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** im Bereich der Termumformungen lassen sich vor allem durch Umwandlung in Textaufgaben erhalten. Zahlenrätsel, Altersrätsel oder geometrische Probleme lassen sich mit Hilfe von Gleichungen oder Ungleichungen mathematisieren. Auch die Komplexität der Termstruktur ist zur Differenzierung geeignet. Somit sind einfache Terme auch für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** verwendbar.

Aufgabe 16

Corinna und Sebastian haben die Ergebnisse einer Verkehrszählung in einer Tabelle zusammengestellt:

PKW	LKW	Busse	Motorräder
50%	26%	8%	16%

Corinna wird nach Schulschluss von ihrer Freundin nach der Anzahl der jeweils gezählten Fahrzeuge gefragt. Da Sebastian die Strichliste mit nach Hause genommen hat, versucht Corinna sich zu erinnern. Sie weiß genau, dass sie 13 LKW gezählt haben.
Berechne aus der Tabelle und Corinnas Aussage, wie viele Motorräder gezählt wurden.

Lösung (gemäß Kodierung)

8

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen den Text und die eingebundene Tabelle verstehend lesen (K6). Damit verbunden ist das Eindenken in die reale Situation, also Modellierungsfähigkeit (K3). Mathematisch geht es um die Vertrautheit mit Prozentsätzen (Anteilen) und die Fähigkeit, mit linearen Zusammenhängen umzugehen. Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe durch Nutzung proportionaler Zuordnungen oder mit Hilfe der Prozentrechnung lösen. Dies erfordert, den Begriff der Proportionalität bzw. Begriffe der Prozentrechnung sachgerecht zu verwenden und Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen zu nutzen (L1) sowie Lösungsverfahren auszuführen (K5). Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten bekannte Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten entsprechend der Situation verknüpft werden. Die Bearbeitung erfordert mehrere Schritte (AB II), ohne das eine Verallgemeinerung oder vertiefende Reflexion notwendig ist.

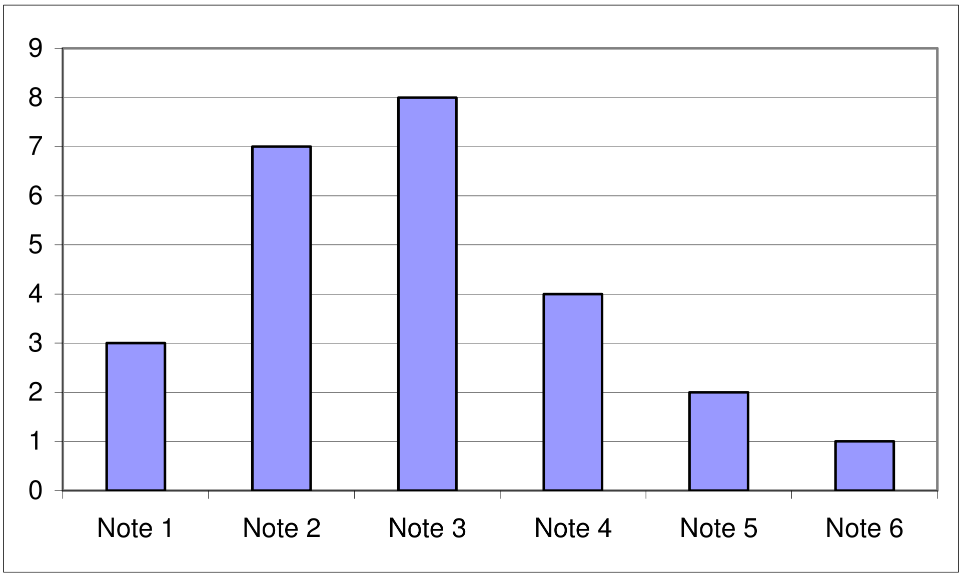
Fehler können u. a. durch eine falsche Verknüpfung von Text und Tabelle, insbesondere über einen „verdrehten“ Ansatz (z.B. 13 als Grundwert) auftreten. Zur **Diagnose** können weiterhin Grundkenntnisse der Proportionalität und Prozentrechnung auf diesbezügliche Lücken überprüft werden. Es sollte auch festgestellt werden (ggf. durch Vorrechnen, Erklären, Begründen), ob notwendige Kenntnisse und Fähigkeiten ausreichend gefestigt bzw. verknüpft sind.
Darüber hinaus können Übungen zum Zusammenhang von Bruch-, Dezimalbruch- und Prozentangaben erfolgen. Diese kann man mit Kärtchen oder Tabellen durchführen, wobei hier abwechselnd zwei der drei Spalten abzudecken sind.
Beispiele: 3/100 – 0,03 – 3%,
4/5 – 0,8 – 80%,
1/3 – $0,\overline{3}$ – $33,\overline{3}$%,
5/4 – 1,25 – 125%

Anregungen für den Unterricht

Aus der gegebenen Aufgabe können zur **Differenzierung** weitere Aufgaben bezüglich der Prozentrechnung entwickelt werden, wie:
- Ausgehend von den gegebenen Werten in der Tabelle wird die Gesamtzahl aller Fahrzeuge (Grundwert) vorgegeben. Die Anzahl der einzelnen angegebenen Verkehrsmittel ist zu berechnen (AB I).
- Unter Beibehaltung der gegebenen Werte in der Tabelle wird eine „einfache“ Zahl für die Anzahl der Pkw (für 50%) vorgegeben. Die übrigen Anzahlen sind zu berechnen (AB I).
- Bei anderen Prozentsätzen und Prozentwerten (z. B. 12,5%, 97 Fahrzeuge, andere Tabellenspalte) kann eine analoge Aufgabe gestellt werden (AB II).
- Eine analoge Aufgabe mit Vorgabe eines Diagramms statt einer Tabelle wird gestellt (AB II, ggf. auch K4).
- Eine weitere analoge Aufgabe entsteht, wenn die Werte in der Tabelle als Prozentzahl, gemeiner Bruch und/oder Dezimalzahl gegeben werden (AB II).
- Ähnliche Aufgabenstellungen bieten sich mit anderen Sachverhalten (z. B. Länge des Schulweges, Anzahl der Schülerinnen und Schüler einer Schule pro Klassenstufe, ...) an (AB II).
- Als Säulendiagramm wird die Lösungshäufigkeit einer Aufgabe in Prozent jeweils für Aufgabe 1, 2, 3 und 4 vorgeben, und zwar für Schulteil A (120 Schülerinnen und Schüler) und Schulteil B (180 Schülerinnen und Schüler). Es ist ein Diagramm für die gesamte Schule zu erstellen (AB III).

Aufgabe 17

Das Diagramm zeigt die Notenverteilung einer Klassenarbeit der Klasse 8a.



Der Lehrer hat sich entschieden, den Notendurchschnitt anzugeben. Welcher Durchschnitt wurde bei dieser Klassenarbeit erreicht?

Lösung (gemäß Kodierung)

2,92

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Gegeben ist die Darstellung der Häufigkeitsverteilung einzelner Noten einer Klasse, aus welcher die Schülerinnen und Schüler den Durchschnitt berechnen sollen (L5).
Sie entnehmen dem Diagramm Informationen (K4, K6), wählen ein mathematisches Werkzeug verständig aus und setzen es ein (K5).
Die Verwendung des arithmetischen Mittels ist den Schülerinnen und Schülern aus verschiedenen Situationen vertraut.
Die vorliegende Mehrschrittigkeit rechtfertigt den Anforderungsbereich II.

Aufgabe 17

Aus mathematischer Sicht ist die Angabe eines Dezimalbruchs für den Durchschnitt von Zensuren problematisch, da diese tatsächlich nur als ganze Zahlen vorkommen. Gleichwohl geben die Zwischenwerte einen Sinn, da sie die Notentendenzen abbilden. Im weiter führenden Unterricht der Stochastik ist auf die korrekte Handhabung und Interpretation von Mittelwertberechnungen Wert zu legen.
Die Problematisierung der Berechnung eines Notendurchschnitts bietet sich in der Klasse 8 für **leistungsstarke Lerngruppen** an.

Fehler könnten beim Ablesen der Häufigkeit einzelner Noten vorkommen, da die Achseneinteilung nicht alle Werte darstellt. Auch die korrekte Eingabe der Summe mit anschließender Division könnte durch fehlende Klammersetzung falsche Werte erzeugen.
Bei Übungen zur Mittelwertberechnung ist dringend auf die schriftliche Darstellung des Rechenterms zu achten, auch um eine **Diagnose** der Fehler zu ermöglichen. Insbesondere in **leistungsschwachen Lerngruppen** sollte darauf Wert gelegt werden, dass alle Arbeitsschritte geklärt und dargestellt werden. Die Berechnung des Terms allein mit Hilfe des Taschenrechners verführt zu einer unreflektierten Eingabe von Werten, so dass bei Fehlern eine Klärung der Defizite nur schwer möglich ist.

Anregungen für den Unterricht

Eine Vertiefung und Öffnung der Aufgabe im Bereich der Leitidee Daten und Zufall ist vielfältig denkbar:
- Wie könnte ein Notendurchschnitt von 2,7 erreicht werden? (AB II)
- Visualisiere die Notenergebnisse der letzten drei Klassenarbeiten in einem Diagramm und vergleiche sie. (AB II)

Zum Anforderungsbereich III - Verallgemeinern und Reflektieren - führen Überlegungen zur Aussagefähigkeit des Noten-Mittelwertes bei Klassenarbeiten. Die Deutung des Mittelwertes – beispielsweise bei extremer Streuung (es kommen nur sehr gute und mangelhafte Noten vor) - weist auf die Notwendigkeit von weiteren Kennwerten hin.
Zudem bietet es sich an, mit Hilfe eines Computerprogramms wie Excel statistischen Fragestellungen nachzugehen und diese auszuwerten. Dies fördert die Kompetenzen im Bereich K5, AB II - mathematische Werkzeuge verständig auswählen und einsetzen.

Aufgabe 18

Max möchte sich einen Computer für 1050 € kaufen. Von seiner Oma bekommt er dafür 350 €. Er selbst kann monatlich 140 € sparen.
Mit welcher Gleichung kann Max berechnen, wie viele Monate er sparen muss? Kreuze an.

☐ A 1050 € = 140 € · x

☐ B x + 350 € = 1050 €

☐ C 1050 € – 350 € = 140 € · x

☐ D 140 € · x – 350 € = 1050 €

☐ E 350 € · x + 140 € = 1050 €

Lösung (gemäß Kodierung)

C

Aufgabe 18

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen den mathematischen Zusammenhang zwischen Computerpreis, den monatlichen Sparbeträgen und dem Geldgeschenk der Oma herstellen und als Gleichung ausdrücken (K3).
Die gefundene Gleichung ist äquivalent umzuformen, um mit den Antwortangeboten vergleichen zu können (K5). Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich, weil Schülerinnen und Schüler die verbale Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs analysieren und interpretieren, also unter Beachtung der Anfangsbedingungen und des monatlichen Sparbetrages die Anzahl der Monate berechnen.
Die Aufgabe erfordert ein mehrschrittiges Arbeiten, so dass die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erfolgt.

Fehler sind zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen natürlicher Sprache (Text) und der Darstellung in einer Termstruktur nicht oder nur unvollständig herstellen können (Nichtbeachten des Geldgeschenkes bzw. des monatlichen Sparbetrags, falsche Operationszeichen, Vervielfachen - obwohl das Geldgeschenk einmalig ist).

Bei der Zuordnung der gefundenen Gleichung können auch Fehler beim äquivalenten Umformen entstehen.
Hinzu kommt, dass Schülerinnen und Schüler häufig ihre Ergebnisse nicht an den Ausgangsbedingungen überprüfen.

Anregungen für den Unterricht

Für lernschwache Schülerinnen und Schüler ist es empfehlenswert, die Ausgangsbedingungen zu vereinfachen.
Denkbar wäre, vom Geldgeschenk der Oma zunächst abzusehen und nur nach der Anzahl der zu sparenden Monate zu fragen. Gleichung und Probieren führen schnell zum Ziel. Die errechneten Ergebnisse sind an der Sachsituation zu diskutieren.
Schülerinnen und Schüler, bei denen Schwierigkeiten im einfachen mathematischen Modellieren zu vermuten sind, können mit Übungen wie der folgenden gefördert werden:

Anzahl der Karten von Uta: a
Anzahl der Karten von Sven: n

	Auswahl		
Uta hat zwei Karten mehr als Sven.	$a - 2 = n$	$a = n$	$a + 2 = n$
Uta gibt 2 Karten ab, jetzt hat sie noch 4 Karten. Wie viele Karten hatte sie vorher?	$a - 2 = 4$	$2a = 4$	$a - 2 = n$
Sven hat doppelt so viele Karten wie Uta.	$0{,}5n = a$	$2a = n$	$2n = a$
Sven verdoppelt seine Karten auf 12.	$a = 12n$	$2n = 12$	$a + n = 12$

Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnte man die Bedingungen der Aufgabe komplexer gestalten.

Aufgabe 18

Aufgabe 19

Eine Radwandergruppe fährt als Training von ihrem Heimatort in den 30 km entfernten Zielort und auf der gleichen Straße wieder zurück. Entlang der Straße stehen Kilometersteine. Das folgende Diagramm beschreibt den Verlauf der Tour.

Gib an, welche Streckenlänge bis zur Pause zurückgelegt wurde.
Kreuze die richtige Lösung an.

- ☐ A 10 km
- ☐ B 12,4 km
- ☐ C 13,1 km
- ☐ D 25 km
- ☐ E 30 km
- ☐ F 60 km

Lösung (gemäß Kodierung)

D (25 km)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Aufgabe 19

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler ordnen einer einfachen Erscheinung aus ihrer Erfahrungswelt mathematische Objekte zu und prüfen das Resultat am Kontext (K3, AB I): Die Geschwindigkeit der Bewegung ist an der Steigung des Graphen abzulesen. Während einer Pause ist die Geschwindigkeit Null – der Graph verläuft demnach parallel zur waagerechten Achse. Dies ist am „Kilometerstein 25" der Fall.
Eine vertraute Darstellung einer Situation als Graph im Koordinatensystem wird genutzt und interpretiert (K4).

Anregungen für den Unterricht

Graphen können vielfältig zur Beschreibung von Alltagssituationen herangezogen werden. Entsprechende Aufgabenstellungen können die mathematische Kompetenz Modellieren (K3) fördern.
Beispiele sind:
- Geschwindigkeit eines Rennwagens in Verbindung mit der Darstellung der Rennstrecke,
- Füllkurven von Körpern,
- Stromverbrauch in Abhängigkeit von der Tageszeit, etc.

Es sind drei Varianten für eine Bearbeitung möglich:
1. Situation $\rightarrow$ Graph (Darstellung),
2. Graph $\rightarrow$ Situation (Verbalisierung),
3. Situation $\leftrightarrow$ Graph (Zuordnung).

Fächerübergreifende Bezüge zur Chemie und Physik sind im Themenbereich „Zuordnungen" vielfältig möglich: Kleine Projekte, die reales Experimentieren einschließen, verzahnen die Kompetenzen bzw. -bereiche des mathematisch-naturwissenschaftlichen Aufgabenfeldes (z.B. Fall-Experimente oder Dichte-Messungen verschiedener Materialien).

Beschreibungen von Zuordnungen bieten hinsichtlich des Kommunizierens (K4) vielfältige Möglichkeiten, eine **Binnendifferenzierung** vorzunehmen. So ist es im Anforderungsbereich I möglich, aus Grafiken und Abbildungen Informationen zu entnehmen, im Anforderungsbereich II sollen Überlegungen oder Ergebnisse verständlich dargestellt, Grafiken und Abbildungen sinnentnehmend erfasst sowie die Fachsprache adressatengerecht verwendet werden.
Im Anforderungsbereich III bewerten Schülerinnen und Schüler Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten.
Zur Entwicklung der Fachsprache sollte ein angemessenes Vokabular zum Beschreiben eines Graphen zur Verfügung stehen: Hoch- und Tiefpunkte am Graphen, Merkmale wie steigend, konstant bleiben, stark oder schwach steigend, können verwendet werden.
Anhand von Tabellen oder beschreibenden Texten kann dann das Zeichnen von Graphen geübt werden.

Aufgabe 20

Mit einem Mini-Bagger kann man in 8 Stunden 28 m^3 Erde ausheben.
Wie viel m^3 Erde kann man in 3 Stunden schaffen?

Lösung (gemäß Kodierung)

10,5

Aufgabe 20

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen proportionale Zuordnungen in einem Sachzusammenhang (L4, K3). Sie wenden zum Lösen Routineverfahren an (AB I) und nutzen gegebenenfalls den Taschenrechner (K5).
Eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert von Schülerinnen und Schülern, dass sie den Aufgabentext inhaltlich erschließen und analysieren können. Sie müssen zwischen direkter und umgekehrter Proportionalität unterscheiden. Ist dies nicht der Fall, können **Fehler** entstehen.

Anregungen für den Unterricht

Die vorliegende Aufgabe lässt sich für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** leicht abändern, indem man zunächst ausrechnen lässt, wie viel Kubikmeter Erde in einer Stunde ausgehoben werden können bzw. indem man die Angaben in der Tabelle ergänzen lässt (AB I).

Zeit in h	8	4	2	1	3	12
Aushub in m^3	24					

Bei einer Aufgabenvariation wie der folgenden wird die Kompetenz mathematische Darstellungen verwenden (K4) stärker betont:
Stelle den Zusammenhang zwischen Arbeitszeit und Aushub in einem Koordinatensystem graphisch dar (AB II).

Aufgabe 20

Zum Erkennen und Unterscheiden von verschiedenen Zuordnungen sind Aufgaben folgender Art geeignet. Hier steht die Kompetenz mathematisch Argumentieren (K1) im Vordergrund (AB I). Welche Zuordnungen sind proportional? Begründe deine Antwort.

- Anzahl Brötchen	-	Preis (ohne Rabatt)
- Alter eines Kindes	-	Größe
- zurückgelegter Weg	-	Fahrzeit (gleiche Geschwindigkeit)
- Wasserstand in einem Becken	-	Zeit beim Ablassen des Wassers (gleichmäßiger Abfluss)
- Anzahl der Arbeiter	-	benötigte Zeit für einen Auftrag (ohne Pausen, gleiche Aktivität)

In diesem Zusammenhang ist unbedingt darauf einzugehen, dass das Vorliegen von Proportionalitäten bzw. Antiproportionalitäten bei Beispielen aus der Realität fast immer an weitere Bedingungen geknüpft ist.

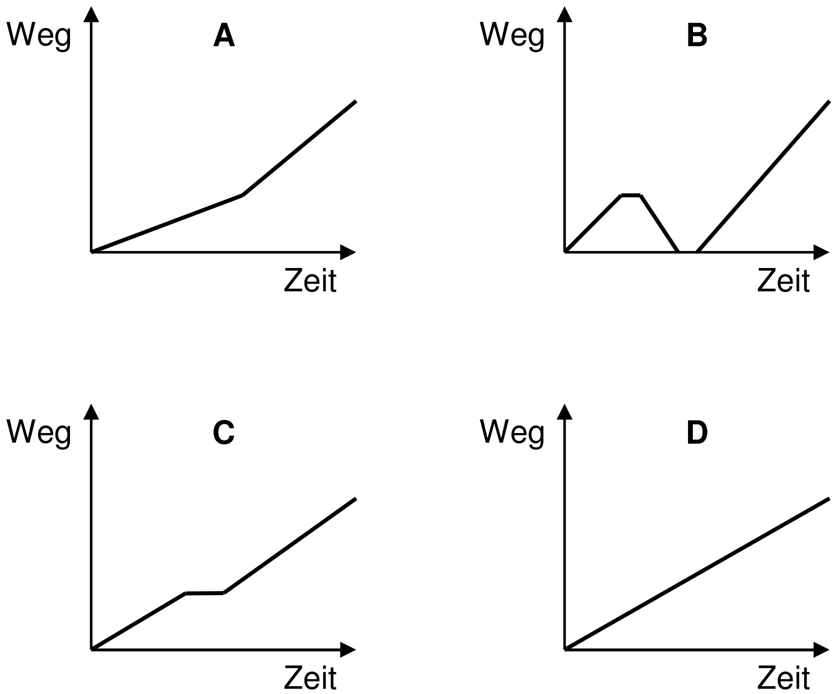
Aufgabe 21

a) Entscheide, zu welcher der drei „Geschichten“ welcher Graph am besten passt.

I „Ich gehe jeden Morgen gleichmäßig ohne zu bummeln in die Schule.“

II „Ich gehe jeden Morgen pünktlich und zügig in die Schule.
An der Ampel vom Fußgängerüberweg muss ich immer warten.“

III „Ich hatte gerade das Haus verlassen, als es anfing zu regnen. Mein Schirm lag noch zu Hause. Also ging ich zurück, um ihn zu holen.“



b) Einen Graph konntest du nicht zuordnen. Schreibe dazu eine Geschichte.

Lösung (gemäß Kodierung)

a) I – D , II – C , III – B

b) Es wird eine Geschichte geschrieben, in der eine Geschwindigkeitszunahme vorkommt.

Aufgabe 21

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben und interpretieren funktionale Zusammenhänge und ihre Darstellungen in Alltagssituationen (L4). Sie können Beziehungen zwischen den Darstellungsformen (Graph – „Geschichte") erkennen (K4), Graphiken und Texte Sinn entnehmend erfassen und ihre Überlegungen verständlich darstellen (K6). Da die Bearbeitung mehrschrittig erfolgt, ist der Anforderungsbereich II zugeordnet.

Anregungen für den Unterricht

Es bieten sich vielfältige Übungen an, bei denen zwischen Darstellungsformen gewechselt wird.

Folgende Varianten dieser Aufgabe sind für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** geeignet:
- Es wird nur ein Graph vorgegeben.
Entscheide, zu welcher der drei „Geschichten" dieser Graph am besten passt. Begründe. (AB II)
- Es wird nur eine „Geschichte" vorgegeben.
Entscheide, zu welchem Graph diese „Geschichte" am besten passt. Begründe. (AB II)

Die Anforderungen können im Vergleich zur vorliegenden Aufgabe auch erhöht werden:
- Zeichne zu jeder dieser „Geschichten" einen Graphen. (AB II)
- Denke dir selbst eine „Geschichte" zu deinem Schulweg aus und zeichne einen Graphen. Lass dir von einem Mitschüler zu deiner Darstellung deinen Schulweg beschreiben. Vergleicht eure „Geschichten". (AB II)

Aufgabe 21

Aufgabe 22

Nach den Regeln des Internationalen Tischtennisverbandes ITTF muss ein Tischtennisball einen Durchmesser von exakt 40 mm haben.
Bei einem Hersteller von Tischtennisbällen befinden sich bei der Endkontrolle 5000 Bälle in einer Box. Es werden zufällig 100 Bälle ausgewählt und deren Durchmesser wird geprüft.
Bei dieser Auswahl waren 5 Bälle außerhalb der Norm.
Wie viele Bälle, die nicht der Norm entsprechen, sind voraussichtlich in der ganzen Box enthalten?

☐ A 20 ☐ B 50 ☐ C 250 ☐ D 500 ☐ E 1000

Lösung (gemäß Kodierung)

C (250)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler müssen zunächst den umfangreichen Text der Aufgabe, der mit der Angabe des Durchmessers auch eine zum Lösen nicht benötigte Zahlenangabe enthält, verstehend lesen (K6). Dabei sollte ihnen bewusst werden, dass ein Vorgang beschrieben wird (Bestimmen der Anzahl der nicht normgerechten Bälle in einer Stichprobe), dessen Ausgang zufällig ist, aber dennoch für die Vorhersage benötigt wird (L5). Auch wenn Schülerinnen und Schüler als Ergebnis ihres Modellierens (K3) eine Dreisatzaufgabe finden (Bei 100 Bällen sind 5 nicht normgerecht, bei 5000 Bällen können es 5 • 50 = 250 sein (K5).), ist die Einsicht, dass keinesfalls genau 250 Bälle nicht normgerecht sein können, das wesentliche Ergebnis der Aufgabe. In der realen Situation können es beispielsweise 200 oder 255 sein. Eine solche Interpretation des Resultats aus der Dreisatzaufgabe zeigt Verständnis für Zufallsexperimente bei Schülerinnen und Schülern. Darauf ist bei der Besprechung der Aufgabe Wert zu legen. Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich vor allem durch die Mehrschrittigkeit.

Auf Grund des Umfangs des Aufgabentextes wird es einer Reihe von Schülerinnen und Schülern schwer fallen, ein adäquates Situationsmodell zu bilden.
Fehler sind auch zu erwarten, wenn die Zuordnung der entsprechenden Größen nicht gelingt oder wenn der Durchmesser einbezogen wurde.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** könnte man den Umfang des Aufgabetextes reduzieren und auf die überflüssige Angabe des Durchmessers verzichten. Denkbar wäre auch, die Anzahl der Bälle in der Endkontrolle zu reduzieren, so dass die Aufgabenstellung in einer realen Situation nachvollzogen und die Unsicherheit der Vorhersage verdeutlicht werden kann.
Leistungsstarken Schülerinnen und Schülern können weitere Aufgaben angeboten werden, wie sie zu Wahrscheinlichkeit und Zufall in „Bildungsstandards Mathematik: konkret", S.69 ff. zu finden sind.

Aufgabe 23

„Heute habe ich beim Einkauf 40 € gespart.
Das sind 20% des ursprünglichen Preises“, erzählt Tina.
Wie viel hätte Tina ursprünglich bezahlen müssen?

Lösung (gemäß Kodierung)

200 Euro

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten eine alltagsnahe Problemstellung, indem sie ihre Kenntnisse aus der Prozentrechnung sachgerecht anwenden (L1). Sie müssen dabei eine Lösungsstrategie nutzen (K2) und Lösungs- bzw. Kontrollverfahren ausführen (K5), z. B.: 40 € sind 20% oder 1/5 des ursprünglichen Preises, damit ist das Fünffache der ursprüngliche Preis. Der Anforderungsbereich II ist durch die Mehrschrittigkeit der Aufgabenstellung gegeben.

Zu erwarten sind u.a. folgende **Fehler**:
- Schülerinnen und Schüler arbeiten nur mit den „Zahlensignalen“ ohne den Text vollständig zu erfassen. Sie verwenden z. B. den Betrag von 40 € als Grundwert (z.B. 20% von 40 € sind 8 €, 40 € + 8 € = 48 €).
- Bei dem beschriebenen Sachverhalt liegt es für manche Schülerinnen und Schüler nahe, den Betrag zu berechnen, der noch zu bezahlen ist. Sie lesen die Aufgabe nur oberflächlich und erhalten 160 € als Ergebnis. Diese werden dann „als noch zu zahlender Betrag“ im Antwortsatz aufgenommen, da die Frage gar keine Beachtung mehr findet.

Sicherheit über das Vorgehen von Schülerinnen und Schülern (**Diagnose**) kann sich die Lehrkraft verschaffen, indem diese aufgefordert werden, ihre Lösungswege in schriftlicher oder mündlicher Form zu beschreiben. Zum vollständigen Erfassen der Aufgabe bieten sich verschiedene Maßnahmen an, die bei Kommentierung von Aufgabe 24 exemplarisch benannt sind.

Aufgabe 23

Anregungen für den Unterricht

Auf besondere Sorgfalt beim Lesen einer Aufgabe ist im Unterricht immer wieder Wert zu legen, desgleichen auf das sachgerechte Anwenden von Grundbegriffen der Prozentrechnung (Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert).
Zur **Differenzierung** bieten sich beispielsweise folgende Aufgaben an:
- „Heute habe ich beim Einkauf 20% gespart. Eigentlich sollte ich 200 € bezahlen", erzählt Tina. Wie viel Euro hat Tina gespart? (AB I) Wie viel musste Tina bezahlen? (AB II)
- „Heute habe ich beim Einkauf nur 80% bezahlt. Eigentlich sollte ich 200 € bezahlen", erzählt Tina. Wie viel Euro hat Tina gespart? (AB II) Wie viel musste Tina bezahlen? (AB I)
- „Heute habe ich beim Einkauf 160 € bezahlt. Dabei habe ich 20% des eigentlichen Preises gespart", erzählt Tina. Wie viel hat Tina gespart? (AB II) Wie viel hätte sie ursprünglich bezahlen müssen? (AB II)

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnten aufgefordert werden, ausgehend von einer Initialaufgabe zu einem Thema selbstständig Aufgaben zu finden, zu lösen und Probemöglichkeiten anzuwenden.

Aufgabe 24

Aufgabe 24

Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Nach Abschluss von Baumaßnahmen kann er jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren.
Wie viel Fahrzeit spart er ein?
Kreuze die richtige Antwort an.

☐ A 10 min ☐ B 30 min ☐ C 50 min ☐ D 1,0 h ☐ E 2,5 h

Lösung (gemäß Kodierung)

B (30 min)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler setzen die vorgegebene Situation in eine mathematische Struktur um (K3). Dabei übersetzen sie natürliche Sprache in formale Sprache und umgekehrt und führen Lösungsverfahren aus (K5). Konkret werden die Schülerinnen und Schüler, ausgehend von der Geschwindigkeits- und Entfernungsangabe, über die Eigenschaften der möglichen Zuordnungen auf die benötigte Fahrzeit schließen. Zum Abgleich mit den angegebenen Auswahlmöglichkeiten ist darüber hinaus eine einfache Umrechnungen von Zeitangaben erforderlich (L2). Auf Grund der Mehrschrittigkeit wurde Anforderungsbereich II zugeordnet.

Zu erwartende **Fehler** können u.a. folgende sein:
- Schülerinnen und Schüler verwenden nur die Größen, die Zeiteinheiten enthalten, und subtrahieren die Zahlenwerte, ohne die Einheiten zu berücksichtigen. Das Ergebnis wird nicht in der gegebenen Sachsituation interpretiert und geprüft. (60km/h - 50km/h → 10 → Ergebnisangabe: 10min)
- Für die Geschwindigkeit von 60km/h wird eine Fahrzeit von 2,5 Stunden berechnet, aber die Frage nach der Zeiteinsparung nicht mehr beantwortet. (→ Ergebnisangabe: 2,5h)

- Es wird die Zeiteinsparung von 0,5 h richtig berechnet und dann falsch in Minuten umgerechnet. (1h = 100min → 0,5h = 50 min → Ergebnisangabe: 50 min)

Entsprechend der auftretenden Fehler, die sich erst aus der Analyse von Lösungswegen erschließen (**Diagnose**), wird die Lehrkraft unterschiedliche Maßnahmen ergreifen, um die Schülerinnen und Schüler beim (vollständigen) Modellieren von Situationen zu fördern, beispielsweise:
- Die Aufgabe wird in eigenen Worten wiedergegeben.
- Es werden Skizzen angefertigt.
- Signalwörter werden unterstrichen.
- Das Vorgehen (auch Teilschritte) wird beschrieben.
- Ergebnisse werden an der gegebenen Situation interpretiert und geprüft.

Darüber hinaus kann die Lehrkraft Umrechnungen von Zeitangaben in täglichen Übungen festigen, wie 1,5 min = ... s, ¼ h = ... min, 0,75 min = ... s, 50 s = ... min, 1,25 h = ... min.

Anregungen für den Unterricht

Einfaches Variieren der Bedingungen der Aufgabe ermöglicht bereits eine **Differenzierung** nach Anforderungsbereichen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Dabei sollten Schülerinnen und Schüler auch angehalten werden, ihre Lösungswege zu erklären.

Beispiele:
- Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h.
Gib seine Fahrzeit in Stunden an. (AB I)
Gib seine Fahrzeit in Minuten an. (AB I)
- Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Nach Abschluss von Baumaßnahmen kann er jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren.
Wie viel Stunden ist der LKW dann unterwegs? (AB I)
- Ein LKW fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h, ein zweiter LKW fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Beide LKW sind 30 Minuten unterwegs.
Wie viel Kilometer hat der Schnellere von beiden mehr zurückgelegt? (AB II)
- Peter geht nach einer Wanderung mit seinem Hund nach Hause. Sie müssen noch 6 km laufen.
Peter geht mit 4 km/h, sein Hund rennt mit 12 km/h. Der Hund läuft mit dieser Geschwindigkeit bis zur Haustür, kehrt um, läuft zu Peter und wieder zur Haustür usw. Wie weit läuft der Hund, bis Peter an der Haustür angelangt ist? (K2, AB III)

Aufgabe 25

a) Welche der folgenden 15 Buchstaben sind achsensymmetrisch?
Kreise sie ein.

A B C D E F G H I J K L M N O

b) Gib zwei Buchstaben an, die sowohl achsen- als auch punktsymmetrisch sind.

Lösung (gemäß Kodierung)

a) Lösungsmuster $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ F G $\boxed{H}$ $\boxed{I}$ J $\boxed{K}$ L $\boxed{M}$ N $\boxed{O}$

b) Es werden (mindestens) zwei der Buchstaben H, I, O und X genannt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler müssen Eigenschaften dargestellter geometrischer Objekte bezüglich der Achsen- und Punktsymmetrie analysieren und deren Unterschiede erkennen (L3, K4). Sie bearbeiten mit der Aufgabe bekannte Sachverhalte. Voraussetzungen sind vor allem Kenntnisse über Achsen- und Punktsymmetrie sowie über Objekte mit diesen Eigenschaften. Solche sind ihnen meist vertraut, da im Unterricht an diesen geübt wurde (z.B. mit Verkehrszeichen, Landesflaggen, Spielkarten). Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich aus der Mehrschrittigkeit der Prüfung der Symmetrien.
Wahrscheinlich werden im Aufgabenteil a) bei einigen Schülerinnen und Schülern nicht alle achsensymmetrischen Buchstaben eingekreist sein oder auch solche, für die diese Eigenschaft nicht gilt.
Ob hier eine Nachlässigkeit oder Lücken im begrifflichen Verständnis Ursache sind, lässt sich nur bei der Besprechung der Aufgabe ermitteln. Auf jeden Fall sollten die Schülerinnen und Schüler die durch sie erkannte Eigenschaft begründen.
Bei Aufgabe b) werden die meisten Schülerinnen und Schüler nicht das gesamte Alphabet untersuchen und daher den Buchstaben X nicht als Lösung angeben.

Aufgabe 25

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** kann die gegebene Aufgabe mit der Textverarbeitung des Computers neu erstellt werden, indem
- die Ziffern 0 bis 9 (bzw. die Buchstaben A bis X) in der gleichen Schriftart betrachtet werden, um den Symmetriebegriff zu klären,
- einige der Buchstaben A bis X in vier bis fünf verschiedenen Schriftarten (wie Arial, Times, Courier) analysiert werden.

Eventuell bietet es sich an, eine Öffnung der Aufgabenstellung vorzunehmen (Entdecken und Analysieren von realen Objekten wie von Fotografien oder Kunstwerken). Auch viele innermathematische Bezüge lassen sich im Koordinatensystem oder in der Vierecksfamilie untersuchen. Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** kann dies auf Körpern und Rotationskörper (Flächensymmetrie) ausgedehnt werden. (AB **III**)