

Material zur Weiterarbeit
zur
Vergleichsarbeit im Fach Mathematik im Schuljahrgang 8**Adressaten des Materials**

Standardorientierte Tests, wie der, zu dem das vorliegende Material erarbeitet wurde, zielen zwar auch auf die Leistungserhebung für eine Klasse, sie dienen vor allem aber dazu, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu identifizieren. Daher richtet sich das vorliegende Material mit dieser Zielstellung an die einzelne Lehrkraft, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie im Weiteren an Fachkonferenzen oder andere innerschulische Gruppen.

Aufbau des Materials

Im vorliegenden Material ist jede Aufgabe des Testhefts kommentiert. Umfang und Tiefe der Kommentierung richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zusätzlich am rechten Rand ersichtlich.

Eine Kommentierung zu einer Aufgabe schließt folgende Teile ein:

- Ausweisen der Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik¹,
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler,
- Anregungen für den Unterricht.

An verschiedenen Stellen werden Bezüge zur Veröffentlichung des IQB² „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ hergestellt, da hier für den Sekundarbereich I u. a. eine große Zahl von Aufgaben mit ausgewiesenem Standardbezug und Unterrichts Anregungen gegeben werden.

Bezug des Materials zu den Nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik

Das Testheft, auf das sich die Aufgabenkommentierungen beziehen, ist erstmals im Verbund mehrerer Länder entwickelt worden. Deshalb musste die Erprobung der Aufgaben durch die Pilotierung in allen beteiligten Ländern auch der Feststellung dienen, welches Aufgabenniveau für den gemeinsamen Test bei der Auswahl der Aufgaben möglich ist. Diese Erkenntnisse haben die Zusammenstellung des Testheftes wesentlich beeinflusst, so dass es insbesondere auch bei der durch die kurze Entwicklungszeit beschränkten Aufgabenmenge nicht gelingen konnte, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben für das Testheft nur die „hinführende“ Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf mathematisch interessantere verzichtet werden. Die Kommentierungen im vorliegenden Materials haben nun ermöglicht, diese Teilaufgaben aufzugreifen und weitere Variationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung des Materials

Für einen Mathematikunterricht, der zur Förderung und Weiterentwicklung mathematischer Kompetenzen beitragen soll und in dessen Zentrum auch über längere Zeiträume hinweg der Aufbau dieser Kompetenzen steht, muss die Lehrkraft u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential für dieses Ziel in jeder einzelnen Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann.

Im vorliegenden Material wird daher für jede Aufgabe die Zuordnung der Standardmerkmale (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen kann deutlich gemacht werden, dass

¹ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss.

In: www.kmk.org/schul/home/htm.

² Werner Blum/Christina Drücke-Noe/Ralph Hartung/Olaf Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006

die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zur mathematischen Kompetenz bestimmt. Dabei wird die Aufmerksamkeit der Lehrkraft auf diejenigen Überlegungen gelenkt, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können. Betrachtet werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Testaufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und zu erwartende häufige Fehler sowie Möglichkeiten zur Diagnose. Dies soll die Lehrkraft auch in ihrer Individualdiagnose unterstützen und helfen, Ansätze zur individuellen Förderung aufzudecken.

Darauf aufbauend wird für jede Aufgabe vorgeschlagen, wie diese verändert oder variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Solche Anregungen beinhalten die Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, den Umgang mit verschiedenen Lösungen, eine Diskussion zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts, den Einsatz von Aufgabenvariationen u. a. m. Dabei wird auch deutlich, wie sich Testaufgaben und Unterrichtsaufgaben bzw. Aufgaben für Lernstandserhebungen in der eigenen Klasse unterscheiden können.

Hinweise der Nutzer und für die Nutzer

Hinweise zur Weiterentwicklung des Materials, zur gewählten Präsentationsform sowie zu wichtigen Ergänzungen können an das Niedersächsische Kultusministerium gerichtet werden. Weitere Informationen finden Sie unter <http://cuvo.nibis.de>.

Kommentierungen

Aufgabe 1

Setze das passende Zeichen ein.

	kleiner als < gleich = größer als >	
a) Höhe einer Zimmertür		200 mm
b) Alter eines Schülers		1500 Tage
c) Masse eines Fahrrades		$\frac{1}{2}t$

Lösung (gemäß Kodierung)

- a) Höhe einer Zimmertür > 200 mm
 b) Alter eines Schülers > 1500 Tage
 c) Masse eines Fahrrades < $\frac{1}{2}t$

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten und wählen dazu Einheiten von Größen, insbesondere für Zeit, Masse und Länge situationsgerecht aus (L2).

Dabei werden einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler mathematische Objekte zugeordnet (K3). Es ist jeweils ein Umrechnen der Maßeinheit notwendig (K5). Damit ist die Aufgabe mehrschrittig und bedingt Anforderungsbereich II.

Eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert beim Schüler differenzierte Fähigkeiten in der Arbeit mit Längen, Zeiten und Massen.

Dazu gehört:

- das Verbinden von Größenangaben mit sinnvollen Vorstellungen von Repräsentanten und
- das Umrechnen von Größenangaben in Angaben mit für den jeweiligen Sachverhalt geeignete Maßeinheiten.

Aufgabe 1

Fehler können vermutlich wie folgt erklärt werden:

- Die Schülerinnen und Schüler verbinden mit den gegebenen realen Gegenständen bzw. Sachverhalten keine konkreten Größenvorstellungen.
- Sie haben Schwierigkeiten dabei, die gegebenen Größen so umzurechnen, dass das erfasste Merkmal des realen Gegenstands bzw. Sachverhalts in einer passenden Maßeinheit angegeben wird.

Diagnostische Aussagen allein auf Grund der von den Schülerinnen und Schülern angegebenen Lösungen sind angesichts der Aufgabenstellung in der Regel nicht möglich, da bei falscher Angabe die Ursache des Fehlers nicht deutlich wird. Daher wird die Lehrkraft zur **Diagnose** entweder von den Schülerinnen und Schülern eine Beschreibung ihres Vorgehens einfordern oder die genannten Teilleistungen in einzelnen Aufgaben gesondert prüfen.

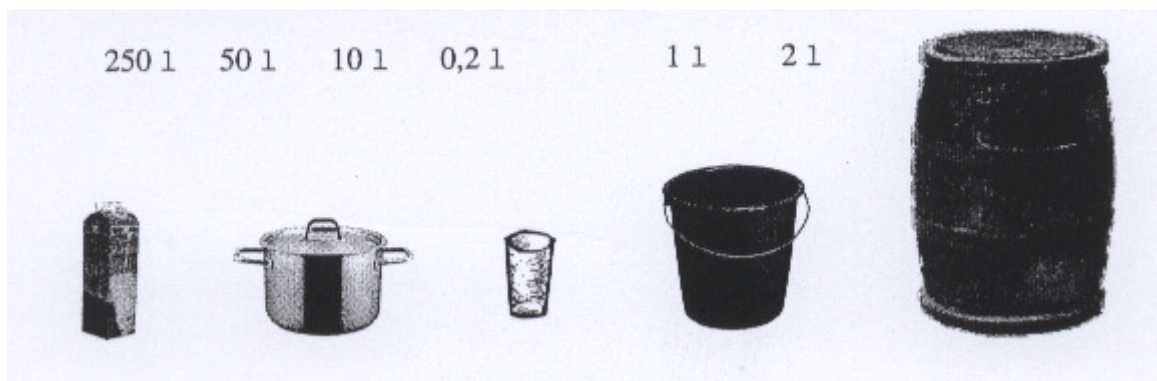
Anregungen für den Unterricht

Die folgenden Übungen bieten sich an:

- Schülerinnen und Schüler nennen zu Maßangaben verschiedener Größen geeignete Repräsentanten.
- Schülerinnen und Schüler machen zu realen Gegenständen bzw. Sachverhalten Größenangaben, die bestimmte Merkmale der Gegenstände bzw. Sachverhalte erfassen. In der Regel genügen hier Schätzungen.
- Schülerinnen und Schüler rechnen Größenangaben um.

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** kann es sinnvoll sein, reale Gegenstände oder Abbildungen von diesen einzubeziehen.

z. B. Ordne den Gefäßen die richtige Größe zu. Welche bleibt übrig?



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Nach den Regeln des Internationalen Tischtennisverbandes ITTF muss ein Tischtennisball einen Durchmesser von exakt 40 mm haben.
 Bei einem Hersteller von Tischtennisbällen befinden sich bei der Endkontrolle 5000 Bälle in einer Box. Es werden zufällig 100 Bälle ausgewählt und deren Durchmesser wird geprüft.
 Bei dieser Auswahl waren 5 Bälle außerhalb der Norm.
 Wie viele Bälle, die nicht der Norm entsprechen, sind voraussichtlich in der ganzen Box enthalten?

☐ A 20 ☐ B 50 ☐ C 250 ☐ D 500 ☐ E 1000

Lösung (gemäß Kodierung)

C (250)

Aufgabe 2

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler müssen zunächst den umfangreichen Text der Aufgabe, der mit der Angabe des Durchmessers auch eine zum Lösen nicht benötigte Zahlenangabe enthält, verstehend lesen (K6). Dabei sollte ihnen bewusst werden, dass ein Vorgang beschrieben wird (Bestimmen der Anzahl der nicht normgerechten Bälle in einer Stichprobe), dessen Ausgang zufällig ist, aber dennoch für die Vorhersage benötigt wird (L5). Auch wenn Schülerinnen und Schüler als Ergebnis ihres Modellierens (K3) eine Dreisatzaufgabe finden (Bei 100 Bällen sind 5 nicht normgerecht, bei 5000 Bällen können es $5 \cdot 50 = 250$ sein (K5).), ist die Einsicht, dass keinesfalls genau 250 Bälle nicht normgerecht sein können, das wesentliche Ergebnis der Aufgabe. In der realen Situation können es beispielsweise 200 oder 255 sein. Eine solche Interpretation des Resultats aus der Dreisatzaufgabe zeigt Verständnis für Zufallsexperimente bei Schülerinnen und Schülern. Darauf ist bei der Besprechung der Aufgabe Wert zu legen. Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich vor allem durch die Mehrschrittigkeit.

Auf Grund des Umfangs des Aufgabentextes wird es einer Reihe von Schülerinnen und Schülern schwer fallen, ein adäquates Situationsmodell zu bilden.

Fehler sind auch zu erwarten, wenn die Zuordnung der entsprechenden Größen nicht gelingt oder wenn der Durchmesser einbezogen wurde.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** könnte man den Umfang des Aufgabentextes reduzieren und auf die überflüssige Angabe des Durchmessers verzichten. Denkbar wäre auch, die Anzahl der Bälle in der Endkontrolle zu reduzieren, so dass die Aufgabenstellung in einer realen Situation nachvollzogen und die Unsicherheit der Vorhersage verdeutlicht werden kann.

Leistungsstarken Schülerinnen und Schülern können weitere Aufgaben angeboten werden, wie sie zu Wahrscheinlichkeit und Zufall in „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S.69 ff. zu finden sind.

Aufgabe 3

Gib an, ob die folgende Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:

„Wenn ich zur Zahl 5 eine Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 5.“

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Aussage ist falsch. Zur Begründung muss auf negative Zahlen oder die Zahl 0 verwiesen werden bzw. in einer Beispielrechnung Bezug genommen werden.

Aufgabe 3

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen Sinn tragende Vorstellungen von rationalen, insbesondere von ganzen Zahlen besitzen, die Operation Addition und die Relation „größer als“ sicher anwenden können (L1). Sie müssen Zusammenhänge erkennen und eine überschaubare Argumentation (Gegenbeispiel) entwickeln können (K1). Diese ist nicht trivial und verdient die Zuordnung zum Anforderungsbereich II.

Folgende **Fehler** sind vermutlich häufig zu erwarten:

- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig, da Addieren für sie mit Vergrößern (Vermehren) gleichbedeutend ist.
 - Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig und führen ein Beispiel (wie $5 + 1 > 5$) als Begründung an. Hier sind falsche Vorstellungen darüber zu vermuten, was erforderlich ist, um die Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit eine Allaussage zu begründen.
- Ein häufig vorkommender Schülerfehler kann auch in der Vorstellung bestehen, dass eine Zahl a immer positiv und eine Zahl $-a$ immer negativ ist.
- Die Schülerinnen und Schüler werten die Aussage als richtig, da sie vermutlich die natürlichen Zahlen als Grundbereich voraussetzen, aber die Zahl Null nicht berücksichtigen. Die Eigenschaft der Null, neutrales Element bezüglich der Addition zu sein, wird vermutlich nicht herangezogen.
- (Vgl. „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ zur Analyse von Fehlvorstellungen, S. 111 ff.)

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht sollten die verschiedenen Bedeutungen des Minuszeichens in der Menge der ganzen bzw. rationalen Zahlen thematisiert werden:

- als Operationszeichen zum Ausdrücken einer Differenz $a - b$, wie $4 - 2 = 2$, $2 - 4 = -2$, $0 - 3 = -3$,
- als Vorzeichen zum Bezeichnen der zu a entgegengesetzten Zahl $-a$, wie 3 ist zu -3 oder -4 ist zu 4 entgegengesetzt.

Da in der gegebenen Aufgabenstellung kein Variablengrundbereich festgelegt ist, sollte im Unterricht auch gezielt auf mögliche Zahlenbereiche eingegangen werden.

Für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler ist die folgende Aufgabe geeignet, um die Bedeutung der Zahl 0 im Bereich der natürlichen Zahlen bewusst zu machen.

„Gib an, ob die Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:

Wenn ich zur Zahl 5 eine natürliche Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 5.“

Speziell zur Arbeit mit negativen Zahlen, aber auch wiederum zur Eigenschaft der Zahl Null bietet sich die folgende Aufgabe an.

„Gib an, ob die Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:

Wenn ich zur Zahl 0 eine ganze bzw. (rationale) Zahl addiere, dann ist das Ergebnis immer größer als 0.“

Schließlich muss inhaltlich verstanden werden, dass es für das Widerlegen einer Allaussage genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben.

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnten aufgefordert werden, selbst Behauptungen bezüglich der Multiplikation oder der Division aufzustellen und diese zu prüfen.

Aufgabe 4

Berechne und gib das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit an.

Ein Auto verbraucht etwa 8 l Benzin je 100 km. Im Tank sind noch etwa 35 l Benzin. Wie weit kann der Fahrer des Autos damit ungefähr noch kommen?

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss die korrekte Hochrechnung auf ca. 437,5 km beinhalten, wobei zusätzliche Relativierungen (Stau etc.) vorgenommen werden können.

Genauigkeit: Circa-Angabe und Runden auf volle km möglich

Aufgabe 4

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Sachsituation vereinfacht als eine proportionale Zuordnung erfassen (K3), die Umrechnung für 35 l als Routineverfahren durchführen (K5) und das Ergebnis sachgerecht angeben (K3). Es sind vertraute und direkt erkennbare Modelle zu nutzen und Routineverfahren zu verwenden (AB I).

Fehlt die Angabe der „genauen“ Lösung, so gibt die geforderte Angabe eines Ergebnisses mit einer sinnvollen Genauigkeit keine Auskunft darüber, wie die Schülerin oder der Schüler vorgegangen ist.

Sind keine zusätzlichen Notizen zum Bearbeitungsweg vorhanden, so sollte man zur **Diagnose** Aufgaben stellen, in denen die beiden Aspekte „Mathematisch modellieren“ und „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ einzeln erkennbar werden. Dies gelingt schon durch Ergänzungen wie „Beschreibe deinen Lösungsweg“.

Anregungen für den Unterricht

Diese enge Testaufgabe bezieht sich nur auf einen kleinen Ausschnitt der zugeordneten Kompetenzen.

Variationen und Öffnungen der Aufgabenstellung sind in vielfältiger Weise möglich und hinreichend bekannt.

Insbesondere sollten aber Ungenauigkeiten und Grenzen der Modellierung (hier: Durchschnittsverbrauch nur bei entsprechenden Randbedingungen, z. B. Geschwindigkeit etc. übertragbar) herausgestellt werden.

Sinnvollerweise werden diese Aspekte nicht isoliert wiederholt, sondern im Rahmen weiterer Modelle (wie quadratische Zusammenhänge) aufgenommen.

Aufgabe 5

Max möchte sich einen Computer für 1050 € kaufen. Von seiner Oma bekommt er dafür 350 €. Er selbst kann monatlich 140 € sparen.
Mit welcher Gleichung kann Max berechnen, wie viele Monate er sparen muss?
Kreuze an.

- ☐ A $1050 \text{ €} = 140 \text{ €} \cdot x$
- ☐ B $x + 350 \text{ €} = 1050 \text{ €}$
- ☐ C $1050 \text{ €} - 350 \text{ €} = 140 \text{ €} \cdot x$
- ☐ D $140 \text{ €} \cdot x - 350 \text{ €} = 1050 \text{ €}$
- ☐ E $350 \text{ €} \cdot x + 140 \text{ €} = 1050 \text{ €}$

Lösung (gemäß Kodierung)

C

Aufgabe 5

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen den mathematischen Zusammenhang zwischen Computerpreis, den monatlichen Sparbeträgen und dem Geldgeschenk der Oma herstellen und als Gleichung ausdrücken (K3). Die gefundene Gleichung ist äquivalent umzuformen, um mit den Antwortangeboten vergleichen zu können (K5). Die Zuordnung zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) ergibt sich, weil Schülerinnen und Schüler die verbale Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs analysieren und interpretieren, also unter Beachtung der Anfangsbedingungen und des monatlichen Sparbetrages die Anzahl der Monate berechnen. Die Aufgabe erfordert ein mehrschrittiges Arbeiten, so dass die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erfolgt.

Fehler sind zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen natürlicher Sprache (Text) und der Darstellung in einer Termstruktur nicht oder nur unvollständig herstellen können (Nichtbeachten des Geldgeschenkes bzw. des monatlichen Sparbetrags, falsche Operationszeichen, Vervielfachen - obwohl das Geldgeschenk einmalig ist).

Bei der Zuordnung der gefundenen Gleichung können auch Fehler beim äquivalenten Umformen entstehen.

Hinzu kommt, dass Schülerinnen und Schüler häufig ihre Ergebnisse nicht an den Ausgangsbedingungen überprüfen.

Anregungen für den Unterricht

Für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler ist es empfehlenswert, die Ausgangsbedingungen zu vereinfachen.

Denkbar wäre, vom Geldgeschenk der Oma zunächst abzusehen und nur nach der Anzahl der zu sparenden Monate zu fragen. Gleichung und Probieren führen schnell zum Ziel. Die errechneten Ergebnisse sind an der Sachsituation zu diskutieren.

Schülerinnen und Schüler, bei denen Schwierigkeiten im einfachen mathematischen Modellieren zu vermuten sind, können mit Übungen wie der folgenden gefördert werden:

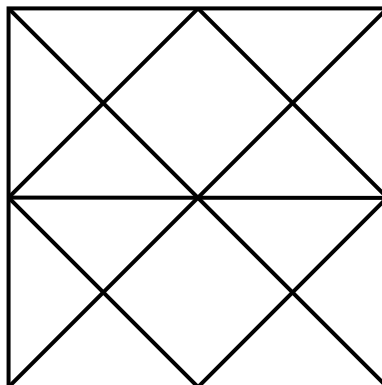
Anzahl der Karten von Uta: a
Anzahl der Karten von Sven: n

	Auswahl		
Uta hat zwei Karten mehr als Sven.	$a - 2 = n$	$a = n$	$a + 2 = n$
Uta gibt 2 Karten ab, jetzt hat sie noch 4 Karten. Wie viele Karten hatte sie vorher?	$a - 2 = 4$	$2a = 4$	$a - 2 = n$
Sven hat doppelt so viele Karten wie Uta.	$0,5n = a$	$2a = n$	$2n = a$
Sven verdoppelt seine Karten auf 12.	$a = 12n$	$2n = 12$	$a + n = 12$

Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler könnte man die Bedingungen der Aufgabe komplexer gestalten.

Aufgabe 6

Ein Quadrat wurde durch seine Diagonalen und einige Verbindungslinien zwischen den Seitenmitten in Teilflächen zerlegt.



Färbe 75% der Gesamtfläche ein. Verwende nur gegebene Teilflächen.

Lösung (gemäß Kodierung)

75 % sind korrekt markiert, wenn alle Teilflächen schraffiert sind mit Ausnahme von (a) entweder 4 kleinen Dreiecken (b) oder 2 Quadraten (c) oder 1 Quadrat und 2 kleinen Dreiecken.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler können diese Aufgabe mit Sinn tragenden Vorstellungen von gebrochenen Zahlen/Prozentzahlen bearbeiten (L1), indem sie 75%, $\frac{3}{4}$ und 0,75 als gleichwertig erkennen (K5) und ihre Vorstellung vom Bruch als Teil eines Ganzen auf die gegebene Darstellung anwenden (K4). Sie bearbeiten bekannte Sachverhalte in einer für sie wahrscheinlich neuen Variante, da insbesondere die senkrechte Symmetrieachse als Verbindungslinie fehlt (AB II).

Voraussetzung für ein erfolgreiches Bearbeiten sind das Verständnis von Bruch und Prozentdarstellungen bezüglich eines Ganzen an verschiedenen mathematischen Objekten.

Da nur gegebene Teilflächen verwendet werden dürfen, wird ein häufig zu erwartender **Fehler** darin bestehen, dass die Schülerinnen und Schüler eines der Quadrate halbieren.

Bei der **Diagnose** auftretender Fehler sollten fehlende Grundvorstellungen von Anteilen von der Lehrkraft besonders beachtet werden.

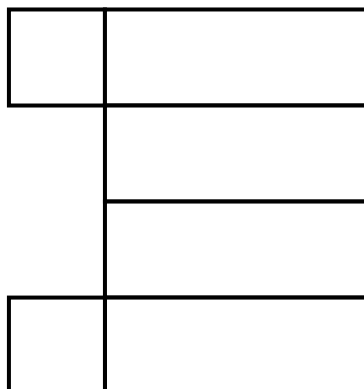
Anregungen für den Unterricht

Aus der gegebenen Aufgabe können auch durch die Schülerinnen und Schüler selbst weitere Aufgaben bezüglich des Färbens von Anteilen entwickelt werden, entweder mit vorgegebenen gemeinen Brüchen, Dezimalzahlen oder Prozentzahlen bzw. durch Verändern der Darstellung, wie

- bei der vorgegebenen Figur die fehlende Symmetrieachse einzeichnen und dann färben lassen (AB I),
- bei „neuen“ Figuren (wie Rechtecken, Dreiecken, Sechsecken) Verbindungslinien einzeichnen und dann färben lassen (AB II).

Aufgabe 7

Sebastian soll das Netz eines Quaders mit quadratischer Grundfläche zeichnen. Seine Skizze sieht wie folgt aus:



Ist Sebastians Skizze korrekt? Begründe deine Entscheidung.

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss zwei Aspekte beinhalten:

- (1.) Die Feststellung, dass die Skizze nicht korrekt ist und
- (2.) die Begründung, dass sich die quadratischen Grundflächen in der Skizze überlagern.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Beim Umgang mit der Darstellung von Körpern (L3) muss hier der Bezug zwischen einem Quader und dem vorgegebenen Netz hergestellt (K4) und die Entscheidung begründet werden (K1). Zur Bearbeitung sind mehrere Schritte notwendig (AB II).

Es sind verschiedene Lösungsstrategien denkbar. In diesem Aufgabenkontext ist die Vorstellung, „aus diesem Netz einen Körper (hier einen Quader) zu falten“, besonders hilfreich. So erscheint die Begründung, dass die quadratische Fläche für eine („die rechte“) Seitenfläche fehlt, zu der durch die Kodierung vorgegebenen Lösung gleichwertig.

Liegt eine Begründung vor, können daraus Rückschlüsse auf die Vorgehensweise gezogen werden. So weist die Formulierung „ein Quadrat müsste auf der rechten Seite sein“ darauf hin, dass der Körper zerlegt wurde. Dabei kann es durchaus andere Zerlegungen geben, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt sein muss.

Ist die Begründung wenig aussagekräftig oder fehlt sie ganz, können zur **Diagnose** weitere Netze bzw. fehlerhafte Netze vorgelegt werden. So kann festgestellt werden, ob Defizite in der Interpretation der Netze (K4) und der damit verknüpften Vorstellung von räumlichen Figuren oder in der Erläuterung der Zusammenhänge (K1) vorliegen.

Anregungen für den Unterricht

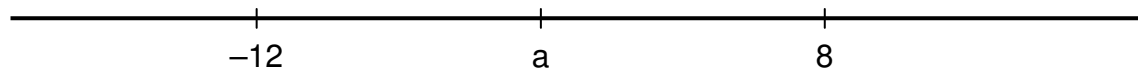
Mögliche Variationen und Ergänzungen der Aufgabe sind vielfältig und hinlänglich bekannt, wie:

- Praktische Anfertigung von Modellen,
- Berechnen bzw. Abschätzen von Oberflächeninhalten (und Volumen),
- Vergleich von Flächen- und Kantenmodellen.

Eine Aufarbeitung von festgestellten Defiziten sollte dabei nicht in einer isolierten Wiederholung bezüglich Netzen von Quadern bestehen, sondern im Zusammenhang mit anderen Körpern erfolgen. Das Arbeiten mit und das Herstellen von verschiedenen Modellen von Prismen, Pyramiden, Kegeln (und exemplarisch komplexeren Körpern) erleichtern gerade auch Schülerinnen und Schülern mit Problemen im Bereich der räumlichen Anschauung den Zugang zu Aufgabenstellungen zur Bestimmung von Volumina und Oberflächeninhalten, wobei in Verbindung damit auf Defizite eingegangen werden kann, die im Rahmen des Tests festgestellt wurden.

Aufgabe 8

- a) Die Zahl a liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen -12 und 8 .



Kreuze an, für welche Zahl a steht.

☐ A -4

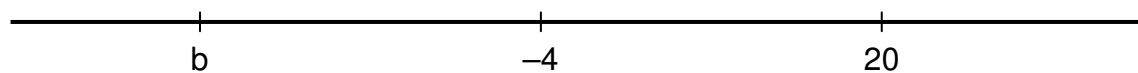
☐ B -2

☐ C -1

☐ D 0

☐ E 2

- b) Die Zahl -4 liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen 20 und der Zahl b .



Kreuze an, für welche Zahl b steht.

☐ A -28

☐ B -24

☐ C -22

☐ D -20

☐ E -16

Lösung (gemäß Kodierung)

- a) B (-2)
b) A (-28)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	a) AB I b) AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe a) erlaubt verschiedene Lösungsstrategien, aus denen die Schülerinnen und Schüler je nach Voraussetzungen auswählen werden:

- Lösung durch Probieren, insbesondere mit Hilfe der gegebenen MC-Antworten im Ausschlussverfahren (K2, K4, K5)
- Graphische Lösung durch Einführung einer Skalierung auf der gegebenen Zahlengerade und näherungsweise Ablesen zur Entscheidung zwischen den MC-Antworten (K4)
- Schrittweises rechnerisches Vorgehen, basierend auf der graphischen Vorstellung (K4, K5): Abstand von -12 und 8 ist 20 , die Hälfte davon ist 10 , $8 - 10 = -2$.
- Algebraischer Ansatz, als Anwendung eines gelernten Verfahrens (K5) oder

als Zusammenfassung obiger Überlegungen: $\frac{-12 + 8}{2} = -2$

Eine **Diagnose** von Schülerfehlern ist aufgrund der vielfältigen Lösungsmöglichkeiten und dem im Test gewählten MC-Format in der Regel nur durch Aufgreifen der Aufgabe im Unterricht möglich.

Anregungen für den Unterricht

Die verschiedenen Lösungsstrategien können im Unterricht besprochen werden und auf ihre Vor- und Nachteile bzw. Grenzen kann ggf. in Form der nachfolgenden Aufgabenvariationen eingegangen werden.

Durch Aufgabenvariationen wird oft Einfluss genommen auf Lösungsstrategien, auf die im Vordergrund stehenden Kompetenzen oder den Anforderungsbereich. Dies wird im Folgenden exemplarisch an der vorliegenden Aufgabe ausgeführt.

Varianten:

1. Formulierung der Aufgabe als offene Aufgabe, ohne MC-Auswahl, was im Unterricht meist der Fall sein wird.

Nach wie vor ist eine Lösung durch Probieren möglich. Sie wird aber etwas andere Strategien erfordern. Beispielsweise kann die Idee des Probierens dann zu einer Skizze führen: Welche Zahl erreiche ich, wenn ich abwechselnd von links und rechts her in 1-er Schritten zur Mitte gehe?

Soweit nicht im unmittelbaren Vorfeld ein algebraisches Verfahren eingeübt wurde, kann man bei einer offenen Fragestellung zusätzlich den gewählten Lösungsweg erklären lassen, woraus sich eine Einbeziehung der Kompetenz Kommunizieren (K6) im Anforderungsbereich II ergibt.

Will man ein graphisches Verfahren als Lösungsweg besonders betonen, bietet sich folgende Variation an:

2. Formulierung als offene Aufgabe wie in 1, aber Verwendung einer Zahlengerade mit Skalierung (vorgegeben oder vom Schüler eingefordert). Hier ist eine Lösung durch „Abzählen“ besonders nahe liegend.

Die Grenzen dieser Lösungsstrategie können dann in der folgenden Variante 3 aufgezeigt werden. Ggf. kann eine solche Variation auch von den Schülerinnen und Schülern erfragt werden: „In welchem Fall verhilft uns dieses Abzählen nicht zu einer exakten Lösung?“ (Vgl. „Bildungsstandards Mathematik konkret“, Teil 3, Kap.1.)

3. Formulierung als offene Aufgabe wie in 1, aber mit anderen Zahlenwerten. Soll beispielsweise eine Zahl in der Mitte zwischen $-12,8$ und $8\frac{1}{3}$ bestimmt werden, wird eine graphische Lösung oder eine Lösung durch Probieren nicht ans Ziel führen. Ein rechnerisches oder algebraisches Verfahren muss angewandt oder erarbeitet werden. Im Falle einer Erarbeitung eines solchen Verfahrens erhält die Aufgabe nennenswerte Anforderungen im Bereich der Kompetenz Probleme mathematisch lösen (K2).

4. Die Veränderung von Zahlenwerten bietet auch die Möglichkeit einer Vereinfachung, insbesondere, wenn man sich zunächst auf natürliche Zahlen beschränkt, wodurch dann die verschiedenen Verfahren auch für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** einsichtig werden, und ggf. auf andere Fälle übertragen werden können. Bei einer Fehleranalyse durch den Lehrer kann dann insbesondere darauf geachtet werden, ob ein Verfahren fehlt bzw. falsch angewandt wird, oder ob ein Rechenfehler, beispielsweise beim Rechnen mit negativen Zahlen, vorliegt.

5. Eine weitere Variante stellt die Teilaufgabe b aus diesem Test dar, in der bei gegebener Mitte eine Grenze gesucht ist.

Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** lassen sich darauf aufbauend Verallgemeinerungen einbeziehen. Gesucht wird nach

- der Zahl m , die auf dem Zahlenstrahl in der Mitte von a und b liegt.
- der Zahl b , wenn a und m gegeben sind.
- (allen) Möglichkeiten für die Zahl b , wenn $a = 5$ und $m > 0$. usw.

6. Ebenso denkbar sind Aufgaben, in denen zu gegebener Mitte verschiedene mögliche Zahlenpaare gesucht werden. Hier können im Sinne einer inneren **Differenzierung** (insbesondere durch die Wahl der gegebenen Mitte) Lösungen auf unterschiedlichem Niveau gefunden werden.

7. Möglich ist auch eine Variation der Aufgabe ohne Bezug zur Zahlengerade: „Bestimme den Mittelwert der Zahlen 12 und -8 .“ Damit wird die mathematische Kompetenz Darstellungen verwenden (K4) zugunsten der mathematischen Kompetenz K5 in den Hintergrund drängt.

Generell erlauben Variationen eine veränderte Schwerpunktsetzung bei den mathematischen Kompetenzen, was in den Variationen 1, 2, 3 und 7 bereits ausgeführt wurde. Nachfolgend wird noch eine Variation vorgestellt, die die Aufgabe öffnet in Richtung der Kompetenzen Mathematisch argumentieren (K1) und Kommunizieren (K6) im Anforderungsbereich III.

8. Die Zahl a liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen den Zahlen b und c .

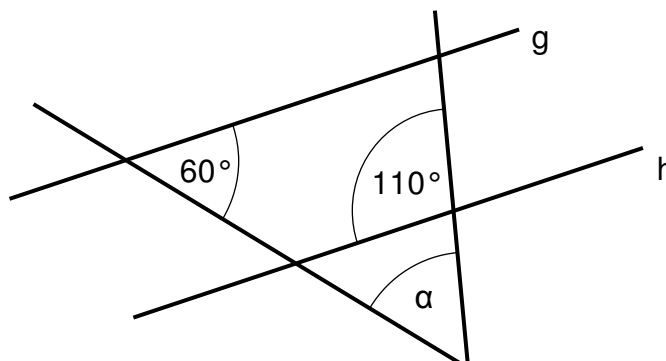
Peter sagt: „Ganz klar, wie man a findet: Man rechnet den Abstand von b und c aus, halbiert ihn, und zählt das Ergebnis zur kleineren Zahl dazu.“

Sandra meint: „Ziemlich umständlich, da rechne ich doch einfach den Mittelwert von b und c aus, fertig.“

Stelle jeweils einen Term auf, der Peters und Sandras Vorschlag entspricht und zeige durch algebraische Umformungen, dass beide Wege zum gleichen Ergebnis führen.

Aufgabe 9

Die Geraden g und h verlaufen parallel zueinander.



Wie groß ist α ?

Dein Vorgehen soll nachvollziehbar sein.

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss zwei Aspekte beinhalten:

- (1) die korrekte Ermittlung des Winkels mit 50° und
- (2) die Beschreibung eines schlüssigen Vorgehens, bei dem implizit (z. B. in einer Zeichnung) oder explizit die Konzepte Stufen- und Nebenwinkel verwendet werden.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur erfolgreichen Bearbeitung dieser Aufgabe müssen die Zusammenhänge zwischen den in der grafischen Darstellung gegebenen Angaben zu Winkelmaßen und dem gesuchten Winkelmaß erkannt und dargestellt werden (K4).

Grundkenntnisse zu Winkeln an geschnittenen Parallelen und zur Winkelsumme im Dreieck müssen zu einem Lösungsweg verbunden werden (K2).

Die Anwendung von Routineverfahren (K5) ist AB I zuzuordnen, aufgrund der Bearbeitung in mehreren Schritten ist die Aufgabe aber insgesamt im AB II anzusiedeln.

Defizite bei der Bearbeitung dieser Aufgabenstellung können u.a. folgende Ursachen haben:

- Die Schülerin bzw. der Schüler erkennt in der Darstellung nicht die entscheidende Figur „Dreieck“ und nutzt die parallelen Geraden nicht.
- Die Schülerin bzw. der Schüler kann die Aussagen über „Winkelsumme im Dreieck“ oder „Winkelmaße an geschnittenen Parallelen“ nicht anwenden.
- Der Schülerin bzw. dem Schüler gelingt es nicht, zwischen den gegebenen Winkelmaßen und dem gesuchten Winkelmaß einen Zusammenhang über die Bestimmung zusätzlicher Winkelmaße herzustellen.

Zur genaueren **Diagnose** erscheint es hier notwendig, zunächst die Beschreibungen der gegebenen Figur einzufordern. Anschließend sollte dann die Beschreibung von Problemlösungsansätzen thematisiert werden.

Anregungen für den Unterricht

Zur Behebung der genannten Defizite bieten sich die folgenden **differenzierenden Übungen** an:

- Die Schülerinnen und Schüler beschreiben, welche Informationen sie dem Text / der Darstellung der Aufgabe entnehmen können. (Z. B. anhand unten stehender Aufgabe 2.)
- Sie bearbeiten Aufgaben, die Aussagen über die Winkelsummen in n-Ecken und zu Winkeln an geschnittenen Geraden erfordern. Die Bestimmung von Winkelgrößen, möglicherweise unterstützt durch ein Programm zur dynamischen Geometrie, kann zur Festigung der Inhalte beitragen.
- Sie bearbeiten Aufgaben, die nur über die Bestimmung von Zwischengrößen lösbar sind und dies z. B. über Fragen nach der Anzahl oder der Beschreibung verschiedener Lösungswege thematisieren.

Beispiele:

Aufgabe 1

Zeichne mit einem Programm zur dynamischen Geometrie ein Dreieck, Viereck, Fünfeck,

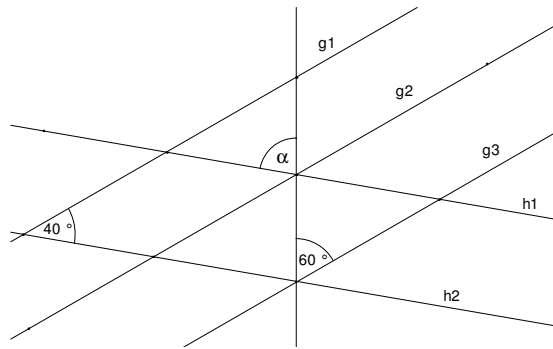
Bestimme die Summe der Innenwinkel.

Variiere die n-Ecke und notiere Deine Feststellungen über die Winkelsumme.

Aufgabe 2

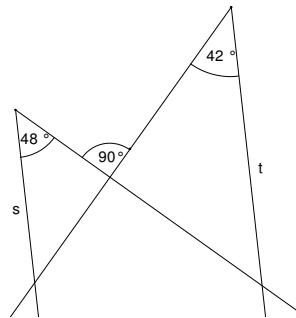
In nebenstehender Zeichnung sind jeweils die Geraden g_1 , g_2 und g_3 sowie h_1 und h_2 parallel zueinander.

- Bestimme die Größe aller in der Zeichnung auftretenden Winkel und trage die Ergebnisse in der Zeichnung ein.
- Beschreibe drei verschiedene Möglichkeiten, das Winkelmaß von α zu bestimmen.
- Untersuche, wie viele Winkelmaße als Zwischenergebnisse mindestens bestimmt werden müssen, bevor man das Winkelmaß von α angeben kann.



Aufgabe 3

- Bestimme die Größe aller in der Zeichnung auftretenden Winkel und trage die Ergebnisse in der Zeichnung ein.
- Begründe, warum die Strahlen s und t parallel sind.
- Untersuche, wie viele Winkelmaße als Zwischenergebnisse mindestens bestimmt werden müssen, bevor man auf die Parallelität schließen kann.



Aufgabe 9

Die Veränderung der Aufgabenstellung zieht eine Veränderung der zu ihrer Lösung erforderlichen mathematischen Kompetenzen mit sich. So sind in Aufgabe 2 deutliche Aspekte der Kompetenzen Kommunizieren (K5) und Argumentieren (K1) zu finden.

Während einfache Beschreibungen und Bestimmungen von Winkelgrößen dem Anforderungsbereich I zuzuordnen sind, erfordern andere Teilaufgaben deutlich mehrschrittige Lösungsverfahren (AB II), die z.B. bei der Untersuchung unterschiedlicher Lösungswege eine Komplexität erreichen, die eine Zuordnung zu AB III begründen.

Aufgabe 3 zeigt eine Variante, die auch **leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler** fordern und fördern kann.

Aufgabe 10

Manuelas Zimmer ist 4,00 m lang, 3,50 m breit und 2,50 m hoch. Eine der beiden großen Wandflächen soll einen gelben Farbanstrich erhalten.



Von der letzten Renovierung ist noch eine halbe Büchse dieser Farbe übrig. Reicht die Menge für den Anstrich der Wand aus? Begründe deine Antwort.

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss drei Aspekte beinhalten:

- (1.) die Schlussfolgerung, dass die Farbe reicht,
- (2.) die Größe der Wandfläche muss korrekt ermittelt worden sein (10 m^2) und
- (3.) angeführt werden, dass die Farbe für 10 m^2 bis $12,5 \text{ m}^2$ reicht.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen Maßangaben aus dem Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse in Bezug auf die Sachsituation (L2). Die Übersetzung der Situation in mathematische Sprache, die Berechnung mit folgender Interpretation des Ergebnisses ist ein einfacher Modellierungsprozess (K3), bei dem Routine- und Kontrollverfahren durchgeführt werden (K5). Er ist mehrschrittig (AB II), erreicht aber nicht eine Komplexität, die eine Zuordnung zu AB III rechtfertigen würde.

Ein wahrscheinlich auftretender **Fehler** (Berechnung der größten Fläche zu 14 m^2) ist auf die ungenaue Interpretation der Angaben zurückzuführen, ferner ist zu erwarten, dass die Bearbeitung manchmal mit der Berechnung der noch vorhandenen Farbmenge ($1,25 \text{ l}$) vorzeitig abgebrochen wird.

Anregungen für den Unterricht

Variationen dieser Aufgabe, auch durch Schülerinnen und Schüler selbst durchgeführt (siehe „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 152 ff), ermöglichen es, den Kontext auszuleuchten und den Realitätsbezug weiter in den Vordergrund zu rücken. Die sich ergebenden Variationen bieten dabei auch Möglichkeiten zur **Binnendifferenzierung**, weil nahezu automatisch leichte und schwierigere Aufgaben entstehen.

Andererseits erfordert der Aufbau und die Erhaltung der bei dieser Aufgabe notwendigen mathematischen Kompetenzen die selbständige Bearbeitung von Aufgaben aus verschiedensten Sachzusammenhängen. So lassen sich bei festgestellten Defiziten Übungen hierzu in anderen Unterrichtseinheiten (z. B. zu quadratischen Zusammenhängen) gut integrieren.

Aufgabe 11

Ordne die Brüche $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$ nach ihrer Größe.

Beginne mit dem kleinsten Bruch.

Lösung (gemäß Kodierung)

$$\frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{6}$$

Aufgabe 11

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabenstellung erfordert keine Dokumentation des Lösungsweges. Die Zuordnung zu Leitidee L1 und allgemeiner mathematischer Kompetenz K5 ist bei allen Lösungswegen gleich. Aufgrund der verständigen Auswahl der Vorgehensweise und des mehrschrittigen Vergleichs ist diese Aufgabe AB II zuzuordnen.

Es sind sehr verschiedene Ansätze denkbar:

- Paarweiser Vergleich mit Hilfe von nennergleichen Bruchzahlen,
- Vergleich durch „Abschätzung“ bezüglich $\frac{1}{2}$ und 1, Vergleich von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$

anhand einfacher Visualisierungen,

- Berechnung von Näherungswerten mit Hilfe des Taschenrechners und Vergleich,
- Alle Brüche werden auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und dann verglichen.

Natürlich sind auch Mischformen möglich.

Ein möglicher **Fehler** kann darin bestehen, dass die geordnete Reihenfolge nicht mit dem kleinsten Bruch begonnen wurde.

Eine grobe Fehlvorstellung zeigt sich, wenn das Ordnen nach der Größe von Zähler oder Nenner erfolgt ist.

Anregungen für den Unterricht

Für eine Wiederholung in der Lerngruppe ist die Darstellung verschiedener Lösungswege und deren Vergleich möglich.

Zur Entwicklung von geeigneten Vorstellungen über die Größe von Bruchzahlen sollten im Unterricht auch Beschreibungen von Lösungswegen, die ohne den Einsatz eines Taschenrechners nachvollziehbar sind, gefordert werden.

Insbesondere sind auch Visualisierungen am Zahlenstrahl von Bedeutung.

Aufgabe 12a

Die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck lässt sich mit dem Term $(n - 2) \cdot 180^\circ$ berechnen.

- a) Berechne die Summe der Innenwinkel für ein 6-Eck.

Lösung (gemäß Kodierung)

720°

Aufgabe 12a

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Berechnung der Winkelgröße (L2) erfolgt hier durch Einsetzen des Wertes 6 für n, ist also Anwendung eines Routineverfahrens (AB I) im Umgang mit Formeln (K5).

Ob falsche Ergebnisse auf Rechenfehlern beruhen oder auf anderen Fehlvorstellungen, **diagnostiziert** man am schnellsten, in dem im Einzelfall die Vorgehensweise beschrieben wird.

Anregungen für den Unterricht

Entsprechende Aufgaben zur Auswertung eines Terms treten im Mathematikunterricht vielfältig auf. **Leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern** mit Defiziten in diesem Bereich sollte hier in den verschiedensten Kontexten die Möglichkeit gegeben werden, selbstständige Bearbeitungen vorzunehmen und hierbei auch immer wieder geeignete Darstellungen (Zeichnungen, Skizzen) zu verwenden bzw. anzufertigen. Dazu gehört auch, die Plausibilität der obigen Aussage für kleine n zu demonstrieren.

Aufgabe 12b

Die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck lässt sich mit dem Term $(n - 2) \cdot 180^\circ$ berechnen.

b) Für welches n-Eck beträgt die Summe der Innenwinkel 540° ?

Lösung (gemäß Kodierung)

Fünfeck oder 5 oder $n=5$

Aufgabe 12b

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Im Kontext der Gesamtaufgabe sind verschiedene Bearbeitungswege für diese Teilaufgabe denkbar.

Nach Bearbeitung der Teilaufgabe a) ist es nahe liegend, für n einen Wert kleiner als 6 anzunehmen und mit diesem den Term zu berechnen. Diese Vorgehensweise begründet auch die Zuordnung zur Leitidee Zahl (L1). Das hierzu notwendige, ggf. mehrschrittige Wechselspiel zwischen Lösungs- und Kontrollverfahren (K5), auch im Sinne von „rückwärts Arbeiten“, lässt die Zuordnung in AB II angemessen erscheinen.

Zur korrekten Lösung gelangt man aber auch, indem man

- die Gleichung $(n - 2) \cdot 180 = 540$ löst (Damit rückt die Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) in den Vordergrund.),
- über das gedankliche Zusammenlegen von Dreiecken (Dreieck 180° ; Viereck 360° ; Fünfeck 540°) vorgeht (Hier Betonung von Raum und Form (L3).) oder
- den funktionalen Zusammenhang (L4) als solchen erkennt und verwendet: „Wenn n um jeweils eins größer wird, vergrößert sich die Winkelsumme um 180° .“

Eine **Diagnose** möglicher Defizite als auch die sichere Einordnung richtiger Bearbeitungen erfordert die Darstellung des Lösungsweges durch die Schülerin bzw. den Schüler. (Siehe zur unterrichtlichen Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, S. 96 ff.)

Anregungen für den Unterricht

Erst nach einer solchen **Diagnose** erscheint es sinnvoll, anhand entsprechender Aufgaben im Folgeunterricht mögliche Defizite aufzuarbeiten.

Aufgabe 12b

Aufgabe 12c

Die Summe der Innenwinkel in einem n -Eck lässt sich mit dem Term $(n - 2) \cdot 180^\circ$ berechnen.

c) In welchem n -Eck ist jeder Innenwinkel 135° groß?

Lösung (gemäß Kodierung)

Achteck oder 8 oder $n=8$

Aufgabe 12c

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Der Umgang mit der gegebenen Formel (K5) ermöglicht im Rahmen der Leitidee L2 die Berechnung von Winkelgrößen und das hier gestellte Problem zu lösen (K2). Die Bearbeitung erfordert mehrere Schritte (AB II).

Zunächst einmal muss übersetzt werden, dass die Formulierung „jeder Innenwinkel“ ist „ 135° groß“ ein regelmäßiges n -Eck erfordert. Dann muss die Winkelsumme im n -Eck (anhand der vorgegebenen Formel) mit dem gegebenen Innenwinkel in Bezug gesetzt werden.

Hierbei ergeben sich verschiedene Lösungswege, die durchaus unterschiedliche Fähigkeiten im Rahmen des Umgangs mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik (K5) erfordern.

Einige Beispiele:

Ansatz I

Die Winkelsumme in dem gesuchten n -Eck lässt sich durch $n \cdot 135^\circ$ und $(n - 2) \cdot 180^\circ$ berechnen. Die beiden Terme müssen gleich sein, also ist die Gleichung $(n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 135^\circ$ zu lösen.

Ansatz II

Die Größe eines Innenwinkels in einem regelmäßigen n-Eck erhält man, indem man die Winkelsumme durch n dividiert. Also notiert man, ausgehend von dem Ergebnis aus b):

n	6	7	8
$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$	$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$	$\frac{900^\circ}{7} \approx 129^\circ$	$\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$

Ansatz III

Die Winkelsumme in dem gesuchten n-Eck lässt sich durch $n \cdot 135^\circ$ und $(n-2) \cdot 180^\circ$ berechnen. Die beiden Terme müssen gleich sein, tabellarische

Lösung:

n	6	7	8
$n \cdot 135^\circ$	810°	945°	1080°
$(n-2) \cdot 180^\circ$	640°	720°	1080°

Ein fehlendes oder falsches Ergebnis erlaubt kaum einen Rückschluss auf einen zugrunde liegenden **Fehler**, zumal bei den hier durchaus sinnvollen tabellarischen (oder auch grafischen) Verfahren der Umgang mit dem eingeführten Taschenrechner durchaus Bedeutung haben kann.

Zur Diagnose siehe auch 12 b).

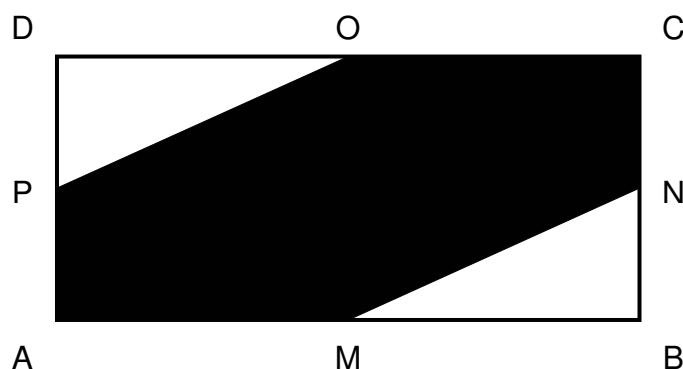
Anregungen für den Unterricht

Durch einen geöffneten Unterricht, in dem sich Schülerinnen und Schüler einzeln oder in Gruppen selbstständig mit geeigneten Problemstellungen auseinandersetzen, ergeben sich häufig unterschiedliche Lösungswege. Diese sollten auch thematisiert werden, wobei hervorzuheben ist, dass bei einer Vielzahl von Problemstellungen algebraische, grafische und tabellarische Verfahren gleichwertig sind. Dennoch kann wegen zur Verfügung stehender Technik bei bestimmten Aufgabenstellungen eines der Verfahren oftmals deutliche Vorteile aufweist.

Gerade **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** können bei tabellarischen oder grafischen Lösungen wichtige Aspekte verschiedener Kompetenzen bearbeiten, auch wenn ihnen formale Umformungen und Lösungswege nicht immer fehlerfrei gelingen.

Aufgabe 13

Gegeben ist ein Rechteck ABCD. Die Punkte M, N, O und P sind Mittelpunkte der Rechteckseiten.



Welcher Anteil der gesamten Rechteckfläche ist dunkel?

Lösung (gemäß Kodierung)

$\frac{3}{4}$ (Äquivalente: zulässig)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen anhand der gegebenen Zeichnung (K4) einen Lösungsweg entwickeln; in der Regel verwenden sie hierzu die Strategie „Zeichnen von Hilfslinien“ (K2) (vgl. auch Bildungsstandards Mathematik: konkret, Teil I, Kapitel 2.2).

Die Schülerinnen und Schüler bauen dabei auf ihren Erfahrungen zur Flächenberechnung durch Flächenzerlegung auf und beziehen ggf. auch Symmetriebetrachtungen mit ein.

Abgesehen von Defiziten in diesen grundlegenden Voraussetzungen können auch **Fehler** bei der Anteilsbildung auftreten.

Da eine Beschreibung des Lösungsweges hier nicht verlangt ist, ist eine Analyse der Schülerfehler anhand der Testbearbeitung nur möglich, wenn die Schülerinnen und Schüler von sich aus einen Lösungsweg dokumentieren. Anderenfalls kann eine **Fehlerdiagnose** erst im Unterricht erfolgen.

Anregungen für den Unterricht

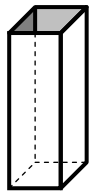
Im Unterricht kann eine Öffnung der Aufgabe in Richtung mathematisches Kommunizieren (K6) erfolgen, indem eine Beschreibung oder Erklärung des Lösungswegs gefordert wird, wie es ja auch in Leistungserhebungen meist der Fall sein wird. Dies erleichtert Fehleranalyse und **Diagnose**.

Bei festgestellten Defiziten kann nicht nur durch eine direkte Wiederholung reagiert werden, sondern auch im Rahmen einer Vernetzung bei verwandten Themen: Andere Figuren bzw. auch andere Körper ermöglichen ähnliche Fragestellungen. Es bietet sich an, entsprechende Fragestellungen auch von Schülerinnen und Schülern selbst erfinden zu lassen (völlig frei, oder mit vorgegebenem Flächenanteil), was insbesondere eine **innere Differenzierung** ermöglicht.

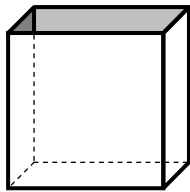
Grundsätzlich können die beiden in obiger Aufgabe auftretenden Anforderungsfelder „Flächenzerlegung“ und „Anteile“ auch getrennt vertieft werden, was insbesondere **leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern** entgegenkommt.

Aufgabe 14

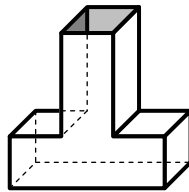
Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.



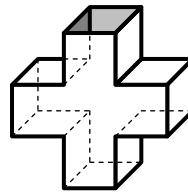
B1



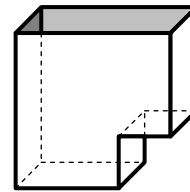
B2



B3

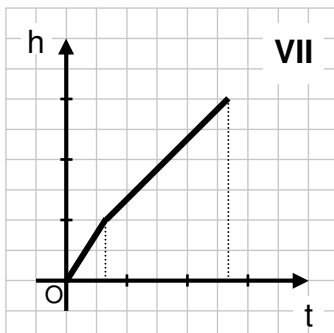
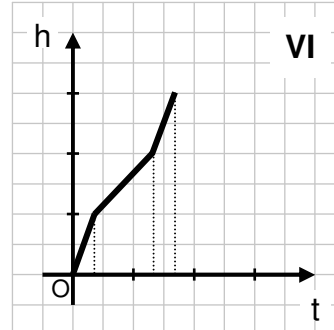
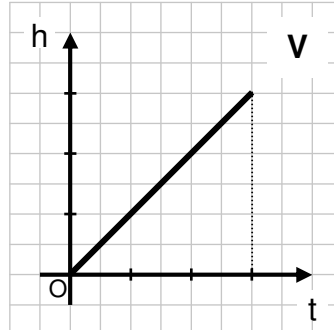
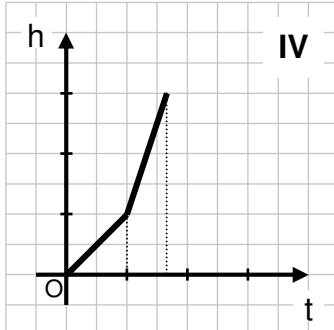
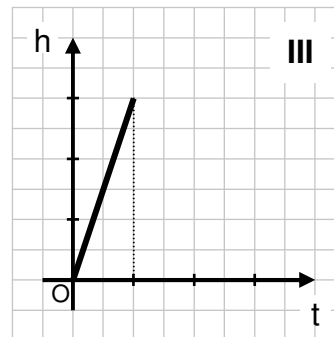
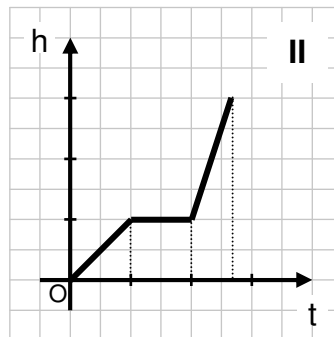
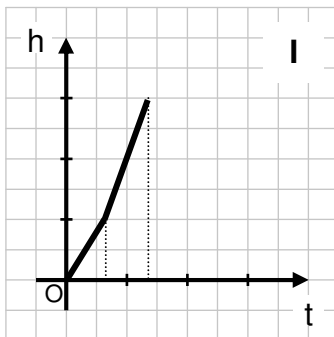


B4



B5

Die folgenden grafischen Darstellungen geben die Höhe h des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Füllzeit t an.



Ordne den Behältern die zugehörigen Graphen zu:

B1 → ____

B2 → ____

B3 → ____

B4 → ____

B5 → ____

Lösung (gemäß Kodierung)

B1 → III / B2 → V / B3 → IV / B4 → VI / B5 → VII

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen aus dem beschreibenden Text die Informationen über den Füllvorgang entnehmen und erkennen, dass der Wasserstand unterschiedlich schnell steigt, und zwar in „engen“ Gefäßteilen schneller als in „weiten“ Gefäßteilen (schnelleres Steigen – größere Steigung). Anhand dieses Zusammenhangs sind dann die grafischen Darstellungen der Füllvorgänge zu identifizieren (K3, K4).

Insbesondere wird hier der Zusammenhang zwischen der Änderung einer Größe und der Steigung des zugehörigen Graphen bearbeitet (Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen (K4). Auf Grund der Mehrschrittigkeit ist AB II zuzuordnen.

Bei fehlenden oder überwiegend falschen Antworten, lassen sich Ursachen oft nur durch das Einfordern einer Erläuterung erschließen. Durch einige **Fehler** kann auf mögliche zugrunde liegende Fehlvorstellungen geschlossen werden:

B1 → V B2 → III B3 → VII B5 → IV	Steiler Graph bedeutet „viel Wasser“, Verwechslung der absoluten Größe mit der Änderungsrate. Es ist kein Vergleich mit den anderen Zuordnungen unter dem Aspekt Füllzeit erfolgt.
B3 → I	Qualitativ durchaus sinnvoll, quantitative Überlegungen (auch im Vergleich zu den anderen Körpern / Graphen) fehlen, insbesondere wurde die Füllzeit nicht beachtet.
B4 → II	Unreflektiertes Umsetzen des optischen Eindrucks.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler** bietet es sich an, Aufgaben mit weniger Auswahlmöglichkeiten zu stellen. Dabei können auch zu einzelnen Körpern die Graphen erstellt werden und umgekehrt. Beschreibungen oder „Geschichten“ zu den Graphen verschieben zwar die Anforderungen zur mathematischen Kompetenz Kommunizieren (K6), erleichtern aber gerade für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler das Verständnis.

Die Möglichkeit, entsprechende Fragestellungen auch mit anderen Funktionsklassen als den linearen Funktionen zu bearbeiten, erschließt eine Vielzahl von Aufgaben, die auch Fördermöglichkeiten für **leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler** bieten.

Aufgabe 15

Begründe, warum es keine Dreiecke ABC mit den gegebenen Stücken gibt.

- a) $a = 2,8 \text{ cm}$ $b = 8,5 \text{ cm}$ $c = 5,1 \text{ cm}$
 b) $b = 5,9 \text{ cm}$ $c = 6,8 \text{ cm}$ $\beta = 125^\circ$

Lösung (gemäß Kodierung)

- a) Entweder muss Bezug genommen werden auf die Dreiecks-Ungleichung („Laut Dreiecks-Ungleichung müsste $a + c > b$ sein, es gilt aber $a + c < b$ “). Alternativ kann anhand des konkreten Konstruktionsversuchs gezeigt werden, dass es dieses Dreieck nicht gibt.
 b) Es muss entweder erkannt werden, dass der gegebene Winkel nicht der größten Seite gegenüber liegt. Alternativ kann anhand des konkreten Konstruktionsversuchs gezeigt werden, dass es dieses Dreieck nicht gibt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In beiden Teilaufgaben sind entweder aufgrund der Eigenschaften und Beziehungen im Dreieck oder aufgrund von Konstruktionen Fragen zur Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben zu bearbeiten (L3). Neben der eigentlichen Problemlösung (K2) wird hier ausdrücklich eine Begründung eingefordert (K1), die eine überschaubare, aber dennoch mehrschrittige Argumentation erfordert (AB II).

Die Kenntnis der Kongruenzsätze kann eine Voraussetzung zur Bearbeitung der Aufgabe sein, zur Argumentation sind jedoch Erfahrungen bei der Konstruktion von Dreiecken zielführender.

Durch die Aufgabenstellung „Begründe, warum es keine ... gibt.“ wird vorgegeben, dass es keine derartigen Dreiecke gibt. Vor allem, wenn keine Antwort gegeben wird, sind zur **Diagnose** weitere Fragestellungen notwendig. Hier bieten sich unter anderem offenere Fragestellungen an, wie „Untersuche, ob es ... gibt.“, um festzustellen, ob durch die vorschnelle Zuordnung zu einem Kongruenzsatz (SSS, SSW) mit der Aussage „Es gibt ein Dreieck.“ eine Fehlvorstellung zugrunde liegt.

Für Teilaufgabe b) ist eine vollständige Lösung wünschenswert, die über die in der Kodierung eingeforderte, hinausgeht. Die Aussage „Der gegebene Winkel liegt nicht der größeren Seite gegenüber.“ sagt nur aus, dass es keinen Kongruenzsatz gibt, nach dem die Konstruktion eindeutig ist. Ob es keine oder zwei Dreiecke oder genau ein Dreieck gibt, kann nur durch zusätzliche Argumente belegt werden. Hier reicht es aus, dass in dem vorliegenden Fall der gegebene Winkel β größer als 90° ist. Bei einem Konstruktionsversuch wird sich zeigen, dass wegen $b < c$ ein Kreis mit dem Radius b um A den freien Schenkel des Winkels β nicht schneidet, das Dreieck also nicht konstruierbar ist.

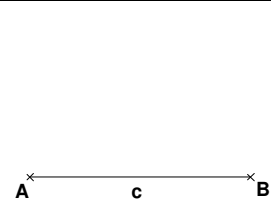
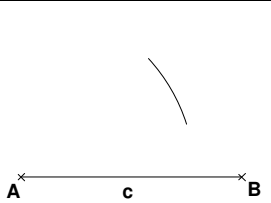
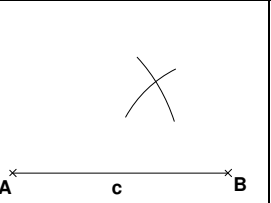
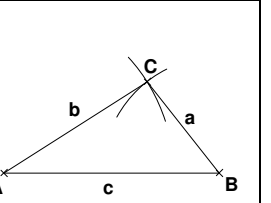
Anregungen für den Unterricht

Beispiele zur Konstruktion von Dreiecken können unter verschiedenen Aspekten geordnet werden. Dabei sollten Beispiele folgender Typen auftreten:

- Vorgaben ergeben (bis auf Kongruenz) eindeutige Dreiecke (hier auch eine Seite mit zwei Winkeln, von denen einer nicht an der Seite anliegt, damit deutlich wird, dass es Fälle gibt, in denen die Konstruktion sich möglicherweise nicht direkt erschließt, aber dennoch möglich ist)
- Vorgaben ergeben kein Dreieck (wie die hier vorgegebenen, aber auch bei Vorgabe von drei Winkeln mit Winkelsumme größer als 180°)
- Vorgaben sind nicht eindeutig (drei Winkel mit Winkelsumme 180° / zwei Seiten und ein Winkel, der der kürzeren Seite gegenüber liegt, mit „zwei Lösungsdreiecken“)

Zur Untersuchung von vielen Beispielen und der Auslotung von Grenzfällen bietet sich der Einsatz eines Programms zur dynamischen Geometrie an.

Die Dokumentation der Vorgehensweise kann z. B. über „Filmbilder mit Untertiteln“, die von den Schülerinnen und Schülern erstellt werden, erfolgen.

Gegeben: a, b, c			
			
Strecke c	Kreis um A mit Radius b	Kreis um B mit Radius a	Dreieck vervollständigen

Aufgabe 16

Corinna und Sebastian haben die Ergebnisse einer Verkehrszählung in einer Tabelle zusammengestellt:

PKW	LKW	Busse	Motorräder
50%	26%	8%	16%

Corinna wird nach Schulschluss von ihrer Freundin nach der Anzahl der jeweils gezählten Fahrzeuge gefragt. Da Sebastian die Strichliste mit nach Hause genommen hat, versucht Corinna sich zu erinnern. Sie weiß genau, dass sie 13 LKW gezählt haben.

Berechne aus der Tabelle und Corinnas Aussage, wie viele Motorräder gezählt wurden.

Lösung (gemäß Kodierung)

8

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen den Text und die eingebundene Tabelle verstehend lesen (K6). Damit verbunden ist das Eindenken in die reale Situation, also Modellierungsfähigkeit (K3). Mathematisch geht es um die Vertrautheit mit Prozentsätzen (Anteilen) und die Fähigkeit, mit linearen Zusammenhängen umzugehen. Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe durch Nutzung proportionaler Zuordnungen oder mit Hilfe der Prozentrechnung lösen. Dies erfordert, den Begriff der Proportionalität bzw. Begriffe der Prozentrechnung sachgerecht zu verwenden und Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen zu nutzen (L1) sowie Lösungsverfahren auszuführen (K5). Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten bekannte Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten entsprechend der Situation verknüpft werden. Die Bearbeitung erfordert mehrere Schritte (AB II), ohne dass eine Verallgemeinerung oder vertiefende Reflexion notwendig ist.

Fehler können u. a. durch eine falsche Verknüpfung von Text und Tabelle, insbesondere über einen „verdrehten“ Ansatz (z.B. 13 als Grundwert) auftreten. Zur **Diagnose** können weiterhin Grundkenntnisse der Proportionalität und Prozentrechnung auf diesbezügliche Lücken überprüft werden. Es sollte auch festgestellt werden (ggf. durch Vorrechnen, Erklären, Begründen), ob notwendige Kenntnisse und Fähigkeiten ausreichend gefestigt bzw. verknüpft sind.

Darüber hinaus können Übungen zum Zusammenhang von Bruch – Dezimalbruch und Prozentangaben erfolgen. Diese kann man mit Kärtchen oder Tabellen durchführen, wobei hier abwechselnd zwei der drei Spalten abzudecken sind.

Beispiele: $3/100 = 0,03 = 3\%$,
 $4/5 = 0,8 = 80\%$,
 $1/3 = 0,\bar{3} = 33,\bar{3}\%$,
 $5/4 = 1,25 = 125\%$

Anregungen für den Unterricht

Aus der gegebenen Aufgabe können zur **Differenzierung** weitere Aufgaben bezüglich der Prozentrechnung entwickelt werden, wie:

- Ausgehend von den gegebenen Werten in der Tabelle wird die Gesamtzahl aller Fahrzeuge (Grundwert) vorgegeben. Die Anzahl der einzelnen angegebenen Verkehrsmittel ist zu berechnen (AB I).
- Unter Beibehaltung der gegebenen Werte in der Tabelle wird eine „einfache“ Zahl für die Anzahl der Pkw (für 50%) vorgegeben. Die übrigen Anzahlen sind zu berechnen (AB I).
- Bei anderen Prozentsätzen und Prozentwerten (z.B. 12,5%, 97 Fahrzeuge, andere Tabellenspalte) kann eine analoge Aufgabe gestellt werden (AB II).
- Eine analoge Aufgabe mit Vorgabe eines Diagramms statt einer Tabelle wird gestellt (AB II , ggf. auch K4).
- Eine weitere analoge Aufgabe entsteht, wenn die Werte in der Tabelle als Prozentzahl, gemeiner Bruch und/oder Dezimalzahl gegeben werden (AB II).
- Ähnliche Aufgabenstellungen bieten sich mit anderen Sachverhalten (z.B. Länge des Schulweges, Anzahl der Schülerinnen und Schüler einer Schule pro Klassenstufe, ...) an (AB II).
- Als Säulendiagramm wird die Lösungshäufigkeit einer Aufgabe in Prozent jeweils für Aufgabe 1, 2, 3 und 4 vorgegeben, und zwar für Schulteil A (120 Schülerinnen und Schüler) und Schulteil B (180 Schülerinnen und Schüler). Es ist ein Diagramm für die gesamte Schule zu erstellen (AB III).

Aufgabe 17

Gegeben ist der Term $2 - 3a^2$

- a) Berechne den Wert des Terms für $a = \frac{1}{2}$.
- b) Für welches a nimmt der Term den Wert -10 an?

Lösung (gemäß Kodierung)

- a) $\frac{5}{4}$ Äquivalente: zulässig
- b) 2 oder -2 (eine Angabe genügt)

Aufgabe 17

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	a) Zahl (L1) b) Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	a) AB I b) AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe erfordert von Schülerinnen und Schülern Vertrautheit mit Variablen. Bei b) sind einfache quadratische Gleichungen zu lösen (L4), bei a) sind Termwertbestimmung (L1) erforderlich. In beiden Teilaufgaben wird mit dem gegebenem Term gearbeitet (K5), und zwar vorwärts als Routineverfahren (AB I) und rückwärts in anspruchsvolleren Schritten (AB II).

Wenn bei a) **Fehler** auftreten, fehlt entweder die unverzichtbare Grundvorstellung von Variablen (Platzhaltern) und muss dann sorgfältig aufgebaut werden. Es kann aber auch an einem Fehler beim Bruchrechnen liegen. Zutreffendes kann leicht festgestellt werden, indem die Aufgabe mit einem ganzzahligen Wert für a variiert wird.

Wenn b) nicht richtig gelöst wurde, sollten **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** zunächst aufgefordert werden, durch Probieren Lösungen zu finden. Verfahren durch Äquivalenzumformungen, Gleichungen zu lösen, sollten erst entwickelt und geübt werden, wenn beim Schüler gefestigte Grundvorstellungen von Variablen und Gleichungen vorhanden sind.

Anregungen für den Unterricht

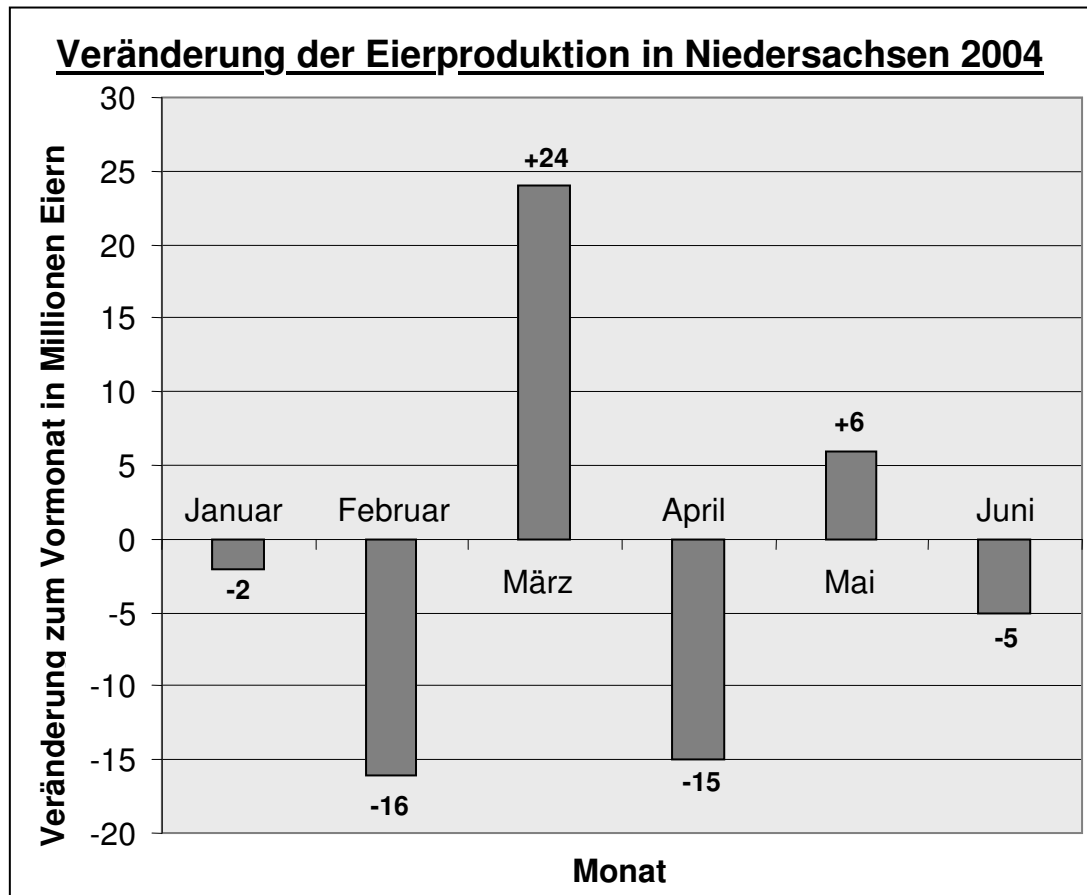
Neben den Techniken (K5) zum Lösen von Gleichungen ist die Übersetzung von Problemsituationen in Gleichungen genau so wichtig (K3).

Natürlich kann die Aufgabe durch vielfältige andere Gleichungen variiert werden. Es ist auch sinnvoll, eine Vernetzung zur grafischen Lösung von Gleichungen und zur Leitidee des „funktionalen Zusammenhangs“ (L4) vorzunehmen. Das Lösen von Gleichungen kann als Urbildsuche oder als Nullstellenbestimmung bei Funktionen aufgefasst werden.

Aufgabe 18

Viele der in Deutschland verbrauchten Eier werden in Niedersachsen gelegt. Im Jahr 2003 waren dies 3434 Millionen Eier, davon 283 Millionen Eier im Dezember 2003.

Für das Folgejahr ist im untenstehenden Diagramm die Zu- oder Abnahme zum jeweiligen Vormonat dargestellt. Zum Beispiel sind im März 24 Millionen Eier mehr verkauft worden als im Februar 2004.



Quelle: Niedersächsisches Landesamt für Statistik

Wie viele Eier werden im Juni im Vergleich zum Januar verkauft?

- ☐ A 38 Millionen weniger
- ☐ B 36 Millionen weniger
- ☐ C 8 Millionen weniger
- ☐ D 6 Millionen weniger
- ☐ E 5 Millionen weniger

Lösung (gemäß Kodierung)

D (6 Millionen weniger)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Daten und Zufall (L5) Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe erfordert von Schülerinnen und Schülern Textverständnis (K6) und in einem gewissen Sinne „iteratives Denken“. Graphisch dargestellte Daten müssen interpretiert werden (L5). Wenn man an die Leitidee „Funktionales Denken“ (L4) anknüpft, so wird hier die Grundvorstellung der „Änderungsstärke“ angesprochen. Es müssen ungeübte (AB II) mathematisch-formale Darstellungen mit Sinn verbunden und interpretiert werden (K4).

Fehler bei der Bearbeitung dieser Aufgabenstellung können folgende Ursachen haben: Die Daten der Grafik werden nicht als Veränderung zum Vormonat gelesen, sondern absolut interpretiert oder nur relativ zum Januar. Die anderen Auswahlantworten ergeben sich ebenfalls aus Fehlinterpretationen des Diagramms:

- A nur Abnahme, Bezug Dezember,
- B nur Abnahme, Bezug Januar,
- C Gesamtbilanz, Bezug Dezember,
- E nur Wert für Juni beachtet

Anregungen für den Unterricht

Ein Weiterarbeiten mit der Aufgabe bietet sich an:

- Darstellung der absoluten Eierproduktion in Niedersachsen im Jahre 2004 als Balkendiagramm oder Polygonzug,
- Betrachtung sinnvoller prozentualer Daten,
- Vertiefung der Propädeutik „Änderungsrate“ an anderen Beispielen, wie Geschwindigkeit, Temperatur.

Aufgabe 19

Zwei Klassen mit insgesamt 53 Schülern und 2 Lehrern mieten für eine Klassenfahrt einen Bus zum Festpreis. Für jede mitfahrende Person betragen die Reisekosten 34 €. Kurzfristig werden 5 Schüler krank. Wie viel Euro kostet die Busfahrt nun pro Person?

Lösung (gemäß Kodierung)

37,40

Aufgabe 19

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler lösen ein realitätsnahes Problem im Zusammenhang mit linearen Zuordnungen, Proportionalitäten oder Antiproportionalitäten (L4). Zur Lösung der Aufgabe müssen sie die im Text gegebenen mathematischen Zusammenhänge erkennen und in einen Term übersetzen (K3). Verschiedene Modellierungen sind möglich, wie

- $\frac{55 \cdot 34,00 \text{ €}}{50}$, wobei die Verteilung der gesamten Reisekosten auf die

tatsächlich Mitfahrenden in gleicher Weise erfolgt oder

- $\frac{5 \cdot 34,00 \text{ €}}{50} + 34,00 \text{ €}$, wobei auf jeden Mitfahrenden noch zusätzlich zu den

ursprünglich 34,00 € der Fahrpreis der fünf kranken Schüler aufgeteilt wird.

Zur Lösung der aufgestellten Terme reicht die Anwendung der vier Grundrechenarten (K5). Da zur Lösung mehrere Arbeitsschritte nötig sind, ist AB II zugeordnet.

Für das erfolgreiche Bearbeiten der Aufgabe sollten die Schüler sicher im Aufstellen von Proportionalitäten und im Mathematisieren einfacher realitätsnaher Zusammenhänge sein, wie sie die Aufgabenstellung enthält. Ein häufiger **Fehler** dürfte sein, dass Verhältnisse falsch aufgestellt werden,

etwa $\frac{50 \cdot 34,00 \text{ €}}{55} = 30,91 \text{ €}$ anstelle von $\frac{55 \cdot 34,00 \text{ €}}{50} = 37,40 \text{ €}$.

Außerdem kann es Schülerinnen und Schüler geben, die die fünf erkrankten Schülerinnen und Schüler nicht von der Schülergesamtzahl subtrahieren,

sondern dazu addieren, also wie folgt rechnen: $\frac{55 \cdot 34,00 \text{ €}}{60} = 31,17 \text{ €}$.

Nicht auszuschließen ist auch, dass nur der Aufpreis pro Person berechnet wird: $\frac{5 \cdot 34,00 \text{ €}}{50}$. Möglichkeiten für die **Diagnose** bieten sich ggf. an Hand der

schriftlichen Notizen im Testheft oder bei der Diskussion von Lösungswegen im Unterricht, wozu Schülerinnen oder Schüler mit dem Beschreiben und Vergleichen ihrer Lösungswege beitragen sollten.

Anregungen für den Unterricht

Der Inhalt der Aufgabenstellung ist aus der Erfahrungswelt der Schüler und bietet dadurch reichhaltige Möglichkeiten, Bedingungen der Aufgabe unter verschiedener Sicht lebensnah zu diskutieren. Folgende Fragen können dabei beachtet werden: Sollten die erkrankten Schülerinnen und Schüler selbst einen Teil der Fahrtkosten übernehmen oder haben sie für Ersatz zu sorgen, damit der Fahrpreis für die Mitfahrer nicht zu hoch wird? Zahlen die beiden Lehrkräfte selbst auch den Fahrpreis? Sollte es Stornierungsfristen geben u. a. m.? Die gefundenen Antworten bieten mehrere Variationsmöglichkeiten für die gegebene Aufgabe: Wenn jemand bei einer Busfahrt kurzfristig krank wird, dann kann es sein, dass ein bestimmter Betrag oder ein bestimmter prozentualer Anteil am Fahrpreis trotzdem erhoben oder bei Vorkasse einbehalten wird. Auch könnte man eine Staffelung vorsehen, wie: Bei Erkrankung bis 6 Tage vor Fahrtbeginn gibt es noch 80%, bis 4 Tage vor Fahrtbeginn 50% und bis 2 Tage vor Fahrtbeginn noch 25% Rückerstattung des Fahrpreises.

Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** bietet sich hier an, die Anzahl der kranken Personen zu variieren. Anstelle einer konkreten Anzahl von kranken Personen kann hier mit der Variablen x ein Term aufgestellt werden, in dem der Fahrpreis abhängig von x ist: $\frac{55 \cdot 34,00 \text{ €}}{(55 - x)}$. Diese Aufgabe wäre dann dem

Anforderungsbereich III zuzuordnen und könnte ein Einstieg in antiproportionale Zuordnungen sein.

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** bietet sich an, den Text zuerst in eine Text-Term-Tabelle zu übertragen, um dann einen Lösungsweg besser zu erkennen und umzusetzen.

Aufgabe 20

Du siehst auf dem Bild den „Berliner Bogen“, ein berühmtes modernes Bürogebäude in Hamburg.

Die hier sichtbare Frontfläche ist ungefähr 35 m hoch und 70 m breit.

Bestimme den ungefähren Flächeninhalt der Frontfläche.



Bild: Jörg Hempel

a) Kreuze die sinnvolle Lösung an.

☐ A 500 m²

☐ B 1000 m²

☐ C 1200 m²

☐ D 1600 m²

☐ E 2500 m²

☐ F 3000 m²

b) Begründe deine Antwort.

Lösung (gemäß Kodierung)

a) D (1600 m²)

b) Schlüssige Begründung, z. B. über eine **Rechteckfläche** (Die betrachtete Frontfläche ist Teilfläche einer Rechteckfläche von $35 \cdot 70 \text{ m}^2$, wobei sie kleiner sein muss. Andererseits ist die Frontfläche größer als die Hälfte dieser Rechteckfläche bzw. einer Dreiecksfläche von $0,5 \cdot 35 \cdot 70 \text{ m}^2$.) oder einen **Halbkreis** (Die Frontfläche wird etwas kleiner sein als ein Halbkreis mit Radius 35 m. Ein solcher Halbkreis hätte den Flächeninhalt: $((35 \text{ m})^2 \cdot \pi)/2$. Daher erscheint der nächst kleinere Wert sinnvoll.)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	a) Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) b) Mathematisch argumentieren (K1)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe erfordert von Schülerinnen und Schülern Grundvorstellungen von Flächeninhalten und deren Größenordnungen (L2), außerdem die Fähigkeit zu Schätzungen bzw. Überschlagsrechnungen und Einschachtelungen. Diese Vorstellungen müssen in Rechenoperationen übersetzt werden (K3, K4) und begründet werden (K1). Bekanntes muss in einem neuen Zusammenhang verwendet werden (AB II).

Fehler, die auf falschen Vorstellungen von Größenordnungen beruhen können, sind bei absurden (geratenen) Antworten diagnostizierbar.

Anregungen für den Unterricht

Die Aufgabe kann gut verwendet werden, um erste Inhalte von krummlinig begrenzten Flächen näherungsweise zu bestimmen. Im Unterricht sollte mit der „Kästchen-Zählmethode“ ausgemessen werden. Dazu sollte als weiteres Beispiel eine „unmathematische“ Fläche – etwa die einer Landfläche in einem Atlas näherungsweise bestimmt werden. Auch das Modellieren der gegebenen Frontfläche durch berechenbare einfache geometrische Figuren (wie gleichseitiges Dreieck, Halbkreis u. Ä.) sollte diskutiert werden, und zwar hinsichtlich der Qualität der Modellierung, auch wenn Kriterien hierfür erst im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden können. An weiteren Beispielen (Nullstellen, „propädeutisches Pi“, ...) kann die Einschachtelungsmethode zu Approximation von unbekannten Größen erarbeitet bzw. vertieft werden. Die Parabel kann natürlich an dieser Stelle auch erstmals propädeutisch behandelt werden. Das führt aber weg von der hier fundamentalen Idee der Flächenmessung.

Aufgabe 21

Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Nach Abschluss von Baumaßnahmen kann er jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren.

Wie viel Fahrzeit spart er ein?
Kreuze die richtige Antwort an.

☐ A 10 min ☐ B 30 min ☐ C 50 min ☐ D 1,0 h ☐ E 2,5 h

Lösung (gemäß Kodierung)

B (30 min)

Aufgabe 21

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler setzen die vorgegebene Situation in eine mathematische Struktur um (K3). Dabei übersetzen sie natürliche Sprache in formale Sprache und umgekehrt und führen Lösungsverfahren aus (K5). Konkret werden die Schülerinnen und Schüler, ausgehend von der Geschwindigkeits- und Entfernungsangabe, über die Eigenschaften der möglichen Zuordnungen auf die benötigte Fahrzeit schließen. Zum Abgleich mit den angegebenen Auswahlmöglichkeiten ist darüber hinaus eine einfache Umrechnungen von Zeitangaben erforderlich (L2). Auf Grund der Mehrschrittigkeit wurde Anforderungsbereich II zugeordnet.

Zu erwartende **Fehler** können u.a. folgende sein:

- Schülerinnen und Schüler verwenden nur die Größen, die Zeiteinheiten enthalten, und subtrahieren die Zahlenwerte, ohne die Einheiten zu berücksichtigen. Das Ergebnis wird nicht in der gegebenen Sachsituation interpretiert und geprüft. (60km/h - 50km/h → 10 → Ergebnisangabe: 10min)
- Für die Geschwindigkeit von 60km/h wird eine Fahrzeit von 2,5 Stunden berechnet, aber die Frage nach der Zeiteinsparung nicht mehr beantwortet. (→ Ergebnisangabe: 2,5h)

- Es wird die Zeiteinsparung von 0,5 h richtig berechnet und dann falsch in Minuten umgerechnet. ($1\text{ h} = 100\text{ min} \rightarrow 0,5\text{ h} = 50\text{ min} \rightarrow$ Ergebnisangabe: 50 min)

Entsprechend der auftretenden Fehler, die sich erst aus der Analyse von Lösungswegen erschließen (**Diagnose**), wird die Lehrkraft unterschiedliche Maßnahmen ergreifen, um die Schülerinnen und Schüler beim (vollständigen) Modellieren von Situationen zu fördern, beispielsweise:

- Die Aufgabe wird in eigenen Worten wiedergegeben.
- Es werden Skizzen angefertigt.
- Signalwörter werden unterstrichen.
- Das Vorgehen (auch Teilschritte) wird beschrieben.
- Ergebnisse werden an der gegebenen Situation interpretiert und geprüft.

Darüber hinaus kann die Lehrkraft Umrechnungen von Zeitangaben in Übungen festigen, wie $1,5\text{ min} = \dots\text{ s}$, $\frac{1}{4}\text{ h} = \dots\text{ min}$, $0,75\text{ min} = \dots\text{ s}$, $50\text{ s} = \dots\text{ min}$, $1,25\text{ h} = \dots\text{ min}$.

Anregungen für den Unterricht

Einfaches Variieren der Bedingungen der Aufgabe ermöglicht bereits eine **Differenzierung** nach Anforderungsbereichen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Dabei sollten Schülerinnen und Schüler auch angehalten werden, ihre Lösungswege zu erklären.

Beispiele:

- Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h.

Gib seine Fahrzeit in Stunden an. (AB I)

Gib seine Fahrzeit in Minuten an. (AB I)

- Ein LKW fährt regelmäßig zu einem 150 km entfernten Zielort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Nach Abschluss von Baumaßnahmen kann er jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren.

Wie viel Stunden ist der LKW dann unterwegs? (AB I)

- Ein LKW fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h, ein zweiter LKW fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Beide LKW sind 30 Minuten unterwegs.

Wie viel Kilometer hat der Schnellere von beiden mehr zurückgelegt? (AB II)

- Peter geht nach einer Wanderung mit seinem Hund nach Hause. Sie müssen noch 6 km laufen.

Peter geht mit 4 km/h, sein Hund rennt mit 12 km/h. Der Hund läuft mit dieser Geschwindigkeit bis zur Haustür, kehrt um, läuft zu Peter und wieder zur Haustür usw. Wie weit läuft der Hund, bis Peter an der Haustür angekommen ist? (K2, AB III)

Aufgabe 22

Die Summe dreier natürlicher Zahlen beträgt 154. Die größte Zahl ist um 8 größer als die mittlere Zahl, die kleinste Zahl ist um 7 kleiner als die mittlere Zahl.

Wie heißen die drei Zahlen?

Lösung (gemäß Kodierung)

44, 51 und 59

Aufgabe 22

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Zusammenhänge zwischen den drei gegebenen natürlichen Zahlen erkennen (Addition und Kleiner- bzw. Größer-Relation).

Es bietet sich an, die entsprechenden Terme zu bilden (Ungleichungen, Gleichungen), um schließlich die Lösungen des Systems zu ermitteln (L4). Dazu müssen Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, natürliche Sprache in symbolische Sprache zu übersetzen und umgekehrt (K5).

Systematisches Probieren, ggf. mit Hilfe von Tabellen, unter Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen den Zahlen ist als alternatives Lösungsverfahren möglich (K 2).

Der Anforderungsbereich (AB II) ergibt sich aus der Mehrschrittigkeit der Bearbeitung.

Häufige **Fehler** sind wahrscheinlich zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten haben, den Zusammenhang zwischen natürlicher Sprache (Text) und der Darstellung in einer Termstruktur herzustellen. Bei der schrittweisen Termbildung und Reduzierung auf eine Variable treten ebenfalls oft Probleme auf, ebenso beim Zusammenfassen der Zahlen bzw. Variablen und beim äquivalenten Umformen von Gleichungen.

Darüber hinaus ist zu erwarten, dass einige Schülerinnen und Schüler zwar nach Lösen der Gleichung zu einem Ergebnis gelangen, aber daraus nicht die beiden anderen Zahlen bestimmen. Sie überprüfen ihre Ergebnisse nicht an den Ausgangsbedingungen.

Beim systematischen Probieren können zusätzlich Fehler durch Vernachlässigung der gegebenen Bedingungen auftreten.

Für die **Diagnose** von Fehlern ist es notwendig, dass Schülerinnen und Schüler Gelegenheit bekommen, über ihr Vorgehen zu berichten. Dabei wird deutlich, inwieweit sie natürliche Sprache in formale übersetzen können, wie sie Fachbegriffe anwenden und einfache mathematische Beziehungen darstellen können. Natürlich sollten auch verschiedene Lösungswege gegenübergestellt und kommentiert werden.

Anregungen für den Unterricht

Für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** wäre es möglich, die Anzahl der natürlichen Zahlen in der Aufgabe auf zwei zu begrenzen, den Betrag der Summe auf einen überschaubaren Wert zu ändern und/oder die Beziehungen der Zahlen zu einander zu vereinfachen.

Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** könnte man die Anzahl der Summanden und/oder die damit verbundenen Bedingungen (wie die Operation) ändern.

Aufgabenbeispiele:

- Das Produkt zweier natürlicher Zahlen beträgt 65. Die zweite Zahl ist um 8 größer als die erste Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen? (AB II)
- Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 105. Die Differenz zwischen der größten und der mittleren Zahl sowie zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl ist gleich. Wie heißen diese drei Zahlen? (AB II)
- Bilde eine ähnliche Aufgabe zum Produkt dreier Zahlen mit einer zusätzlichen Bedingung. Es sollen mindestens zwei verschiedene Lösungen für die drei Zahlen entstehen. Beschreibe, wie du vorgegangen bist. (AB III)

Aufgabe 23

Ein Fernseher kostet 750,00 €. Zur Geschäftseröffnung wird dieser Preis um 20% gesenkt. Nach zwei Wochen soll der neue Preis wieder um 20% angehoben werden.

„Na, dann hat der Fernseher ja den alten Preis wieder!“ stellt Tom fest. Überprüfe, ob diese Aussage stimmt. Begründe deine Entscheidung.

Lösung (gemäß Kodierung)

Die Lösung muss zwei Aspekte beinhalten:

- (1) Es muss angegeben sein, dass Toms Aussage falsch ist und
- (2) zur Begründung muss entweder (2a) darauf hingewiesen werden, dass die Änderungen von 20% von unterschiedlichen Grundwerten (600 vs. 750 Euro) ermittelt werden. (2b) Alternativ kann dieses auch vorgerechnet werden.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Der nahe liegende **Fehler**, nämlich zu behaupten, dass Toms Aussage richtig sei, muss sorgfältig bearbeitet werden, insbesondere durch Perspektivwechsel zwischen inhaltlichen Aussagen und dem technischen Umgang mit dem Prozentbegriff (K3 und K5): Der beschriebene Fehler beruht in den meisten Fällen auf zwei Fehlvorstellungen, nämlich einerseits dass „Prozent“ eine Art Maßeinheit ist, die unabhängig vom Grundwert ist, und andererseits, dass prozentuale Erhöhungen bzw. Senkungen primär Additionen bzw. Subtraktionen seien. Die Verwendung der Prozenttaste auf handelsüblichen Taschenrechnern schürt diese Fehlvorstellungen und sollte in der Regel vermieden werden. Bei der Besprechung dieser Aufgabe muss unbedingt auf die verschiedenen Grundwerte eingegangen werden. Das korrekte Begründen der Aussage (K3) über das Beispielhafte hinaus ist anspruchsvoll und verdient dann AB III.

Es sollte immer auch eine multiplikative Sichtweise aufgebaut werden, also Senkung um 20% bedeutet Multiplikation mit 0,8 ($1 - p/100$) und Erhöhung um 20% bedeutet Multiplikation mit 1,2 ($1 + p/100$). Für die konkrete Aufgabe ergibt sich damit: $(750 \text{ €} \cdot 0,8) \cdot 1,2 = 750 \text{ €} \cdot 0,96$, also kostet der Fernseher nach angegebener Senkung und anschließender Anhebung 96 % des ursprünglichen Preises.

Rückgängig machen des ersten Prozesses bedeutet also Division durch 0,8, also Multiplikation mit 1,25, also Erhöhung um 25 %, um wieder auf den ursprünglichen Preis zu kommen. Diese multiplikative Sichtweise ist auch später sehr nützlich, z. B. bei Zinseszinsbetrachtungen bzw. exponentiellem Wachstum.

Anregungen für den Unterricht

Die Problematik des Bezugs auf den richtigen Grundwert kann auch sehr gut an folgender Aufgabe behandelt werden:

“Auf einem Tisch liegt ein Kilo Weintrauben. Weintrauben bestehen bekanntlich vorwiegend aus Wasser, sagen wir 99%. Nach einer Woche ist durch Verdunstung mit begleitender Verschrumpelung der Trauben der Wassergehalt auf 98% gesunken. Wie viel wiegen die Weintrauben noch?“ (AB III) Die verblüffende Antwort (500g) ergibt sich durch Beachten des Bezugs zum jeweiligen Grundwert und der Masse des festen Bestandteils der Weintrauben.

Aufgabe 23

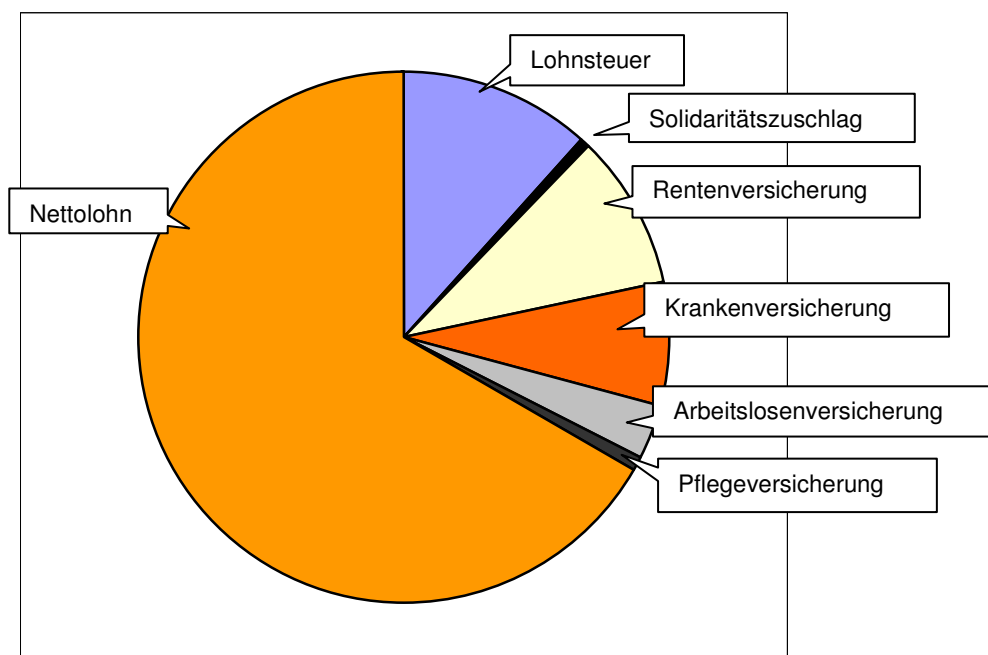
Aufgabe 24

Frau Schulz erfährt beim Vorstellungsgespräch, dass sie für ihre neue Tätigkeit einen monatlichen Bruttolohn von 2400,00 € erhält.

Den Bruttolohn erhält ein Arbeitnehmer nicht ausgezahlt.

Er hat noch Abgaben zu leisten. Den Auszahlungsbetrag nennt man Nettolohn.

Der Bruttolohn von Frau Schulz setzt sich folgendermaßen zusammen:

Bruttolohn pro Monat

Wie viel Euro bekommt Frau Schulz etwa ausgezahlt?

Lösung (gemäß Kodierung)

ca. 1600

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe erfordert von Schülerinnen und Schülern Vertrautheit mit Kreisdiagrammen (L5, K4) und die Fähigkeit mit Proportionalitäten (K5) umzugehen, hier mit der Proportionalität zwischen Geldwerten und zugehörigen Winkeln am Kreisdiagramm.

Am einfachsten kommen Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich zum Ergebnis, indem sie den Anteil Nettolohn vom Bruttolohn mit ca. $\frac{2}{3}$ schätzt. $\frac{2}{3}$ von 2400 € entsprechen dann 1600 €. Natürlich kann man auch exakter und formaler vorgehen und dazu den Winkel α des Nettolohns ausmessen und dann mit der Verhältnisgleichung Nettolohn : Bruttolohn = α : 360° arbeiten. Die kurze Lösung erfordert eine gute Grundvorstellung von Brüchen und sollte auf alle Fälle im Unterricht besprochen werden.

Häufig werden Kreisdiagramme zur Darstellung von Prozentsätzen verwendet, dann entspricht der Winkel 360° einem Prozentsatz von 100%. Ein Missverstehen der Fragestellung oder **Fehler** im Umgang mit Kreisdiagrammen können zu der (hier) falschen Antwort 67% oder gar 67 € führen.

Letztlich müssen durch die Schülerinnen und Schüler die Winkeldarstellungen und die der Geldwerte durch mehrere Arbeitsschritte bzw. Überlegungen in Zusammenhang gebracht werden (AB II).

Anregungen für den Unterricht

Kreisdiagramme und Prozentrechnung gehören eng zusammen und sollten bei weiteren Beispielen auch zusammen behandelt werden. Ein Wechsel der Darstellungsformen sollte im Unterricht thematisiert werden, wie von Balkendiagrammen zu Tabellen und umgekehrt. Für **leistungsstarke Schülerinnen und Schüler** bietet sich das Problem der geeigneten Darstellung an, wenn durch Überlappungen der Merkmalsausprägungen die Summe der Prozentsätze größer als 100% ist. **Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** sollten selbst über das Erstellen von Kreisdiagrammen aus gegebenen Tabellen fehlende Grundvorstellungen von Anteilen oder Proportionalitäten aufbauen bzw. festigen.

Das Lesen und Interpretieren von graphischen Darstellungen in Zeitungen und Fachbüchern ist ein sinnvolles übergeordnetes Unterrichtsthema und kann ausgebaut werden zu einer Unterrichtseinheit zur deskriptiven Statistik bzw. explorativen Datenanalyse.

Aufgabe 25

Der Term $a + a + b + b + b + a$ wurde vereinfacht.

Kreuze die richtigen Ergebnisse an.

- ☐ A $3a + 3b$
- ☐ B $6ab$
- ☐ C $3ab$
- ☐ D $a^3 + b^3$
- ☐ E $3(a + b)$
- ☐ F a^3b^3
- ☐ G $2a + 3b + a$
- ☐ H $a^2 + b^3 + a$

Lösung (gemäß Kodierung)

A, E und G

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Termumformungen gehören zu den Standardkompetenzen, die in der Sekundarstufe I von allen Schülerinnen und Schülern erworben werden müssen (K5, AB I). Dennoch sollten sie nicht in erster Linie als technische Fertigkeiten gesehen und behandelt werden.

Um sicher mit Termen umgehen zu können, müssen Schülerinnen und Schüler die Abstraktion von konkreten Objekten (Zahlen) zu Variablen für sie sinnerfüllt vollzogen haben (L1); es geht nicht um „Buchstabenrechnen“.

Wenn bei dieser Aufgabe **Fehler** auftreten, so müssen dann bei einer Besprechung im Unterricht richtigen Varianten von Termumformungen unbedingt verstanden werden. Als Vorgehen ist denkbar, zunächst für die Variablen konkrete Werte einsetzen zu lassen, dann aber ausgehend von inhaltlichen Sachverhalten diese durch Terme darzustellen und äquivalente Formen auch im Sachkontext als solche erkennen zu lassen. Ein banaler Fehler bei dieser Aufgabe kann auch darin liegen, dass die Schülerinnen und Schüler meinten, nur eine einzige Auswahlantwort ankreuzen zu sollen.

Anregungen für den Unterricht

Man kann wohl sagen, dass das „A und O“ beim Umgang und Erlernen von Termbeziehungen in den schon oben genannten Wechselbeziehungen zwischen Termen und realen Sachverhalten liegen. Dementsprechend vielfältige Beispiele sollten in einem weiterführenden Unterricht behandelt werden. Dem Aufstellen von Termen kommt dabei noch größere Bedeutung zu als ihrem äquivalenten Umformen. Beispielsweise lassen sich mit Hilfe von Termen Kantenzahl, Oberflächenzahl und Volumenzahl bei einem „Bauwerk“, wie Siegerpodest, das aus n gleichen Würfeln aufgebaut ist, beschreiben. An solchen Beispielen muss auch für **leistungsschwache Schülerinnen und Schüler** unbedingt sinnhaft werden, dass in der Abstraktion von konkreten Zahlen zu Variablen und Termen eine große Denkökonomie liegt.

Aufgabe 26

Aus einem Draht von einem Meter Länge wurde das Kantenmodell eines Würfels gebaut. Es blieb ein Reststück von 4,0 cm.
Wie lang ist eine Würfelkante?

Lösung (gemäß Kodierung)

8 cm Äquivalente: zulässig

Aufgabe 26

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen eine Vorstellung vom Kantenmodell eines Würfels besitzen und diese auf die konkrete Aufgabenstellung übertragen (K4, K2).

Dabei gibt es unterschiedliche Denkansätze. In der Regel werden die Schülerinnen und Schüler von 12 Kanten gleicher Länge ausgehen, was bei einem Gesamtverbrauch von 96 cm dann „theoretisch“ eine Kantenlänge von 8 cm ergibt.

Bei dieser Sichtweise betrachtet man die Aufgabe als eingekleidete Aufgabe, und vernachlässigt Fragen der Realisierung eines solchen Modells. Im Sinne einer tiefer gehenden Betrachtung wäre die Frage zu berücksichtigen, wie denn ein solches Kantenmodell praktisch haltbar sein soll. (Vgl. hierzu auch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, Teil 3, Kapitel 4)

Möglichkeit 1:

Die 12 Stücke werden in irgendeiner Form an den Ecken geeignet verbunden (z. B. durch Plastilinkügelchen, Löten oder Verhaken), möglicherweise ohne Verlust an Draht, möglicherweise mit Drahtverlust, was dann dazu führen würde, dass 8 cm als Ergebnis nur eine obere Grenze darstellt.

Möglichkeit 2:

Das Modell wird aus den 96 cm Draht in einem Stück geformt. In diesem Fall müssen beispielsweise drei Seiten „doppelt“ durchlaufen werden, und man erhält dann als Ergebnis etwa 6,4 cm.

Die Testaufgabe zielt nicht explizit auf solche Überlegungen ab, sollte es dennoch zu derartigen Schülerlösungen mit entsprechenden Erläuterungen kommen, ist dies wertvoll.

Anregungen für den Unterricht

Jedenfalls sollte in einer Aufarbeitung der Aufgabe im Unterricht im Sinne eines „Ernstnehmen des Kontexts“ auf die oben skizzierten Fragen der Realisierung eines solchen Kantenmodells eingegangen werden. Die Aufgabe erhält dadurch einen Schwerpunkt im Bereich der Kompetenz Mathematisch modellieren (K3) und stößt aufgrund der nötigen kritischen Beurteilung des verwendeten Modells in den Anforderungsbereich III vor.

Mögliche Variationen und Ergänzungen der Aufgabe:

- Praktische Anfertigung von Modellen
- Berechnen bzw. Abschätzen des Verbrauchs bei gegebener Kantenlänge
- Theoretischer Zusammenhang zwischen Kantenlänge, Gesamtkantenlänge, Oberfläche und Volumen
- Bei einem Verzicht auf eine Einkleidung der Aufgabe können innermathematische Aspekte in den Vordergrund treten: Wie ändert sich die Gesamtkantenlänge bei Verdoppelung (...) der Kantenlänge u. Ä.

Dabei ist zu beachten, dass die genannten Variationen nicht nur bei der Neubehandlung oder Wiederholung des Themas „Würfel“ einsetzbar sind, sondern ganz analog auf andere Körper übertragen werden können. Auf diese Weise gelingt es, auf eventuell im Rahmen der Vergleichsarbeit festgestellte Defizite im folgenden Unterricht bei der Behandlung von Prismen oder Pyramiden einzugehen.