Material zur Weiterarbeit
zum
Lernstand im Fach Mathematik in der Klassenstufe 8

Adressaten sind die Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie Fachkonferenzen oder andere Lehrkräfte und innerschulische Gruppen. Sie sollen durch das Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, die vor allem in der individuellen Förderung liegen.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Umfang und Tiefe richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich am rechten Rand ersichtlich.
Eine Kommentierung zu einer Aufgabe schließt folgende Teile ein:

- Begründungen für die Zuordnung der Standardeigenschaften[1] zu einer Aufgabe (und damit Ausweisen von didaktischem Potential der Aufgabe),
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler (u.a. häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose),
- Anregungen für den Unterricht.

An verschiedenen Stellen werden Bezüge zur Veröffentlichung „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ des IQB hergestellt, da hierin eine große Anzahl von Aufgaben mit ausgewiesenen Standardbezügen und Unterrichtsanregungen vorgestellt werden.

Bezüge zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter kann von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben für ein Testheft nur die „hinführende“ Teilaufgabe ausgewählt werden und es muss auf mathematisch interessantere verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen, solche Teilaufgaben aufzugreifen und weitere Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung des Materials ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen Lehrkräfte u.a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann, damit über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden kann. Im vorliegenden Material wird daher für jede Aufgabe die Zuordnung der

[1] Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss, Beschluss der KMK vom 04.12.2003, S.7 – 15 bzw. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Beschluss der KMK vom 15.10.2004, S. 7 - 14.

Standardmerkmale (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen kann deutlich gemacht werden, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zur mathematischen Kompetenz bestimmt.

Überlegungen, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können , sind Teil jeder Kommentierung. Betrachtet werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und zu erwartende häufige Fehler sowie Möglichkeiten zur Diagnose. Dies soll die Lehrkräfte auch in ihrer Individualdiagnose unterstützen und helfen, Ansätze zur individuellen Förderung aufzudecken. Darauf aufbauend wird für jede Aufgabe vorgeschlagen, wie diese verändert oder variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Solche Anregungen beinhalten die Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, den Umgang mit verschiedenen Lösungen, eine Diskussion zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegeben Sachverhalts, den Einsatz von Aufgabenvariationen u.a.m. Dabei wird auch deutlich, wie sich Testaufgaben und Unterrichtsaufgaben bzw. Aufgaben in Lernstanderhebungen für die eigene Klasse unterscheiden können.

An der Weiterentwicklung des Materials wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. So wird angestrebt, im nächsten Jahr die Kommentierungen zu den einzelnen Aufgaben in Form einer Online-Datenbank anzubieten. Hinweise zum vorliegenden Material, beispielsweise zur gewählten Präsentationsform, und zu Ergänzungen können an (entw8@thillm.thueringen.de) gerichtet werden. Sie werden gern entgegengenommen.

Literatur:

/1/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006

/2/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss Beschluss der KMK vom 04.12.2003

/3/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss Beschluss der KMK vom 15.10.2004

Aufgabe 1

Umkehraufgabe

Zu welcher Zahl muss man 6345 addieren, um 8567 zu erhalten?

Kreuze an.

- ☐ 2023
- ☐ 2222
- ☐ 1987
- ☐ 14912

Lösung

2222

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Lösen der Aufgabe werden Rechenfertigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen und das Verständnis einfacher mathematischer Fachbegriffe benötigt (L1, K5, AB I).
Die vorgegebenen Antworten erlauben sowohl die Lösung mittels der Umkehraufgabe als auch durch Ergänzen oder systematisches Ausschließen zu kleiner oder zu großer Zahlen.

Mögliche **Fehler** sind:

- 14912, wenn die Zahlen aus der Aufgabenstellung addiert wurden,
- 2023 und 1987, wenn Rechenfehler gemacht wurden oder das Ergebnis aus Unkenntnis des Additionsbegriffes erraten wurde.

Anregungen für den Unterricht

Ergibt die Fehleranalyse bei **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, ein unzureichendes Verständnis des Additionsbegriffes, sollten einfache Aufgaben gestellt werden, in denen die Fachbegriffe angewendet werden müssen, wie:

- Addiere 23 und 56.
- Bilde die Summe aus 6547 und 453.

Das kann im Rahmen von Kopfrechenübungen regelmäßig durchgeführt und im Schwierigkeitsgrad gesteigert werden.

Um den richtigen Rechenweg zu finden, ist es oft hilfreich, dieselbe Aufgabe mit kleinen Zahlen zu stellen, etwa: „Zu welcher Zahl muss man 5 addieren, um 12 zu erhalten?“ Da die Schülerinnen und Schüler sich diese Aufgabe im Kopf vorstellen und bearbeiten können, wählen sie hier oft intuitiv den richtigen Rechenweg, der dann auf die Aufgabe mit schwierigen Zahlen übertragen werden kann. Ist einer Schülerin oder einem Schüler trotz kleiner Zahlen der einzuschlagende Rechenweg nicht klar, so können informative Figuren entwickelt werden, um die im Text formulierte Situation zu veranschaulichen:

$$\boxed{\ ?\ } \xrightarrow{\quad + 5 \quad} \boxed{\ 12\ }$$

Zeigt die Fehleranalyse Defizite beim Addieren bzw. Subtrahieren, sollte diesbezüglich geübt werden. Es eignen sich Aufgaben, wie:

- Welche Zahl muss zu 465 addiert werden, um 1200 zu erhalten?
- Wenn man von einer Zahl 1485 subtrahiert, erhält man 619. Wie heißt diese Zahl?
- Die Summe zweier Zahlen ist 6278. Welche Zahlen können addiert worden sein?
- Addiere zur Zahl 393 nacheinander 493 und 593. Wie heißt dein Ergebnis?

Überschläge und die jeweiligen Umkehraufgaben sollten hier einbezogen werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, bearbeiten Übungsaufgaben mit schwierigerem Zahlenmaterial oder/und komplexeren Formulierungen. Sie können auch aufgefordert werden, ähnliche Aufgaben zu formulieren, zu lösen und ihren Mitschülerinnen und Mitschülern (vor)zustellen.

Aufgabe 2

Stadion
Ein Fußballstadion hat 14600 Plätze, davon sind 5300 Sitzplätze und 9300 Stehplätze. Ein Sitzplatz kostet 14,00 € und ein Stehplatz 5,00 €. Wie viel Geld nimmt der Verein bei einem vollen Stadion ein?

Lösung

120700 €

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler nutzen Sinn tragende Vorstellungen von natürlichen Zahlen (Anzahl der Sitz- bzw. Stehplätze) (L1). Um die reale Situation zu einer formalen mathematischen Aufgaben (K3) zu modellieren, müssen sie den Aufgabentext verstehen (K6) und feststellen, dass die Angabe von 14600 Gesamtplätzen für die Lösung nicht erforderlich ist. Zur Lösung gelangen die Schülerinnen und Schüler, indem sie im ersten Schritt die Einnahmen für alle Stehplätze und alle Sitzplätze berechnen und in einem zweiten Schritt beide Produkte addieren (K5, AB II).

Es sind **Fehler** beim Entnehmen der notwendigen Informationen aus dem Text und beim Berechnen der Einnahmen zu erwarten.

Diese können **diagnostiziert** werden, indem das Vorgehen im Einzelfall beschrieben wird. Bei Schülerergebnissen, die wesentlich von dem korrekten Ergebnis abweichen, bietet es sich an, den Nutzen von Überschlagsrechnungen zu verdeutlichen.

Anregungen für den Unterricht

Zur Weiterarbeit lassen sich in Lehrbüchern ähnliche Aufgaben zu Eintrittspreisen aus der Erlebniswelt der Schülerinnen und Schüler finden (z.B. Kino, Schwimmbad, Museum).

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht gelöst haben**, kann zunächst der Aufgabentext analysiert werden, um die zur Lösung relevanten Informationen zu ermitteln. Sie können ggf. auch ein Baumdiagramm oder eine Skizze zur gegebenen Situation entwickeln, um Lösungsschritte zu erkennen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben**, kann die Aufgabenstellung wie folgt variiert werden:

- Der Schwierigkeitsgrad der geforderten Rechnungen kann sich durch Veränderung beim Zahlenmaterial erhöhen. Dabei kann die schriftliche Multiplikation und Addition mit Dezimalzahlen wiederholt bzw. geübt werden.
- Weitere Preiskategorien können ergänzt werden (z.B. Familienkarten, Dauerkarten, Tribüne unten, Tribüne oben).
  (Vgl. weitere Aufgaben in /3/, S. 26, Aufgabe 11.)
- Ein Stadion hat 14600 Plätze, davon sind 5300 Sitzplätze und 9300 Stehplätze. Der Stadionbetreiber möchte bei einem vollbesetzten Stadion mindestens 150000 € einnehmen. Wie hoch sollten die Preise für die Stehplätze und Sitzplätze deiner Meinung nach mindestens sein.
  Erkläre deine Vorgehensweise.

Es ergeben sich verschiedene Lösungswege, die von den Schülerinnen und Schülern hinreichend dokumentiert und verständlich dargestellt werden sollten.

Aufgabe 3

Basketball

Bei dem Basketball-Turnier einer Hauptschule nehmen vier achte Klassen, fünf neunte Klassen und zwei zehnte Klassen teil.
Die Klassen werden in der Vorrunde in zwei Gruppen (Gruppe A und Gruppe B) aufgeteilt. Jede Klasse einer Gruppe spielt gegen jede andere Klasse dieser Gruppe. Fünf Klassen sind in der Gruppe A. Wie viele Spiele finden in der Vorrunde in Gruppe A statt?

Kreuze an.

☐ 5 Spiele

☐ 10 Spiele

☐ 15 Spiele

☐ 25 Spiele

Lösung

10 Spiele

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Es handelt sich um eine einfache kombinatorische Fragestellung. Die benötigten Kompetenzen können auf sehr unterschiedlichen Niveaus angesiedelt sein, in jedem Falle aber muss eine Bearbeitungsstrategie gefunden und umgesetzt werden (K2, K3):

- Die elementarste ist das Aufschreiben aller Spielpaarungen (Es wird in der Aufgabenstellung nicht von „Hin- und Rückspielen“ gesprochen, aber auch nicht gesagt, dass jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal spielt, was eigentlich hätte gesagt werden müssen).
- Wenn man die Spielpaarungen systematisch aufschreibt, kristallisieren sich die Dreieckszahlen heraus, was leicht zu einer Verallgemeinerung ausgebaut werden kann.

Z.B.: M1-M2, M1-M3, M1-M4, M1-M5;
M2-M3, M2-M4, M2-M5;
M3-M4, M3-M5;
M4-M5.

- Man kann auch feststellen, dass jede Mannschaft 4 Spiele absolvieren muss, was zunächst zu insgesamt 4 x 5 = 20 Spiele führt. Da alle Spiele „doppelt gezählt“ wurden, ist dieser Wert noch durch Zwei zu teilen. (Insofern ist es schade, dass die Auswahlantworten 4 und 20 nicht vorkommen.)

Eine **Fehler**analyse ist auf Grund des Ergebnisses kaum möglich. Sie sollte im folgenden Unterricht durch Auffordern zum Beschreiben des Bearbeitungsweges erfolgen.

Anregungen für den Unterricht

Wenn die Organisation von Sportturnieren, wie bei der gegebenen Aufgabe, im Rahmen der Kombinatorik bearbeitet wird, ergeben sich sinnvolle und beziehungshaltige Themen für den Mathematikunterricht.
Bei nicht ganz trivialen kombinatorischen Problemen können die Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler erheblich sein. Hier müssten vor allem „strukturierende Ideen für systematisches Zählen“ entwickelt werden. Baumdiagramme sollen dazu gehören.
Z.B.:

- Autokennzeichen in einer deutschen Großstadt:
  Eine solches Autokennzeichen besteht z.B. in Berlin aus dem Buchstaben "B" als Abkürzung für die Stadt, aus ein oder zwei Buchstaben und danach aus einer (höchstens) vierstelligen Zahl wie "B FL–2345". Wie viele Autos mit solchen verschiedenen Autokennzeichen können zugelassen werden?
- Hand- oder Fußball-Weltmeisterschaft:
  Es treten 32 Mannschaften an, die zunächst in 8 Gruppen mit je vier Mannschaften spielen. In den einzelnen Gruppen spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Es werden Punkte vergeben und aus jeder Gruppe kommen die beiden besten Mannschaften weiter. Die so verbleibenden 16 Mannschaften spielen dann als Endrunde eine so genannte „ko - Runde“, d.h. jede Mannschaft, die verliert, scheidet „ko“ aus. (Es gibt deshalb auch kein „unentschieden“ mehr.) Die Endrunde beginnt mit dem „Achtelfinale“. Die letzten vier Mannschaften spielen das „Halbfinale“. Hier gibt es eine Ausnahme: Die beiden Verlierer scheiden nicht aus, sondern spielen um dem „3 Platz“. Viele Fragen / Aufgaben kann man stellen: „Aus wie vielen Spielen besteht die Vorrunde und aus wie vielen Spielen die Endrunde?“, „Wie viele Spiele muss der Weltmeister absolviert haben?“

Wenn Fußball nicht auf das große Interesse der Schülerinnen oder Schüler stößt, lassen sich die Fragestellungen natürlich leicht auf andere Sportarten übertragen. Dann muss man ggf. die entsprechenden Informationen über Austragungsmodi im Internet recherchieren. Das Tennisspiel mit seiner ungewöhnlichen Zählweise liefert hier weiteres interessantes Material.

Aufgabe 4.1

Zapfsäule

Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern" über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.
Wie viel erhält der Staat bei der dargestellten Tankfüllung an Steuern?
Kreuze die richtige Antwort an.

- ☐ 15,80 €
- ☐ 34,47 €
- ☐ 42,71 €
- ☐ 73,- €
- ☐ 90,45 €

Lösung

42,71 €

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Aufgabe 4.1

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten eine alltagsnahe Problemstellung, indem sie ihre Kenntnisse aus der Prozentrechnung bzw. Bruchrechnung sachgerecht anwenden (L1). Die Aufgabe ist überbestimmt, d.h. Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die für die Aufgabe relevanten Informationen dem Bild und dem Text entnehmen und dafür eine geeignete mathematische Darstellungsform finden (K3, K4). Zur Lösung der Aufgabe gelangen sie durch die Ausführung geeigneter Lösungs- bzw. Kontrollverfahren (K5), z.B. 58,51 € · 0,73 oder 58,51 € · $\frac{73}{100}$. Die Lösung der Aufgabe erfordert ein mehrschrittiges Vorgehen (AB II).

Zu erwarten sind folgende **Fehler**:

- Die Schülerinnen und Schüler multiplizieren statt mit 0,73 mit 0,27.
- Die Schülerinnen und Schüler rechnen mit dem falschen Grundwert. Sie führen 73 % Steuern von der Gesamtliterzahl (47,22 l) bzw. dem Preis pro Liter (123,9 ct) ab (Antwortoptionen 15,8 € und 90,45 €).
- Die Schülerinnen und Schüler setzen den Anteil mit dem abzuführenden Steuerbetrag in Euro gleich, also 73 € Steuerbetrag insgesamt. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass der Steuerbetrag nicht größer sein kann als der Gesamtbetrag für die Tankfüllung.

Fehler lassen sich **diagnostizieren**, indem im Einzelfall die Auswahlentscheidung begründet wird.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet es sich an, die Grundbegriffe der Prozentrechnung zu wiederholen und in Bezug zur Aufgabe zu setzen. Dabei ist es sinnvoll zu thematisieren, welche Informationen in der Aufgabenstellung enthalten sind und welche davon tatsächlich relevant zur Lösung der Aufgabe sind. Hilfreich kann die Erstellung einer tabellarischen Übersicht sein, in der die jeweilige Steuerabgabe dem zu zahlenden Gesamtbetrag zugeordnet wird.

Betrag	Steuern
1 €	1 € · 0,73 = 0,73 €
10 €	10 € · 0,73 = 7,30 €
100 €	100 € · 0,73 = 73,00 €
40 €	40 € · 0,73 = 29,20 €
58,51 €	58,51 € · 0,73 = 42,71 €

Zudem kann damit die Aufgabe auch ohne Kenntnisse in der Bruch- bzw. Prozentrechnung mit dem Verfahren Dreisatz gelöst werden. Wichtig ist allerdings, sich als Lehrkraft zu vergewissern, dass die Schülerinnen und Schüler die benötigten Daten der abgebildeten Zapfsäule entnehmen können.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich vielfältige vergleichbare Aufgabenstellungen aus dem Alltag zur Weiterarbeit an, die ihrer Lebenswelt stärker entsprechen, wie die Auswertung von Angaben auf Lebensmittelverpackungen. Entsprechende Fragestellungen können auch von Schülerinnen und Schülern aufgestellt werden, wie:
Folgende Angaben sind einer 1 Liter Milchverpackung zu entnehmen:
1 Glas fettarme Milch (250 ml) enthält 12,3 g Zucker, 3,8 g Fett und 2,5 g gesättigte Fettsäuren.
Wie viel Gramm Zucker, Fett und gesättigte Fettsäuren enthält ein Liter Milch?

Aufgabe 4.2

Zapfsäule

Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern“ über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.
Petra stellt fest: „Wenn der Staat überhaupt keine Steuern auf Benzin mehr erheben würde, würde der Benzinpreis auf etwa ein Viertel des jetzigen Preises sinken.“

Erkläre, wie Petra zu dieser Aussage kommt.

Lösung

Richtige Erklärung, bei der der Anteil der Steuern mit dem Benzinpreis in Beziehung gesetzt werden muss, z.B.:

- 1 Euro – 73 Cent = 27 Cent entspricht ca. 25 % bzw. $\frac{1}{4}$.

Oder:

- 73 Cent pro Euro bedeutet 73 % Steuern, also etwa $\frac{3}{4}$. Also etwa $\frac{1}{4}$ ohne Steuern.

Oder:

- Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabe 4.1:
  42,71 € Steuern, also etwa 15,80 € Rest, das ist etwa $\frac{1}{4}$ von 58,51 €.

Oder:

- $\frac{42{,}71\,€}{58{,}51\,€} \approx \frac{3}{4}$. Die Steuern machen somit ca. $\frac{3}{4}$ des Betrages aus. Ohne Steuern müsste man folglich nur $\frac{1}{4}$ des Betrages zahlen.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten eine alltagsnahe Problemstellung, indem sie ihre Kenntnisse aus der Prozentrechnung bzw. Bruchrechnung sachgerecht anwenden (L1). Die Aufgabe erlaubt verschiedene Lösungsstrategien (vgl. dazu die obigen Lösungsangaben), die die Schülerinnen und Schüler je nach Voraussetzungen einsetzen (K2, AB II). Dabei müssen sie den Anteil der Steuern mit dem Benzinpreis in Beziehung setzen (K3). Mittels Ausführung geeigneter Lösungs- und Kontrollverfahren und sinnvollem Abschätzen der Ergebnisse überprüfen die Schülerinnen und Schüler die Aussage von Petra und erklären anschließend ihren Lösungsweg, um Petras Aussage zu begründen (K5, K6).

Fehler sind zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen natürlicher Sprache (Text), den Angaben aus dem Foto und der Darstellung in einem mathematischen Modell nicht oder nur unvollständig herstellen können (z.B.: Grundwert, Prozentwert bzw. Prozentsatz sind falsch, falsche Zuordnung des „jetzigen Preises“ bzw. des Benzinpreises zum Preis ohne Steuerabgabe).

Eine **Diagnose** von Schülerfehlern ist aufgrund der vielfältigen Bearbeitungsmöglichkeiten und dem im Test gewählten Format in der Regel nur durch die Analyse der verwendeten Bearbeitungsansätze möglich.

Anregungen für den Unterricht

Durch einen geöffneten Unterricht, in dem sich Schülerinnen und Schüler einzeln oder in Gruppen selbstständig mit vergleichbaren Problemstellungen auseinandersetzen, ergeben sich häufig unterschiedliche Lösungswege. Diese sollten auch thematisiert und gewertet werden.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen** konnten, ist es sinnvoll, die Ausgangsbedingungen zu vereinfachen:

- Preise und Anteile können als Zahlenwerte in Petras Aussage angegeben werden, so dass für die Aufgabe relevante Informationen direkt aus dem Text entnommen werden können.

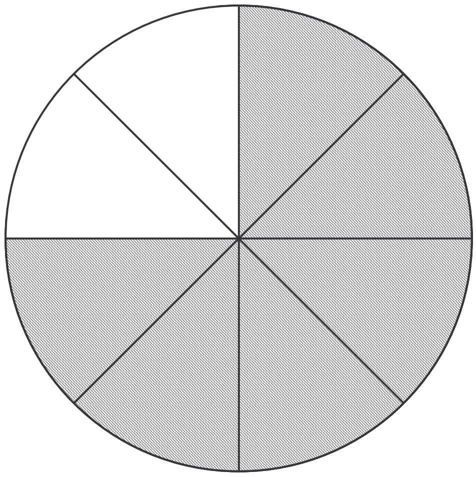
- Durch Änderung der Aufgabenstellung hin zu einer Bestimmungsaufgabe verändert sich der Anforderungsbereich, z.B.:
  Die Benzinrechnung ist 58,51 € hoch. Davon werden 73 % als Steuern an den Staat abgeführt. Wie viel Euro sind das? (AB I)
  Wenn keine Steuern abgeführt werden müssen, würde der Benzinpreis gegenüber dem jetzigen Preis niedriger sein. Wie hoch wäre dann die Benzinrechnung? (AB I)

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich weiterführende vertiefende Aufgabenstellungen an:
- Die Steuern setzen sich aus Mineralölsteuer, Ökosteuer und Mehrwertsteuer zusammen. Benzin unterliegt bei der Mehrwertsteuer dem vollen Steuersatz von 19 %. Wie hoch ist der gemeinsame Anteil von Mineral- und Ökosteuer am gegebenen Benzinpreis?

Für die Weiterarbeit siehe auch Kommentierung zu Aufgabe 4.1.

Aufgabe 5

Kreis



Wie viel Prozent des Kreises wurden eingefärbt?
Kreuze die richtige Lösung an.

- ☐ 30 %
- ☐ 45 %
- ☐ 60 %
- ☐ 70 %
- ☐ 75 %
- ☐ 95 %

Lösung

75 %

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe nutzen die Schülerinnen und Schüler Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen (L1). Sie müssen in der Darstellung erkennen, dass $\frac{3}{4}$ des Kreises gefärbt sind (K4) und $\frac{3}{4}$ = 0,75 dem Prozentwert

Aufgabe 5

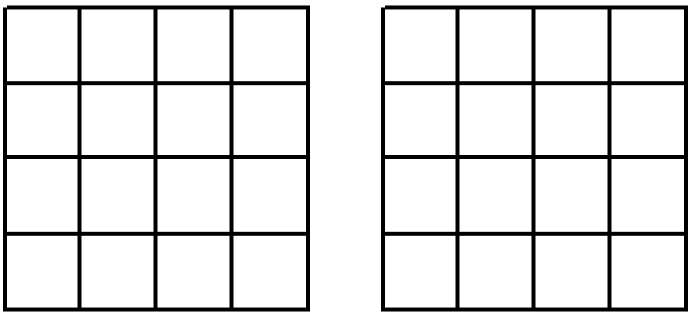
75 % zuordnen (K5, AB I). Bei dem dargestellten, leicht zu erfassenden Anteil des Kreises sollte auch mittels Ausschlussverfahren sofort die richtige Prozentangabe erkannt werden. Ebenfalls ist das Abzählen der markierten Viertel oder Achtel möglich. In diesem Fall kann auch über das Erweitern auf Hundertstel der Anteil in Prozent berechnet werden.

Auftretende **Fehler** weisen auf mangelnde Kenntnisse über äquivalente Darstellungsformen gebrochener Zahlen hin (wie hier: $\frac{3}{4}$ = 0,75 = 75 %). Die Entscheidung für „30 % bzw. 60 %“ könnte oberflächlich aus den drei bzw. sechs gefärbten Teilstücken in der Darstellung gefallen sein. Für eine genaue **Diagnose** sind Nachfragen erforderlich, die die zur Entscheidung führenden Gedankengänge erkennen lassen.

Anregungen für den Unterricht

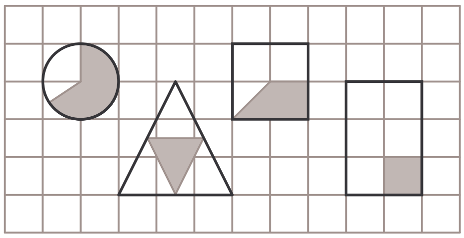
Bei Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe falsch beantwortet haben, sollte auf sicheres Erkennen von markierten Anteilen in geometrischen Figuren als gemeiner Bruch, Dezimalbruch oder (insbesondere bei „bequemen“ Prozentsätzen) in Prozent Wert gelegt werden.

I. Färbe $\frac{3}{4}$ der Fläche. Färbe 75 % der Fläche. Vergleiche $\frac{3}{4}$ und 75 %.

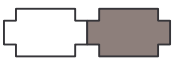
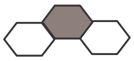
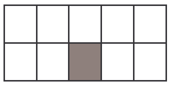


II. Die Schülerinnen und Schüler könnten auch aufgefordert werden, aus einer vorgegebenen Menge von Brüchen kombiniert mit Abbildungen von Repräsentanten alle gleichwertigen Brüche herauszufinden, wie:
Ordne den Brüchen die richtige Darstellung zu. Verbinde die entstehenden Paare durch Striche.

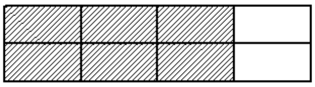
37,5 % | 40 % | $\frac{2}{5}$ | $\frac{375}{1000}$ | $\frac{40}{100}$ | $\frac{6}{9}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{25}{100}$ | $\frac{14}{21}$ | 25 %



III. Kärtchen mit verschiedenen Darstellungsformen von Anteilen können auf spielerische Art bei der **Differenzierung** helfen. Dazu müssen die folgenden "Kärtchen" zunächst ausgeschnitten werden. Anschließend können sie in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit zum Zuordnen, Sortieren oder Vergleichen genutzt werden.

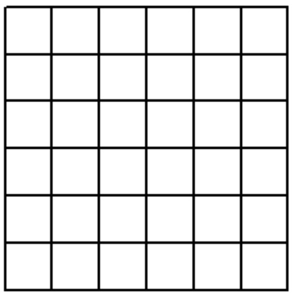
$\frac{1}{2}$	**a**a**a**a**a**a	$\frac{1}{3}$	**a**aa**a**aa**a**aa	$\frac{1}{4}$	**a**aaa
	0,5		$0,\overline{3}$		0,25
50 %	24 von 48	$33\frac{1}{3}$ %	12 von 36	25 %	5 von 20
$\frac{1}{5}$	aa**a**aa	$\frac{1}{10}$	**a**aaaaaaaaa	$\frac{3}{4}$	**aaa**a
0,2		0,1		0,75	
20 %	10 von 50	10 %	7,8 von 78	75 %	9 von 12

Auch für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten,** ist die Anschaulichkeit nicht zu vernachlässigen durch Aufgaben, wie:

a) 

b) Färbe in dem Quadrat den gleichen Bruchteil wie in a).

c) Welcher Anteil (in Prozent) wurde gefärbt?



Aufgabe 6

Gleichung
Du siehst hier eine Aufgabe:

248 + 146 + 320 =

Das Ergebnis dieser Aufgabe ist eine gerade Zahl.
Erkläre, warum das so ist, ohne das Ergebnis auszurechnen.

Lösung

Die Schülerantwort muss sinngemäß enthalten, dass die einzelnen Zahlen alle gerade sind und dass deshalb das Ergebnis auch gerade sein muss.
Z.B.:

- "248 , 146 , 320 sind gerade Zahlen. Werden diese Zahlen addiert, dann ist auch das Ergebnis eine gerade Zahl“
- "Weil eine gerade Zahl plus eine gerade Zahl, wieder eine gerade ergibt“.

Die Antwort darf nicht allein auf dem Ergebnis der Summe der drei Zahlen (714) basieren. Wenn die Aufgabe ausgerechnet wurde, ist es irrelevant, ob das Ergebnis richtig oder falsch ist.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen Zusammenhänge zwischen geraden Zahlen und der Rechenoperation Addition erkennen und eine überschaubare Argumentation entwickeln können (L1, K1, AB II).

Häufig zu erwartender ist vermutlich, dass Schülerinnen und Schüler diese Additionsaufgabe nur ausrechnen, ohne eine Erklärung zu formulieren. Ursachen für **fehler**hafte oder fehlende Argumentationen können diagnostiziert werden, indem die betreffenden Schülerinnen und Schülern aufgefordert werden, ihre Vorgehensweise zu beschreiben.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht gelöst haben, können mit folgenden Aufgaben an den Grundgedanken der Argumentation herangeführt werden:

I. Ist das Ergebnis gerade oder ungerade? Begründe deine Entscheidung, ohne das Ergebnis auszurechnen.
   31 + 47 =
   32 + 48 =
   31 + 48 =

Eine einfache Argumentation wird sich auf die Summe der „Einer" beziehen.

II. Ergänze die Aufgaben jeweils durch einen (zwei, drei, ...) weitere(n) Summanden. Ist das Ergebnis gerade oder ungerade? Begründe deine Entscheidung, ohne das Ergebnis auszurechnen.
   31 + 47 + ... =
   32 + 48 + ... =
   31 + 48 + ... =

Die Schülerinnen und Schüler können so schrittweise zu allgemeinen Aussagen gelangen.

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe gelöst haben, können Aufgaben ohne konkretes Zahlenmaterial angeboten werden, wie:

Erkläre, dass folgende Aussagen für natürliche Zahlen immer wahr sind.

- Die Summe von drei ungeraden Zahlen ist stets eine ungerade Zahl.
- Unter welcher Bedingung ist die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen gerade (ungerade)?

Aufgabe 7.1 und 7.2

Welche Zahl fehlt?

7.1: Trage die fehlende Zahl ein.

2		6		43		
↓		↓		↓		↓
4		12		86		98

7.2: Trage die fehlende Zahl ein.

201		250				300
↓		↓		↓		↓
401		499		549		599

Lösung

7.1: 49
7.2: 275

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)** **Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Um die Aufgabe lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler die gegebenen Tabellen erfassen (L4, K4) und die Zuordnungsvorschriften erkennen. Sie nutzen dabei (intuitiv) funktionale Zusammenhänge. Um die gesuchte Zahl zu finden, müssen sie die mit Pfeil markierten Rechenoperationen begrenzt verallgemeinern (das Doppelte bilden). Im Einzelnen rechnen Schülerinnen und Schüler mit natürlichen Zahlen, auch im Kopf (L1). Sie wenden eine heuristische Strategie an (K2, AB II).

Bei Aufgabe 7.2 ist im Unterschied zu Aufgabe 7.1 ein Zahlenpaar vor und hinter dem zu vervollständigendem Paar gegeben. Die Bildungsvorschrift kann aus den ersten beiden Zuordnungen gewonnen werden (Addiere das Doppelte der gegebenen Zahl, subtrahiere 1.) und muss für die letzte Zuordnung überprüft werden. Die gesuchte Zahl ergibt sich dann aus $2 \cdot \square - 1 = 549$, also $\square = 275$.

Um **Fehler** zu **diagnostizieren**, sollte eine (schriftliche oder mündliche) Dokumentation des Lösungsweges eingefordert werden.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können schon an der Aufgabenstellung gescheitert sein, weil ihnen die Darstellung fremd ist bzw. sie die einzelnen Zahlenpaare isoliert betrachten und nicht erkennen, dass ein gemeinsames Grundprinzip (Zuordnungsvorschrift) zugrunde liegt. Ein funktionales Verständnis kann den Schülerinnen und Schülern z.B. durch folgende Vorgehensweisen im Unterricht schrittweise bewusst gemacht werden:

- Sie erhalten Beschreibungen für Zuordnungen in verbaler Form oder als Term, die sie auf gegebene Zahlen anwenden und so die Ergebniszahl berechnen.
- Aus gegebenen Zahlen und zugeordneten Ergebnissen sollen Gleichungen oder verbale Zuordnungsvorschriften gefunden werden.
- Zu vorgegebener Vorschrift und Ergebniszahl soll die Zahl angegeben werden, auf die die Vorschrift angewendet wurde.

Wenn im Unterricht verschiedene Darstellungsformen für Zuordnungen benutzt werden (auch horizontal oder vertikal angelegte Wertetabellen), fällt es Schülerinnen und Schüler leichter, in einer nicht so bekannten Darstellungsweise eine Zuordnungsvorschrift zu entdecken. Sie lernen dadurch von der Darstellungsform selbst zu abstrahieren.
Durch den Einsatz einer Tabellenkalkulation kann die funktionale Sichtweise unterstützt werden, indem Zellenformeln eingeführt werden.
Treten Schwierigkeiten insbesondere beim Finden der Zuordnungsvorschrift auf, kann das Fortsetzen von Zahlenreihen zunächst hilfreich sein (fortgesetztes Halbieren, Verdoppeln, Dritteln, Addieren mit einem festen Summanden, Subtrahieren mit festem Subtrahenden). Das Vergleichen von mehreren Zahlenpaaren ist je nach Anzahl der Rechenoperationen unterschiedlich schwierig (in Aufgabe 7.1 eine Operation, in Aufgabe 7.2 zwei Operationen).

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können das Finden von Funktionsgleichungen mit der folgenden offenen Aufgabenstellung in Partnerarbeit durchführen:
Person A denkt sich eine Vorschrift aus, Person B versucht an Hand mehrerer gegebener Beispiele für die Zuordnung, diese zu bestimmen („Funktionsmaschine" bzw. leere Tabelle). Da die Schülerinnen und Schüler hier selbst die Gleichungen aussuchen, ist auf diese Weise auch eine innere Differenzierung möglich. Sinnvoll ist die Beschränkung auf z.B. zwei Rechenoperationen.
Eine weitere Differenzierung ist möglich durch Zulassung verschiedener Zahlenbereiche.
Bei diesen Aufgaben können Schülerinnen und Schülern auch das Kommunizieren üben, indem sie ihre Lösungswege erklären.

Aufgabe 7.3

Welche Zahl fehlt?

Timo schreibt die Zahl 64 zur 31. Das ist die richtige Lösung !

5		14		18		31		51
↓		↓		↓		↓		↓
12		30		38		64		104

Schreibe auf, wie Timo die Zahl 64 gefunden hat.

Lösung

Mögliche Lösungen:

- Die obere Zahl wird zunächst mit 2 multipliziert, dann wird 2 addiert.
- Zunächst wird 1 addiert, dann das Ergebnis verdoppelt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Um die Aufgabe lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler die gegebenen Tabellen erfassen (K4). Sie nutzen dabei (intuitiv) funktionale Zusammenhänge (Zuordnungsvorschrift). Bei der Lösung der Aufgabe wenden sie eine nahe liegende Strategie an (K2). Vermutlich wird es häufig systematisches Probieren sein, aber auch das Bestimmen der Steigung ist ein sinnvoller Weg. Sie rechnen mit natürlichen Zahlen (L1) und beschreiben ihr Vorgehen (K6), das mehrschrittig ist (AB II).

Fehler zeigen sich in der Beschreibung des Lösungsweges, wenn er unvollständig oder fehlerhaft ist (falsche Zuordnung oder Rechenfehler) oder nicht angegeben wurde. Des Weiteren kann ein Lösungsweg angegeben werden, der nicht zu den anderen Zahlenpaaren der Tabelle passt (mangelndes funktionales Verständnis). Eine **Fehlerdiagnose** wird erleichtert, wenn zusätzlich der formulierte Lösungsweg durch die Schülerin bzw. den Schüler erklärt wird.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können beim Finden oder beim Aufschreiben der Rechenvorschrift gescheitert sein. Beides kann an einfachen Aufgaben (mit einer Operation) geübt werden (vgl. Aufgabe 7.1). Hinweise, wie Schülerinnen und Schüler beim Finden der Vorschrift unterstützt werden können, finden sich bei der Kommentierung zu den Aufgaben 7.1 und 7.2.

Das Formulieren von Lösungswegen fällt Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß schwer. Es kann hilfreich sein, den Schülerinnen und Schülern einige korrekte, unvollständige und fehlerhafte Beschreibungen für das Finden der gesuchten Zahl vorzulegen, aus denen sie die falschen Beschreibungen (begründet) identifizieren, wie:

- Es ist immer die obere Zahl mal 2 zu nehmen und dann plus 2 zu rechnen.
- Ich rechne 31 + 1 und dann mal 2.
- Es ist dasselbe, wie mit den anderen Zahlen zu rechnen.
- Rechne erst plus 1 und dann mal 2.
- Er hat verschiedene Zahlen ausprobiert.
- Es ist die Zahl 31 in den Term 2x + 2 einzusetzen.

Ebenfalls hilfreich kann es sein, vorgegebene Beschreibungen verbessern zu lassen, wie:

- Timo schreibt seine Vorgehensweise so auf:
  „Ich habe die Zahlen in der Tabelle angeschaut. Ich habe überlegt, wie man von der 51 zur 104 kommt. Ich habe in den Taschenrechner getippt: 51 mal 2. Da kam 102 heraus, und plus 2 macht 104. Ich habe alle Zahlen in der Tabelle genauso nachgerechnet. Ich habe gerechnet 31 mal 2 und dann plus 2. Ich habe die 64 in die Tabelle geschrieben.“
  Kann bei Timos Beschreibung etwas weggelassen werden? Verbessere seine Formulierungen?

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können im Unterricht anspruchsvollere Zuordnungen bearbeiten (vgl. Anregungen in den Kommentierungen der Aufgaben 7.1 und 7.2).
Weitere Aufgaben können zur Fehlersuche auffordern, wie:

- „Timo hat in die obige Tabelle 62 eingetragen.
  Begründe, warum das nicht zum Rest der Tabelle passt.“

Darüber hinaus können anhand anderer geeigneter linearer Zusammenhänge die dazugehörigen Geraden im Koordinatensystem eingezeichnet werden (vgl. Aufgabe 25). Schülerinnen und Schüler können diskutieren, ob und wie es möglich ist, eine fehlende Zahl auch zeichnerisch zu finden. Dabei brauchen sie eine sichere Grundvorstellung über den Zusammenhang von Wertetabellen, Graphen und evtl. auch Funktionsgleichungen.

Aufgabe 8

Ziffer 5
Peter hat nacheinander alle Zahlen von 1 bis 99 notiert.

8.1: Wie oft hat er dabei die Ziffer 5 geschrieben?
8.2: Wie viele Ziffern hat Peter insgesamt geschrieben?

Lösung

8.1: Peter hat dabei 20-mal die Ziffer 5 geschrieben.
8.2: Peter hat insgesamt 189 Ziffern geschrieben.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Es handelt sich um eine kombinatorische Fragestellung im Bereich der natürlichen Zahlen (L1). Die Schülerinnen und Schüler müssen eine geeignete Darstellungsform finden, die sie zur Lösung führt (K2, K3). Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II). Zwei verschiedene Wege sind nachfolgend erläutert:

- Die elementarste ist das Aufschreiben aller Zahlen von 1 bis 99 und das anschließende Auszählen. Diesen Weg werden Schülerinnen und Schüler begehen, denen Grundvorstellungen vom Dezimalsystem als Stellenwertsystem fehlen.
- Ein systematischer Denkansatz zeigt sich im Folgenden:
  7.1: Bei jeder Zahl mit fester Zehnerstelle kommt genau einmal die 5 als letzte Ziffer vor. Ein **Fehler** könnte darin liegen, es mit diesem Argument bewenden zu lassen und als Antwort 10 oder sogar nur 9 zu geben, wenn die Zahlen „ohne Zehnerstelle“ vergessen werden. Es müssen aber noch die 10 Zahlen mit Zehnerstelle 5 betrachtet werden, die alle die 5 als erste Ziffer haben. So erhält man als Ergebnis 10 + 10 = 20.
  7.2: Es handelt sich um 99 Zahlen, von denen 9 aus einer Ziffer und 90 aus zwei Ziffern bestehen, also bestehen die 99 Zahlen zusammen aus $2 \cdot 90 + 9 = 189$ Ziffern. Ein **Fehler** könnte darin liegen, zu übersehen, dass einige Zahlen nur aus einer Ziffer bestehen, dann käme $2 \cdot 99 = 198$ als falsches Ergebnis heraus.

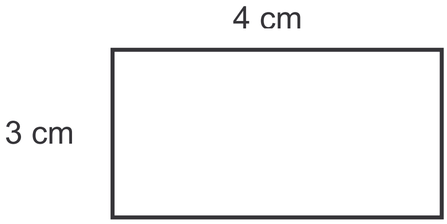
Anregungen für den Unterricht

Die Aufgabe lässt sich für **Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten beim Bearbeiten hatten,** leicht variieren, indem man eine andere Ziffer im Bereich von z.B. 1 bis 20 betrachtet und die zum Ziel führenden Überlegungen in den Mittelpunkt stellt. Danach können sich ähnliche Überlegungen für alle Zahlen von 1 bis 999 (9999, ...) anschließen.

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, können weiteren Fragen in diesem Zusammenhang nachgehen, wie:
Wie viele der Zahlen von 1 bis 99 bestehen aus lauter verschiedenen Ziffern?

Aufgabe 9

Rechteck
Ein Rechteck ist 4 cm lang und 3 cm breit.



(Zeichnung nicht maßgenau)

Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Kreuze an.

- ☐ 12 cm^2
- ☐ 7 cm
- ☐ 7 cm^2
- ☐ 12 cm
- ☐ 14 cm

Lösung

12 cm^2

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

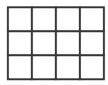
Die Schülerinnen und Schüler ermitteln den Flächeninhalt eines Rechtecks und wählen dabei die richtige Einheit des Flächeninhalts (L2). Dabei müssen sie mit der ihnen vertrauten Formel umgehen (K5, AB I).

Fehler beim Ankreuzen lassen folgende **Diagnosen** zu:
- 7 cm: Die im Bild angegebenen Längenangaben wurden ohne Bezug zur Frage addiert. Es ist kein Bezug zu Umfang oder Flächeninhalt erkennbar.
- 7 cm^2: Die Flächenformel wurde falsch angewendet (plus statt mal), allerdings die richtige Einheit benutzt.
- 12 cm: Die Maßzahl der Fläche wurde richtig berechnet, allerdings die falsche Einheit verwendet.
- 14 cm: Hier wurde der Umfang statt der Fläche berechnet.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich folgende Übungsmöglichkeiten an:
Zu Rechtecken mit vorgegebenen Längen und Breiten sind jeweils Flächeninhalt und Umfang zu ermitteln. Zur Verankerung der Vorstellungen sind die folgenden Bilder hilfreich:

Umfang: 

Flächeninhalt: 

Beim Üben ist insbesondere auf den korrekten Umgang mit den Einheiten zu achten. Mit zunehmender Sicherheit können auch die Umkehraufgaben (zu vorgegebener Maßzahl und Einheit sollen verschiedene Rechtecke gezeichnet werden) eingesetzt werden, etwa:
- Zeichne 3 verschiedene Rechtecke mit dem Umfang 12 cm.
- Zeichne 2 verschiedene Rechtecke mit dem Flächeninhalt 18 cm^2.

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können durch anspruchsvollere Varianten gefördert werden, wie:
I. Kombination verschiedener Einheiten, die das Umrechnen von Größeneinheiten erfordern, wie:
Ein Rechteck ist 0,7 m lang und 13 cm breit. Berechne Flächeninhalt und Umfang und gib beide in zwei verschiedenen Einheiten (m und mm) an.
II. Darüber hinaus kann die Aufgabe geöffnet werden, indem zu vorgegebener Maßzahl (Flächeninhalt oder Umfang) verschiedene ebene Figuren gezeichnet werden sollen, wie:
Zeichne ein Rechteck (ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Dreieck und eine L – Figur) mit dem Flächeninhalt 16 cm^2. Dabei wird das Umwandeln der einzelnen Formen (Abschneiden und Anfügen von Teilflächen) wiederholt.
III. Der Umgang mit Formeln kann geübt werden, indem zu vorgegebenem Flächeninhalt bzw. Umfang eine fehlende Seitenlänge berechnet werden soll, wie:
Ein Rechteck hat den Umfang 32 cm und ist 11 cm breit. Wie lang ist es?
Ein Rechteck ist 5 cm lang und hat den Flächeninhalt 8 cm^2. Wie breit ist es?
Der Schwierigkeitsgrad wird erhöht, indem Dezimalzahlen und verschiedene Maßeinheiten benutzt werden.

IV. Fragen zu minimalem bzw. maximalem Umfang bzw. Flächeninhalt schulen das Argumentieren (K1), wie:
Zeichne ein Rechteck mit dem Umfang 20 cm, das einen möglichst großen Flächeninhalt hat.
Verschiedene Beispiele werden zur Entdeckung des Quadrats als maximale Lösung führen.
Suche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 12 cm^2, das einen möglichst großen Umfang hat.
Durch zunehmende Verbreiterung (Verdünnung) des Rechtecks kommen Schülerinnen und Schüler zu der Entdeckung, dass es kein solches geben kann.

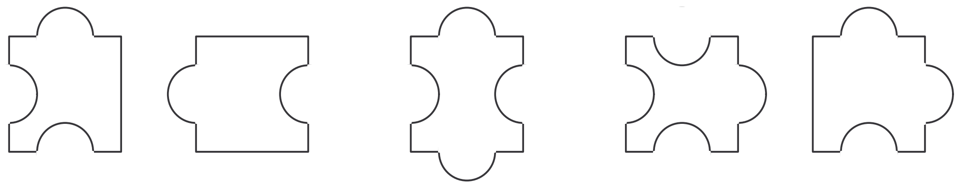
V. Auch ohne den Umgang mit Termen und quadratischen Gleichungen können Schülerinnen und Schüler folgende Fragestellung argumentativ oder experimentell bearbeiten:
Gibt es ein Rechteck mit dem Umfang 20 cm und dem Flächeninhalt 20 cm^2?
Durch die Betrachtung von verschiedenen Rechtecken mit dem Umfang 20 cm und ganzzahligen Seitenlängen kann begründet werden, dass zwischen den Rechtecken 3 cm x 7 cm und dem Rechteck 2 cm x 8 cm eine Lösung liegen muss („Stetigkeitsargument“). Die Aufgabe kann auch rein experimentell durch systematisches Probieren (auch mit Hilfe von Tabellenkalkulation) gelöst werden.

Aufgabe 10

Puzzleteile

Welches dieser Puzzleteile hat den größten Flächeninhalt ?

Kreuze an.



☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Lösung

Das 5. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

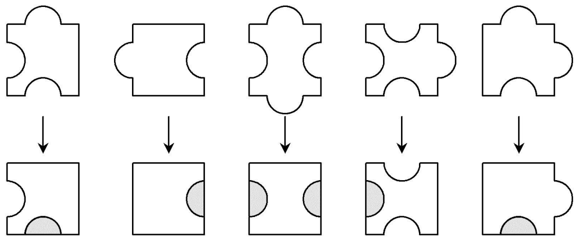
Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Elementare Voraussetzung dieser Aufgabe ist eine Grundvorstellung bei den Schülerinnen und Schülern von Flächengrößen und die Strategie der Zerlegung in disjunkte einfachere Teilflächen, deren Inhalte man addieren kann, um den Gesamtinhalt zu bestimmen. Um Flächengleichheit zu „sehen“, müssen die Schülerinnen und Schüler auch über eine Vorstellung von Kongruenz verfügen, ohne diesen Begriff unbedingt zu kennen.

Das Lösen dieser Aufgabe erfordert von den Schülerinnen und Schülern ein gedankliches Operieren mit den vorgegebenen Flächen (L2). Den größten Flächeninhalt finden sie durch geeignete Strategien im direkten Flächenvergleich (K2). Dazu ist es hilfreich, die komplementären Halbkreise (Ausstülpung und Einbuchtung) zu erkennen, entsprechend gedanklich zusammenzufügen und sich so der ursprünglichen Quadratform zu nähern (K4).

Aufgabe 10



Neben dieser visuellen Vorstellung kann auch das konkrete Zählen der Einbuchtungen und Ausstülpungen bei jeder einzelnen Figur eine Lösungsstrategie sein. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II).

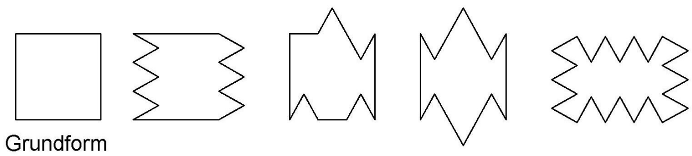
Anregungen für den Unterricht

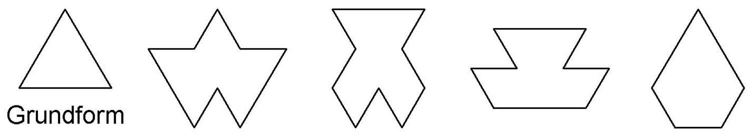
Für den Unterricht bieten sich zahlreiche Aufgabenvariationen zu diesem Sachverhalt an.

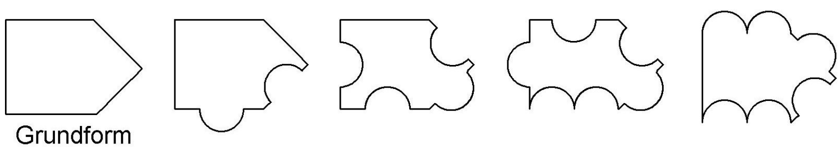
Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgabe hatten, sollten die Lösungsstrategie an Variationen der gegebenen Aufgabe festigen. Gemäß der angesprochenen Grundvorstellung, sollten auch einfachere Flächen betrachtet werden, die aus Rechtecken oder rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt sind.

Bei **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, kann der Schwierigkeitsgrad durch komplexere Formen erhöht werden.

Beispiele:

- 

- 

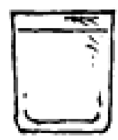
- 

Durch Weglassen der Grundform wird der Schwierigkeitsgrad weiter erhöht.

Aufgabe 11

Saft

Für wie viele Gläser Saft reicht die Flasche ?



1 Flasche Saft
2l

1 Glas Saft
200 ml

Die Flasche reicht für ____________ Gläser Saft.

Lösung

10 Gläser

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe stellt ein einfaches Problem dar, das mit bekannten Verfahren, auch experimentell, gelöst werden kann (K2, AB I). Die Schülerinnen und Schüler vergleichen Volumenangaben und müssen dazu die gegebenen Maßeinheiten umrechnen (L2).

Es ist nicht zu erwarten, dass gehäuft bestimmte **Fehler** auftreten. Die Aufgabe wird den Schülerinnen und Schülern wenig Probleme bereiten, da sie ihrer Erfahrungswelt entspricht.

Anregungen für den Unterricht

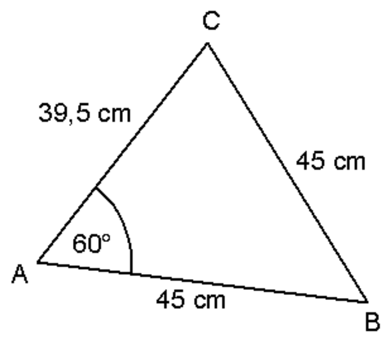
Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es sinnvoll, den Inhalt der Flasche zunächst mit 2000 ml anzugeben.
Im Folgenden sollte im Unterricht mit Volumenangaben gearbeitet werden.

- Nennen geeigneter Repräsentanten zu vorgegebenen Volumenangaben
- Schätzen des Fassungsvermögens von realen Gefäßen bzw. Gegenständen
- Umrechnen von Volumenangaben

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben**, könnte die gestellte Aufgabe folgendermaßen abgeändert werden:
Eine Regentonne fasst $\frac{1}{2}$ m^3 Wasser. Wie viele Gießkannen mit 10 l Fassungsvermögen können daraus gefüllt werden?

Aufgabe 12

Das unmögliche Dreieck



Begründe, warum es kein Dreieck mit diesen Maßen geben kann.

Lösung

Richtige Begründung, die die Unvereinbarkeit von Seitenlängen und Innenwinkeln in diesem Dreieck verdeutlicht, z.B.:
Verbal:
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und gleichzeitig hat ein Innenwinkel das Maß 60°. Folglich müsste dieses Dreieck gleichseitig sein. Daher müssten alle drei Seiten entweder 39,5 cm oder 45 cm lang sein.
Zeichnerisch:
Zeichnen des Dreiecks mit den angegebenen Seitenlängen und Messen des Winkels. Dabei muss mit Hilfe der Zeichnung verdeutlicht werden, dass es das o.g. Dreieck in der Form nicht geben kann.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Argumentieren (K1)** **Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, eine gegebene Aussage zu bewerten (K1), selbstständig unter Anwendung ihrer Kenntnisse geeignete Strategien zur Problemlösung zu entwickeln und eine mehrschrittige und komplexe Argumentation vorzunehmen (K2, AB III).

Die Maßangaben am gegebenen Dreieck sind Grundlage der Bearbeitung (L2). Sie werden genutzt, um geometrische Beziehungen an der Darstellung zu erkennen und zu interpretieren (K4). Um zur Entscheidung zu gelangen, sind Berechnungen nötig oder ein Nutzen vertrauter Formeln und Zusammenhänge (K5).
Zwei denkbare Lösungsstrategien werden bereits in den Lösungshinweisen deutlich, wobei eine zeichnerische Lösung in einem dem Format des Aufgabenblattes angemessenen Maßstab auszuführen wäre.

Fehler in den Argumentationen können auftreten, wenn von den Schülerinnen und Schülern die gleichschenklige Form des Dreiecks zwar erkannt wird, aber Schlussfolgerungen für die Größe der beiden Basiswinkel nicht gezogen werden. Ein Nichtbeachten des Satzes über die Summe der Innenwinkel bzw. von Seite-Winkel-Beziehungen in einem Dreieck kann Ursache für falsche Lösungsdarstellungen sein. Bei zeichnerischer Lösung können der nicht korrekte Umgang mit Maßstäben oder mangelnde Fähigkeiten im Konstruieren zu falschen Lösungen führen.

Anregungen für den Unterricht

Die Form der geforderten Lösungsdarstellung bietet bei dieser Aufgabe vielfältige Möglichkeiten, um mit Schülerinnen und Schülern über ihre Begründungen zu sprechen, eigene Lösungsbeispiele vorzustellen und gemeinsam auf deren Stichhaltigkeit und Exaktheit hin zu überprüfen. Dazu können verschiedene Sozialformen (z.B. Gruppen- und Partnerarbeit oder Klassenunterricht) genutzt werden. Ein Beitrag zur Kompetenzentwicklung im Bereich des Kommunizierens (K6) kann so über die Aufgabe hinaus geleistet werden.

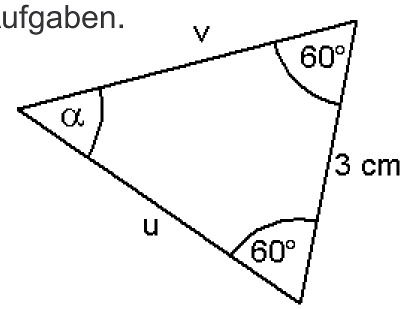
Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, können Eigenschaften verschiedener Dreiecksarten und relevante Sätze zum Dreieck wiederholt werden. Problemen bei zeichnerischen Lösungen könnte im Unterricht durch Vorgabe eines geeigneten Maßstabes bzw. durch entsprechend angepasste Seitenlängen begegnet werden. Hilfen beim Erstellen von Begründungen im Rahmen der gegebenen Aufgabe können Aufforderungen sein, wie:

- Was weißt du über das gegebene Dreieck? (Seiten, Winkel)
- Was gilt für die Größe von Basiswinkeln in gleichschenkligen Dreiecken?
- Beachte den gegebenen Winkel. Bestimme die Größe des Winkels, der von den beiden Schenkeln eingeschlossenen wird. Was bedeutet das für die Basis in diesem Dreieck? Vergleiche mit der Abbildung.

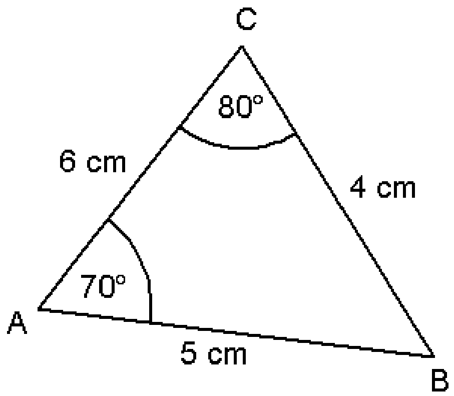
Eine ergänzende Aufgabenstellung zur Unterstützung und Weiterarbeit ist:

Löse für das Dreieck in der Abbildung folgende Aufgaben.
Gib eine Begründung für das jeweilige Ergebnis.

a) Bestimme die Größe des Winkels α.
b) Bestimme die Länge der Seiten u und v.
c) Wie heißen solche Dreiecke?



Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe lösen konnten, können aufgefordert werden, ähnliche Aufgabenstellungen selbständig zu entwickeln, indem sie Zusammenhänge am Dreieck nutzen („Der größten Seite liegt der größte Winkel gegenüber." oder „Die Summe zweier Seitenlängen ist stets größer als die dritte Seitenlänge.")
Beispiel:
Begründe, warum es kein Dreieck mit diesen Maßen gibt.



Zur **Differenzierung** bietet sich der Einsatz dynamischer Geometriesoftware an.

Aufgabe 13

Geld umrechnen

13.1: Rechne um:

27 € 50 Cent = _______ €

13.2: Rechne um:

1 € 1 Cent = _______ Cent

Lösung

13.1: 27,50 oder 27,5
13.2: 101

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Aufgabe 13

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgaben sind elementare Kenntnisse im Umgang mit Größen direkt anzuwenden (L2, K5). Die Aufgabenstellung und das gewählte Zahlenmaterial erlauben eine Lösung „im Kopf“ (AB I).
Mögliche **Fehler** können auftreten, wenn die geforderten Einheiten nicht richtig erfasst werden und statt in € in Cent umgerechnet wird oder umgekehrt. Wird beim Betrag in Teilaufgabe 2 die Zuweisung zur Stellentafel nicht berücksichtigt, treten weitere mögliche **Fehler** auf, z.B. 110 Cent oder 11 Cent.

Anregungen für den Unterricht

Das Umrechnen von Größen, hier insbesondere von Geld, kennen die Schülerinnen und Schüler nicht nur aus dem Mathematikunterricht, sondern vor allem aus ihren Alltagserfahrungen. **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben nicht lösen konnten**, sollten Gelegenheit erhalten, verschiedene Anzahlen von Cent – Stücken zu gruppieren, um so die jeweils größeren Münzwerte zu erfassen. Anschließend bieten sich einfache Kopfrechenübungen an (auch regelmäßig am Anfang oder Ende einer Stunde), um Sicherheit beim Lösen dieser formalen Aufgaben zu erlangen. Bei fehlerhaften Antworten zur Teilaufgabe 2 kann es erforderlich sein, an einfachen Aufgaben die Bedeutung der Stellenwerte zu wiederholen.

Aufgabenvariationen sind z.B.:

- Ergänze zu vollen 10 €:
  3,50 € ; 5,55 € ; 7,99 € ; 50 Cent ;
  4 € und 80 Cent ;
  9 € und 5 Cent

- Finde die Fehler und berichtige:
  3 € = 30 Cent
  505 Cent = 50,5 €
  2,5 € = 25 Cent
  12,2 € = 122 Cent
  340 Cent = 34 €

Aufgabe 14

Minuten und Sekunden

Rechne die Zeitangaben um und fülle die Lücken aus .

95 s = _1_ min _35_ s	___ s = 3 min 28 s
136 s = ____ min ___ s	___ s = 8 min 20 s

Lösung

208 (s)   2 (min) 16 (s)   500 (s)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe verlangt das Umwandeln von Zeiteinheiten (L2, K5, AB I). Auch im täglichen Leben wird dies benötigt. Es gilt zu beachten, dass (aus historischen Gründen) die Zeitmessung nicht in Einheiten erfolgt, die Stellenwerte des Dezimalsystems repräsentieren.

Wenn das nicht im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler verankert ist, können **Fehler** dadurch entstehen, dass eine Minute durch 10 oder 100 Sekunden ersetzt wird, z.B. 3 min 28 s wären dann 328 s. Zumindest Grundvorstellungen von den beiden Zeiteinheiten müssen von den Schülerinnen und Schülern aktiviert werden. Einfache Multiplikation mit 60 und Division mit Rest durch 60 muss beherrscht werden.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können sich im Rahmen von Binnendifferenzierung systematisch damit auseinandersetzen, dezimale Stundenangaben umzurechnen in Formate des Typs
Stunden : Minuten : Sekunden (letztere: dezimal) und umgekehrt, wie die folgende Tabelle zeigt.

Dies formal zu bewerkstelligen mit Hilfe einer Excel-Tabelle (deren Zellen nur als Dezimalzahlen formatiert sind), fordert auch Schülerinnen und Schüler heraus, die die Aufgabe lösen konnten.

Zeit dezimal in Stunden		Stunden	Minuten	Sekunden
2,47895		2	28	44,22
0,005		0	0	18
127,115		127	6	54
7,923		7	55	22,8
2,47895		2	28	44,22
11,94263889		11	56	33,5

Zeit dezimal in Stunden		Stunden	Minuten	Sekunden
2,47895		=GANZZAHL(A3)	=GANZZAHL((A3-C3)*60)	=(A3-C3)*3600-D3*60
0,005		=GANZZAHL(A4)	=GANZZAHL((A4-C4)*60)	=(A4-C4)*3600-D4*60
127,115		=GANZZAHL(A5)	=GANZZAHL((A5-C5)*60)	=(A5-C5)*3600-D5*60
=C7+D7/60+E7/3600		7	55	22,8
=C8+D8/60+E8/3600		2	28	44,22
=C9+D9/60+E9/3600		11	56	33,5

Aufgabe 15

Fehlendes Zeichen
Setze das jeweils richtige Zeichen ein.
Folgende Zeichen kannst du benutzen: <, >, =

700 cm	____	17 m
5 m	____	5,50 m
180 cm	____	1,80 m
20 cm	____	20 mm
4 cm	____	40 mm
0,8 cm	____	100 mm

Lösung

700 cm	<	17 m
5 m	<	5,50 m
180 cm	=	1,80 m
20 cm	>	20 mm
4 cm	=	40 mm
0,8 cm	<	100 mm

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler vergleichen Längenmaße. Das setzt sichere Grundvorstellungen gängiger Maßeinheiten und Größenordnungen voraus. Regelkenntnisse für das Umwandeln werden ebenfalls benötigt (L2). Es ist mit vertrauten Formeln und Symbolen umzugehen (K5, AB I).

Fehler können entstehen, wenn die genannten Voraussetzungen nicht vollkommen vorliegen, insbesondere bei Fehlvorstellungen zu den Längenmaßen. Darüber hinaus können Flüchtigkeitsfehler entstehen, weil mehrfach einfache Antworten zu geben sind.

Die Fehlerursache ist nicht eindeutig aus der Lösung erkennbar. Deshalb sind zur **Diagnose** Nachfragen zum Bearbeitungsweg oder Aufforderungen zum Erklären desselben erforderlich.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sind vermutlich häufig an der Wahl des richtigen Umrechnungsfaktors gescheitert. Daher sollen im Unterricht zunächst Größen mit gleicher Maßeinheit verglichen werden. Anschließend ist zu empfehlen, an geeigneten Repräsentanten von Längenmaßen (z.B. Tafellineal 1 m = 10 dm = 100 cm) die Umwandlung durchführen zu lassen. Eventuell muss die Stellenwerttafel nochmals thematisiert werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können aufgefordert werden – falls noch nicht vorhanden – anschauliche Hilfen zum Aushängen im Klassenzimmer zu erstellen. Dabei sollten auch besonders kleine und große Längenangaben (aus dem Makro- und Mikrokosmos) beachtet werden, wie:

- Tiefe der Weltmeere, Entfernungen im Sonnensystem und im Weltraum,
- Dicke eines Blattes, „Höhe“ einer Ameise, Länge von Pantoffeltierchen, Feinstaubabmessungen.

Aufgabe 16

Winkel im Dreieck
In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel γ an der Spitze dreimal so groß wie ein Basiswinkel α.
Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?
Kreuze die richtige Antwort an.

☐ $\alpha = 30°$, $\gamma = 90°$
☐ $\alpha = 20°$, $\gamma = 120°$
☐ $\alpha = 36°$, $\gamma = 108°$
☐ $\alpha = 22{,}5°$, $\gamma = 135°$

Lösung

$\alpha = 36°$, $\gamma = 108°$

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler haben aus den gegebenen Größen des Dreiecks (L2) die einzige korrekte Lösung zu ermitteln. Zur Lösung des Problems sind verschiedene Wege, wie Vor- oder Rückwärtsarbeiten, möglich (K2):

- Durch Nutzung der vorliegenden Beziehungen am gegebenen Dreieck erhält man $3\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180°$ und damit $\alpha = 36°$ und folglich $\gamma = 108°$.
- Durch Überprüfen der gegebenen Antworten kann ermittelt werden, ob ein entsprechendes Dreieck die Bedingungen erfüllt (K4, K5). Es reicht nicht aus, bei den gegebenen Antworten zu prüfen, ob die Größe des Winkels γ das Dreifache des Winkels α ist. Außerdem muss auch die Summe der Innenwinkel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ betragen.

Ein wie auch immer gearteter Lösungsweg erfordert ein Strategie gestütztes mehrschrittiges Vorgehen (AB II).

Fehler können bedingt sein durch Nichtbeachten der im Aufgabentext genannten Bedingung für die beiden Winkel (Ankreuzen der 2. und 4. Antwort), durch Nichtbeachten des Satzes über die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck (Ankreuzen der 1. Antwort) oder eine Kombination beider Fehler.

Eine **Diagnose** kann hier durch das Einfordern von verbalen Begründungen für die getroffene Auswahl erfolgen.

Anregungen für den Unterricht

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben,** können im Unterricht weitere Aufgaben betrachtet werden, wie:

- In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt der Winkel, den die beiden gleich langen Seiten bilden, 40°. Wie groß sind die beiden anderen Winkel?
- Die Seiten eines Dreiecks sind alle 5 cm lang. Wie groß sind seine Innenwinkel?
- In einem Dreieck verhalten sich die Innenwinkel wie 3 : 2 : 1. Gib ihre Größe an.

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe lösen konnten, können angeregt werden, über Existenz und Eindeutigkeit von Dreiecken, für die Stücke bzw. Eigenschaften gegeben sind, nachzudenken und ihre Überlegungen Mitschülern vorzustellen. Empfehlenswert sind auch Aufgaben, wie:

- Zwei gleichlange Seiten eines Dreiecks schließen einen spitzen Winkel ein. Erläutere anhand einer Skizze, welche Aussagen sich über die beiden anderen Winkel in diesem Dreieck treffen lassen. Was lässt sich über die Verhältnisse der Seitenlängen in diesem Dreieck sagen? Wie heißen solche Dreiecke?
- Ergänze für die Dreiecke ABC die Tabelle.

Innenwinkel der Dreiecke ABC			Dreiecksart		längste Seite des Dreiecks
α	β	γ	nach Seiten	nach Winkeln	
54°	78°		unregelmäßig	spitzwinklig	
	30°	105°	unregelmäßig	stumpfwinklig	
60°	60°		gleichseitig	spitzwinklig	
50°	50°		gleichschenklig	spitzwinklig	

Es empfiehlt sich eine gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 12 „Das unmögliche Dreieck“.

Aufgabe 17

Nachbarseiten im Parallelogramm
Bei einem Parallelogramm ist eine Seite 40 cm lang und eine benachbarte Seite 90 cm. Wie groß ist der Umfang des Parallelogramms? Kreuze an.

☐ 130 cm
☐ 170 cm
☐ 260 cm
☐ 340 cm
☐ 360 cm

Lösung

260 cm

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der vorliegenden Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler den Umfang des beschriebenen Parallelogramms berechnen (L2). Sie interpretieren „benachbarte Seite“ im gegebenen Kontext und erhalten so eine Routineaufgabe (K2). Zur erfolgreichen Bearbeitung müssen Schülerinnen und Schüler über das nötige Faktenwissen bezüglich der Begriffe „Parallelogramm“ und „Umfang“ verfügen und bei der Berechnung des Umfangs mit der vertrauten Formel umgehen bzw. die Vorstellung von Umfang als der Summe der Seitenlängen nutzen (K5, AB I).

Ein zu erwartender **Fehler** ist, dass die Schülerinnen und Schüler keine konkrete Vorstellung vom Begriff des Umfangs eines Vierecks haben und so z.B. lediglich die gegebenen Seitenlängen addieren und den Umfang des Parallelogramms mit 130 cm angeben. Um falsche Antworten nachvollziehen zu können, empfiehlt es sich, die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen verbalisieren zu lassen. Daraus lässt sich individuell eine **Diagnose** erstellen.

Anregungen für den Unterricht

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben,** sollten Eigenschaften des Parallelogramms wiederholt und Übungen zum inhaltlichen Erfassen seines Umfangs durchgeführt werden, wie:

- Zeichnen eines Parallelogramms an der Tafel und Nachfahren des Umfangs mit farbiger Kreide,
- Betrachten eines realen Modells (z.B. in Form eines beweglichen Holzrahmens) und anschauliches Kennzeichnen des Umfangs (z.B. mit farbigem Klebeband).

Anhand des beweglichen Holzrahmens kann darüber hinaus veranschaulicht werden, dass der Umfang nur von den Seitenlängen und nicht von der Form des Parallelogramms abhängt. Die Berechnung des Umfangs weiterer Figuren (z.B. Drachenvierecke, Trapeze, ...) dient zur Vertiefung des Verständnisses. Anschließend bietet sich die Bearbeitung einer praxisbezogenen Aufgabenstellung (z.B. eingezäunte Wiese) an.

Schülerinnen und Schülern, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, können komplexere Aufgaben angeboten werden, wie:

- Der Umfang eines Parallelogramms beträgt 60 cm. Von zwei benachbarten Seiten ist eine doppelt so lang wie die andere.
  Wie lang sind die Seiten dieses Parallelogramms?
- Warum ist der Umfang eines Parallelogramms immer geradzahlig, wenn die Seitenlängen ganzzahlig sind?

Zur gegenseitigen Abgrenzung der Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“ einer Figur empfiehlt sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 9 „Rechteck“.

Aufgabe 18

Fahrplan
Hier siehst du den Fahrplan von Köln mit dem Intercity IC 800 nach Hamburg.

Bahnhof	an	ab
Köln Hbf		10:09
Düsseldorf Hbf	10:30	10:32
Duisburg Hbf	10:44	10:46
Essen Hbf	10:57	10.59
Bochum Hbf	11:07	11:09
Dortmund Hbf	11:20	11:24
Münster (Westf) Hbf	11:53	11:55
Osnabrück Hbf	12:18	12:20
Bremen Hbf	13:13	13:15
Hamburg-Harburg	13:59	14:01
Hamburg Hbf	14:09	

18.1: Wie lange braucht der Zug von Köln bis Hamburg Hbf? ____________
18.2: Herr Schmitz fährt von Essen nach Bremen.
Wie lange braucht der Zug für diese Strecke? ____________
18.3: Frau Krüger fährt von Köln nach Münster.
Wie lange braucht der Zug für diese Strecke? ____________
18.4: An welchem Bahnhof hält der Zug am längsten? ____________

Lösung

18.1: 4 Stunden
18.2: 2 Stunden 14 Minuten oder 134 Minuten
18.3: 1 Stunde 44 Minuten oder 104 Minuten
18.4: Dortmund Hbf

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee		Messen (L2)
Kompetenz	18.1 18.2 18.3	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
	18.4	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich		**AB I**

Aufgabe 18

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Tabelle die jeweils relevanten Zeitangaben (L2) und berechnen Zeitdifferenzen (K5). Da hier nur einfache Routineverfahren benutzt werden, gehört die Aufgabe zu AB I.

Die Schülerinnen und Schüler werden vermutlich **Fehler** machen, wenn der Umgang mit Fahrplänen nicht hinreichend bekannt ist. Insbesondere kann es Verwechslungen bzgl. der An- und Abfahrtzeiten geben. Das Bilden von Zeitdifferenzen, vor allem beim Überschreiten voller Stunden, bereitet häufig Schwierigkeiten. Das hier vorliegende Zahlenmaterial ist jedoch recht einfach.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten,** sollten Fahrpläne zur Berechnung von Fahrzeiten und Aufenthaltsdauern analog der vier gestellten Teilaufgaben eingesetzt werden.
Auch der Zeitplan der Schule von der 1. bis zur 8. Stunde kann vorgegeben werden. Folgende Aufgabenstellungen bieten sich dazu an:

- Wie viel Zeit vergeht von der ersten bis zur letzten Unterrichtsstunde?
- Welche ist die längste Pause?
- Wie viele Minuten Pause gibt es insgesamt?
- Wie lang ist ein Schultag, wenn der Unterricht von der 2. bis zur 6. Stunde dauert?

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, wäre folgende Fragestellung zum obigen Kontext geeignet:
Wie lange ist ein Schüler von zu Hause weg, wenn er für seinen Schulweg eine Viertelstunde braucht und zehn Minuten vor Unterrichtsbeginn an der Schule sein will? Sein Unterricht geht von der ersten bis zur achten Stunde. Er geht direkt von „seinem“ Haus zur Schule und so auch wieder zurück.

Aufgabe 19

Fadenaufgabe

Ein 34 Zentimeter langer Faden wird zu einem Rechteck gelegt .

Die Breite des Rechteckes beträgt 8 Zentimeter.

Wie lang ist das Rechteck ?

- ☐ 8 Zentimeter
- ☐ 9 Zentimeter
- ☐ 13 Zentimeter
- ☐ 18 Zentimeter

Lösung

9 Zentimeter

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabenstellung stellt direkt den Bezug zwischen einer Seitenlänge eines Rechtecks und dessen Umfang her. Zur Bearbeitung muss zunächst eine Lösungsstrategie ausgewählt werden (K2), die dann umgesetzt wird (K5). Neben der Berechnung über eine Umfangsformel (z.B. u = 2a + 2b) ist auch eine sukzessive Bestimmung z.B. anhand einer Skizze möglich.

Die Antwort 8 cm könnte auf die **Fehlinterpretation**, dass es sich um ein Quadrat handelt, hinweisen. Die beiden anderen Antworten sind in der Regel darauf zurückzuführen, dass entweder die gegebene oder die gesuchte Rechteckseite nur einfach in die Bestimmung eingegangen ist.

Anregungen für den Unterricht

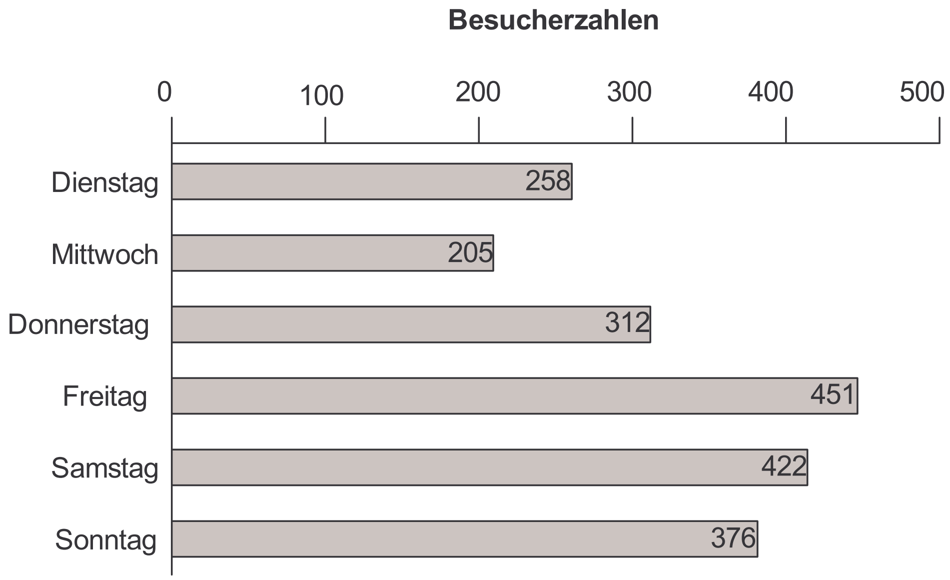
Liegen bei **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, Probleme im Zusammenhang von Seitenlängen und Umfang einer geometrischen Figur vor, so können z.B. anhand von Figuren auf dem Geobrett die Berechnungen aufgearbeitet werden. Einfache Lösungsstrategien zur Bearbeitung von Gleichungen sollten hierbei genauso angesprochen werden wie die Strategien „Zerlegung“ oder „Rückwärtsarbeiten“ zur sukzessiven Bestimmung. Dabei sollten auch Variationen, wie Fragen nach der Änderung des Umfangs bei Verdoppelung, Halbierung etc. entsprechender Seiten, einfließen.
Empfehlenswert ist es, diese Zusammenhänge nicht isoliert zu wiederholen, sondern insbesondere bei der Bearbeitung verschiedener Körper aufzugreifen, wie bei der Berechnung von Materialien zur Anfertigung von Kantenmodellen. Auch der Zusammenhang von Kantenlängen, Gesamtkantenlängen, Oberflächen und Volumina bietet Gelegenheiten zur Übung und Wiederholung.

Hierbei ergeben sich auch für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, Anregungen zur Vertiefung. Modellierungsaspekte (K3), die bei der praktischen Umsetzung von „Ein Faden wird zu einem Rechteck gelegt.“ zu beachten sind, sollten diskutiert werden: „Sollen die Enden des Fadens verbunden werden?“, „Was ist die Konsequenz für die Fadenlänge als Umfang des Rechtecks?“
Analoges gilt für die Herstellung der Kantenmodelle von Würfeln bzw. Quadern aus Draht einer vorgegebenen Länge.

Aufgabe 20.1

Museum

Eine neue Sonderausstellung ist eröffnet worden . Die Besucherzahlen der ersten Woche kannst du der Grafik entnehmen :



(Montags hat das Museum geschlossen .)

An welchem Wochentag kamen die meisten Besucher ?

Antwort: ________________

Lösung

Freitag

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen eine vertraute grafische Darstellung von Daten nutzen und unter einem einfachen Aspekt auswerten (L5, K4, AB I).

Als häufig auftretender **Fehler** ist die Angabe des größten Wertes (451) anstelle des Wochentages zu erwarten. Das kann durch unaufmerksames Lesen bedingt sein.
Ob grundsätzliche Probleme hinsichtlich des Ablesens von Werten aus dieser grafischen Darstellungen vorliegen, kann mit folgenden Fragen überprüft werden (**Diagnose)**:

- An welchem Wochentag kamen die wenigsten Besucher?
- An welchen Wochentagen kamen weniger (mehr) als 300 Besucher?
- Wie viele Besucher kamen pro Tag mindestens in die Sonderausstellung?

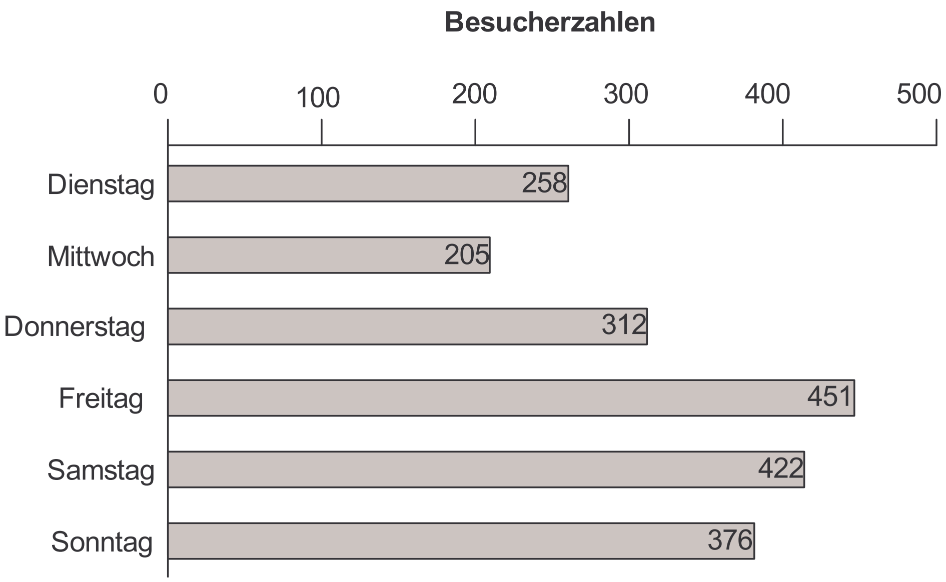
Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten Ableseübungen an verschiedenen graphischen Darstellungen von Daten vornehmen, die Bezug zu unterschiedlichen Kontexten herstellen.
Auch das Erstellen von Diagrammen (z.B. ausgehend von Urlisten oder Tabellen) kann zum Verständnis beitragen. Es empfiehlt sich, dies nicht isoliert durchzuführen, sondern bei entsprechenden Anwendungsbezügen aufzugreifen.
Weitere Aufgaben befinden sich in /1/, S. 58ff.

Aufgabe 20.2

Museum

Eine neue Sonderausstellung ist eröffnet worden. Die Besucherzahlen der ersten Woche kannst du der Grafik entnehmen:



(Montags hat das Museum geschlossen.)

Bestimme, wie viele Personen im Schnitt pro Besuchstag die Ausstellung gesehen haben.

Kreuze an, welcher Wert deinem Ergebnis am nächsten liegt.

- ☐ 289
- ☐ 328
- ☐ 337
- ☐ 344
- ☐ 381

Lösung

337

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen Daten aus einem Diagramm entnehmen (L5, K4). Sie erkennen das zur Lösung führende Modell (arithmetisches Mittel) und führen entsprechende Rechnungen aus (K3, K5). Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Folgende **Fehler** können häufig auftreten:
- 289 - Berechnung mit 7 Tagen,
- 328 - Abschätzen (zu starke Orientierung am Wert 312), Mittelwert aus kleinstem und größtem Wert,
- 344 - Abschätzen, Mittelwert der beiden „mittleren“ Zahlen von Sonntag und Donnerstag (Median),
- 381 - Mittelwert der Werte der beiden in der Mitte liegenden Tage Donnerstag und Freitag (381,5)

Graphisches Ausgleichen kann je nach Ansatz ebenfalls zu den falschen Antworten führen, allerdings bei konsequenter Durchführung auch zum richtigen Ergebnis. Natürlich können auch Rechenfehler nicht ausgeschlossen werden. Eine **Diagnose** möglicher Defizite als auch richtiger Bearbeitungen erfordert die Darstellung des Lösungsweges durch die Schülerin bzw. den Schüler. (Zur unterrichtlichen Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben siehe /1/, S. 96 ff.)

Anregungen für den Unterricht

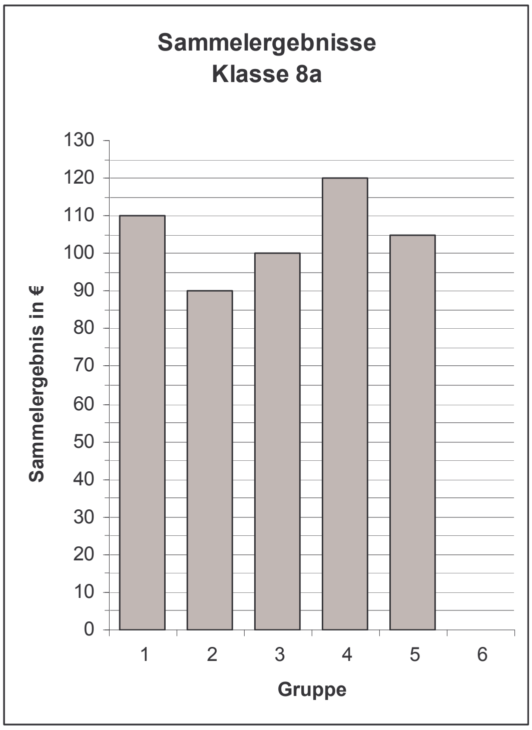
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben, sollten die Berechnung des Mittelwertes mit Hilfe anderer, ihnen vertrauter Daten (z.B. Verteilung von Schülerinnen und Schüler auf Arbeitsgemeinschaften, Zeitdauer für den Schulweg) üben. Dabei sollte die Komplexität der Aufgabe zunächst gering sein.

I. Bei Schwierigkeiten mit dem Begriff des Mittelwertes kann man diesen mit Hilfe einfacher grafischer Darstellungen aufarbeiten:

Für eine Sammelaktion waren zwei Klassen in Gruppen mit der Sammeldose unterwegs.
Sie haben folgende Sammelergebnisse erhalten:

Gruppe	8a	8b
1	110 €	90 €
2	90 €	100 €
3	100 €	110 €
4	120 €	95 €
5	105 €	105 €
6		100 €

a) Bestimme je Klasse die Gesamtsumme und den Mittelwert der Gruppen.
b) Veranschauliche den Mittelwert und Abweichungen vom Mittelwert für die Klasse 8a in nebenstehender Grafik.
c) Zeichne selbst ein Stabdiagramm für die Klasse 8b und veranschauliche wie in b) gefordert.



II. Um Schülerinnen und Schülern bewusst zu machen, dass das arithmetische Mittel nicht die einzige Möglichkeit ist, Daten zu beschreiben bzw. daraus Bewertungen abzuleiten, kann folgende Aufgabe verwendet werden:

Im Sportunterricht wurde Weitsprung geübt. Doris und Dieter haben jeweils fünf Sprünge durchgeführt. Wer ist besser? Führe verschiedene Argumentationen auf.

Sprung	Dieter	Doris
1	4,10 m	4,02 m
2	3,98 m	4,18 m
3	4,07 m	4,12 m
4	4,16 m	1,87 m
5	4,09 m	4,11 m

Dabei erhalten die Kompetenzen „Mathematisch argumentieren (K1)“ und „Kommunizieren (K6)“ eine verstärkte Bedeutung.

Aufgabe 20.2

Variationsreiche Aufgaben, auch im Kontext anderer Fragestellungen, bieten Möglichkeiten zur weiteren Förderung von **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten.** Hierbei können insbesondere Fragen zum Rückwärtsarbeiten aufgegriffen und verschiedene Darstellungsformen verdeutlicht werden. Vor allem aber bieten sich Möglichkeiten zur kritischen Diskussion der Sinnhaftigkeit des Mittelwertes, insbesondere dann, wenn er als einziger Kennwert bei der Beschreibung einer Datenmenge zur Verfügung steht.

Gib verschiedene Möglichkeiten an, wie sich der im nachfolgenden Text hervorgehobene Durchschnittswert ergeben kann. Vergleiche mit dem entsprechenden Ergebnis deiner Mitschülerinnen und – schüler. Schreibe auf, was du feststellst.

Studie: Kids schlafen zu wenig 13.01.2008

LONDON (urlbase.de) - Jugendliche schlafen immer weniger. Das hat eine Studie in Großbritannien ergeben. 14- bis 15-Jährige benötigten zehn Stunden Schlaf pro Nacht, so die Wissenschaftler, bekämen aber oft nur **sieben bis acht Stunden**. Dieser Schlafmangel führe über kurz oder lang zu Konzentrationsschwierigkeiten und damit auch zu Lernstörungen. …
(http://www.urlbase.de/include.php?path=content/articles.php&contentid=31355

Aufgabe 21

Körpertemperatur

Oliver liegt im Krankenhaus . Da er mit hohem Fieber eingeliefert wurde , wird mehrmals am Tag seine Körpertemperatur gemessen .

Oliver					
	6 Uhr	**9 Uhr**	**12 Uhr**	**15 Uhr**	**20 Uhr**
Sonntag	-	-	39,8°	39,7°	39,9°
Montag	38,5°	38,1°	38,0°	38,2°	38,5°
Dienstag	37,9°	37,9°	38,1°	38,3°	38,3°
Mittwoch	37,3°	37,5°	37,7°	37,6°	37,4°

21.1: Wann wurde die höchste Temperatur gemessen?

Kreuze an.

- ☐ Montag, 6 Uhr
- ☐ Montag, 9 Uhr
- ☐ Dienstag, 15 Uhr
- ☐ Sonntag, 20 Uhr

21.2: Wann wurde die niedrigste Temperatur gemessen?

Kreuze an.

- ☐ Montag, 12 Uhr
- ☐ Dienstag, 6 Uhr
- ☐ Mittwoch, 6 Uhr
- ☐ Mittwoch, 20 Uhr

Lösung

21.1 4. Kästchen (Sonntag, 20 Uhr) wurde angekreuzt
21.2 3. Kästchen (Mittwoch, 6 Uhr) wurde angekreuzt

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen Daten zu einer aus dem Alltag bekannten Situation in Form einer Tabelle auswerten (L5). Sie bestimmen die höchste bzw. niedrigste Temperatur in der Tabelle und lesen die zugehörige Zeit und den Wochentag richtig ab (K4, AB I).

Zur **Diagnose** von Ablesefehlern sollte im Unterricht durch die betreffenden Schülerinnen und Schülern ihre Vorgehensweise beschrieben werden.

Anregungen für den Unterricht

Der Themenbereich Temperatur bietet vielfältige verwandte Sachverhalte, die eine vergleichbare Aufgabenstellung zulassen (z.B. Außentemperatur, Wassertemperatur, Raumtemperatur, Schmelzpunkte und Siedepunkte verschiedener Materialien).

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet es sich an, die Situation nachvollziehbar zu besprechen. Das beinhaltet auch den Schluss, dass die höchste Temperatur eventuell am Einlieferungstag gemessen wurde. Damit ergibt sich die zusätzliche Frage nach dem Einlieferungstag und den an diesem Tag gemessenen Temperaturen. Dann könnten die Temperaturen des folgenden Tages bzw. der folgenden Tage betrachtet werden. (Ist das Fieber gefallen? Wann war die Temperatur am niedrigsten?) Auch Fragen zu Tabellen mit weniger Datenmaterial, z.B. Temperaturwerte nur um 6 Uhr und 15 Uhr oder nur an einem Tag, bieten bei geringerer Datenmenge eine leichtere Bearbeitung derselben Fragen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten,** schließen sich vielfältige Variationsmöglichkeiten an:

- Die Temperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt wird erfragt bzw. umgekehrt, die Körpertemperatur wird vorgegeben und der zugehörige Zeitpunkt, bzw. die zugehörigen Zeitpunkte (z.B. bei 38,5°) sollen mit Hilfe der Tabelle bestimmt werden.
- Die Schülerinnen und Schüler erstellen ein Diagramm aus der Tabelle. Die gleichen Fragestellungen werden durch Ablesen aus dem Diagramm beantwortet.
- Ein Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen kann im Unterricht thematisiert und geübt werden:
  Text mit Temperaturvorgaben → Tabelle erstellen
  Graph vorgegeben → Tabelle erstellen
  Tabelle vorgegeben → geeigneten Graphen erstellen
- Mit der Aufgabenstellung wie „Beschreibe den Verlauf des Fiebers." kann inhaltliches Verständnis gefördert werden (AB II).

Aufgabe 22

Münzwurf

Wenn eine Münze geworfen wird, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl oben liegt, $\frac{1}{2}$.

Zahl 

Adler 

In drei aufeinander folgenden Würfen landet die Münze jedes Mal so, dass die Zahl oben ist. Welche der vier Aussagen trifft für den vierten Wurf zu?

Kreuze die richtige Aussage an.

☐ Es ist wahrscheinlicher, dass der Adler oben liegt.

☐ Es ist wahrscheinlicher, dass die Zahl oben liegt.

☐ Es ist gleich wahrscheinlich, dass Zahl oder Adler oben liegt.

☐ Um die Frage zu beantworten, braucht man noch mehr Informationen.

Lösung

Es ist gleich wahrscheinlich, dass Zahl oder Adler oben liegt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die gestellte Aufgabe verbindet den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ mit dem Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“ (L5). Die Schülerinnen und Schüler müssen die Problemsituation verstehen, die gegebenen Auswahlantworten bewerten (K6) und der realen Situation zuordnen (K3). Die Lösung dieser Aufgabe hängt sehr davon ab, wie sicher der Wahrscheinlichkeitsbegriff bei den Schülerinnen und Schülern verinnerlicht ist und wie sie in der Lage sind, die Wahrscheinlichkeit von der realen Spielsituation zu trennen (AB II).

Es ist zu erwarten, dass einige Schülerinnen und Schüler die folgenden **Fehler** begehen:
Sie vermuten, dass nach dreimal "Zahl oben" sehr wahrscheinlich

- „Adler oben“ oder
- wieder „Zahl oben“ eintritt.

In beiden Fällen berücksichtigen die Schülerinnen und Schüler nicht, dass bei diesem Münzwurf laut Aufgabenstellung beide Ergebnisse gleichwahrscheinlich und voneinander unabhängig sind.

Anregungen für den Unterricht

Mit **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben,** sollten Übungen mit einfachen Zufallsexperimenten durchgeführt werden, bei denen sie (Laplace-) Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Bei Umkehrung der Fragestellung, also bekannten Wahrscheinlichkeiten, kann die Unabhängigkeit von Ereignissen thematisiert werden.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten, können ihr Verständnis des Begriffs Wahrscheinlichkeit in andern Zusammenhängen anwenden. Beispiele dafür sind Aufgaben zu Glücksrädern, wie in /3/, S. 20, Aufgabe 5 oder zu Gewinnchancen bei Spielen, die in /1/, S. 69 ff. kommentiert sind.
Vgl. auch die Kommentierungen zu den Aufgaben 23 und 24 in diesem Heft.

Aufgabe 23

Spielsteine

Eine Kiste enthält 45 farbige Spielsteine : blaue, grüne und gelbe. Wenn die Wahrscheinlichkeit , einen gelben zu ziehen , $\frac{2}{5}$ beträgt, wie viele gelbe Spielsteine sind dann in der Kiste ?

Kreuze an.

☐ 2

☐ 5

☐ 9

☐ 18

Aufgabe 23

Lösung

18

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe beschreibt ein Zufallsexperiment, bei dem jeweils ein Spielstein aus 45 Spielsteinen gezogen wird (mit Zurücklegen). Die Wahrscheinlichkeit, einen der gelben Steine zu ziehen, beträgt $\frac{2}{5}$.

Die Schülerinnen und Schüler interpretieren die gegebene Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „gelber Stein gezogen“ als

Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$.

Da 45 Ereignisse möglich sind, gilt:

$P(A) = \frac{2}{5} = \frac{x}{45}$; $x = 45 \cdot \frac{2}{5}$; also: $x = 18$

$P(A) = \frac{2}{5} = \frac{x}{45} = \frac{18}{45}$; also: $x = 18$

Es sind also 18 gelbe Spielsteine vorhanden (L5, K3, K5, AB I).

Der geringe Schwierigkeitsgrad der Aufgabe zwingt, auftretende **Fehler** besonders ernst zu nehmen. Das sichere Verständnis für (Laplace) „Wahrscheinlichkeit" sollte durch Nachfragen zum Vorgehen **diagnostiziert** werden.
Gerade wenn 2 oder 5 angekreuzt wurde, lässt dies ein Raten vermuten, das auf einer wagen Erinnerung basiert, da Brüche mit ihrem Zähler und Nenner von Bedeutung in diesem Zusammenhang sind. Die angekreuzte 9 könnte im Zusammenhang mit dem Erweiterungsfaktor stehen, der damit aber inhaltlich falsch gedeutet wurde.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten am konkreten Zufallsversuch, am besten wie beschrieben, mit 18 gelben Steinen Ziehungen (mit Zurücklegen) durchführen und in einer Häufigkeitstabelle (mit absoluter und relativer Häufigkeit) festhalten. Die Annäherung der relativen Häufigkeit für das vorgegebene Ereignis an $\frac{2}{5}$ bei hinreichend vielen Ziehungen kann dann von den betreffenden Schülerinnen und Schülern selbst erlebt werden. Der Übergang zur Laplace-Wahrscheinlichkeit liefert dann den Lösungsgedanken.
Die erworbene Einsicht kann auf eine ähnliche Aufgabe angewendet werden, wie:

- Die Seiten eines Würfels sind mit jeweils einer Farbe angestrichen (gelb, grün, rot). Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gelbe Seite oben liegt $\frac{1}{3}$. Wie viele Seiten sind gelb?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können durch weitere Aufgaben aus diesem Heft (z.B. Aufgabe 22) gefördert werden.

Aufgabe 24

Rotblauer Würfel

Jede der sechs Flächen eines Würfels ist angemalt. Einige Flächen sind rot und einige Flächen sind blau. Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Fläche oben liegen bleibt, $\frac{2}{3}$. Wie viele Flächen des Würfels sind rot angemalt?

Kreuze an.

- ☐ eine
- ☐ zwei
- ☐ drei
- ☐ vier
- ☐ fünf

Aufgabe 24

Lösung

vier

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Für das Lösen der Aufgabe ist eine geeignete Modellierung zu finden, die den Kontext (gegebener Würfel mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "rote Fläche liegt oben") abbildet (L5, K3). Die Lösungsidee (K2) lässt sich aus dem Verständnis der Laplace - Wahrscheinlichkeit entwickeln ($\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$), wobei 6 die Anzahl der möglichen Ereignisse ist. Man kann dieses Item auch als eine Art „Umkehrproblem“ interpretieren, nämlich nicht eine Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, sondern einen Kontext zu konstruieren, in dem eine gegebene Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Ein möglicher **Fehler** besteht darin, den Zähler des angegebenen Bruchs (für die Wahrscheinlichkeit) direkt auf die Anzahl der roten Seiten zu beziehen, also „zwei“ anzukreuzen.

Anregungen für den Unterricht

Das vielfältige Umgehen und Experimentieren mit Spielwürfeln und anderen „Laplace - Geräten“ und dabei einerseits die experimentelle Bestimmung von relativen Häufigkeiten und andererseits die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist Voraussetzung für das Lösen von derartigen Aufgaben. Schülerinnen und Schüler, bei denen dies gefestigt wurde, sollten nun umgekehrt, ausgehend von gegebenen Wahrscheinlichkeiten, geeignete Zufallsgeräte „konstruieren“.

Besondere Aufmerksamkeit sollten dabei die folgenden Aspekte erfahren:

- Wahrscheinlichkeiten können nur berechnet werden, wenn andere Wahrscheinlichkeiten vorher bekannt oder festgelegt sind. Die Frage nach der Gültigkeit der Laplace - Hypothese, d.h. der Annahme einer Gleichverteilung bestimmter Elementarereignisse, darf nie als Selbstverständlichkeit betrachtet werden, sondern muss aus Symmetriebetrachtungen hergeleitet oder auch oftmals in Frage gestellt werden bzw. mit Gegenbeispielen kontrastiert werden.
- Das Auseinanderhalten der Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ und „relative Häufigkeit“ und die Dialektik ihres Verhältnisses (von Theorie und empirischer Praxis) zueinander, muss immer wieder thematisiert werden.
- Spiele und (Zufalls-) Experimente im Unterricht müssen offene für die Schülerinnen und Schüler spannende Ergebnisse liefern und sollten durch Hypothesen vorbereitet werden.

Aufgabe 25.1

Wertetabelle

Kevin berechnet folgende Wertetabelle einer linearen Funktion . Der letzte y-Wert fehlt noch.

x	2	3	4	5	6
y	7	10	13	16	

Ermittle den fehlenden y - Wert und trage ihn in die Tabelle ein.

Lösung

19

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Berechnung des fehlenden y - Wertes müssen Schülerinnen und Schüler einen funktionalen Zusammenhang erkennen und nutzen (L4). Dies kann aus der Betrachtung der x – Werte (immer um 1 größer) und der y – Werte (immer um 3 größer) oder aus der erkannten Zuordnungsvorschrift für die y - Werte erfolgen (Das Dreifache von x plus 1). Das Lösen erfolgt in einer vertrauten und geübten Darstellung (K4, AB I). Es sind einfache Rechnungen auszuführen (K5). Es ist auch möglich, die Punkte (x ; y) in ein Koordinatensystem zu zeichnen und den fehlenden y - Wert abzulesen, nachdem die Punkte durch eine Gerade verbunden wurden.

Sollten **Fehler** auftreten, kann erst im folgenden Unterricht eine genaue **Diagnose** erfolgen. Hierzu muss die betreffende Schülerin bzw. der betreffende Schüler das eigene Vorgehen beschreiben. Verschiedene Lösungswege sollten besprochen werden.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst zu gegebenen einfachen Gleichungen linearer Funktionen y = f(x) zugehörige Wertetabellen aufstellen und dabei den inhaltlichen Zusammenhang zwischen x - Werten und y - Werten in der Wertetabelle reflektieren. Fortgesetzt kann die Wertetabelle werden mit Fragen wie „Wenn x = 10 ist, wie groß ist dann y?“ oder „Wenn y = 22 ist, wie groß muss dann x sein? Beschreibe, wie du rechnest.“ Dann kann eine Aufgabe, ähnlich wie die gegebene, aber mit einfacherer Funktionsgleichung gestellt werden (z.B. y = 2x oder y = x + 1).

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben,** kann durch die Wahl des Zahlenmaterials (auch negative Zahlen und Dezimalzahlen), die Komplexität der Bildungsvorschrift oder die Art und Weise der Belegung der Tabelle der Schwierigkeitsgrad variiert werden, wie:

I. Die folgende Tabelle beschreibt eine lineare Funktion. Eine der eingetragenen Zahlen ist falsch. Streiche sie durch und ergänze die richtige Zahl.

x	3	4	5	6
y	7,2	8,4	9,8	10,8

Schülerinnen und Schüler, die keinen Zugang zu dieser Aufgabe haben, können die Tabelle grafisch darstellen und so den „Ausreißer“ erkennen. Die Grafik kann auch dabei helfen, zu argumentieren, warum der Wert 9,8 nicht in die Tabelle passt. Anstelle eines Graphen kann auch eine Skizze (informative Figur) benutzt werden. (Vergleiche auch Aufgabe 7.3 in diesem Heft.)

II. Ergänze die folgende Tabelle einer linearen Funktion:

x	1		5	6	8	
y		2	8		14	20

Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass die beiden Zahlenpaare (5 ; 8) und (8 ; 14) den funktionalen Zusammenhang festlegen. Dieser Zusammenhang (als Term oder als konstante Differenz der y - Werte) wird benutzt, um die fehlenden Lücken zu schließen, wobei bei der Berechnung der x – Werte die Umkehraufgabe gelöst werden muss. (Vergleiche auch die Aufgaben 7.1 und 7.2 in diesem Heft.)

Aufgabe 25.2

Wertetabelle
Kevin berechnet folgende Wertetabelle einer linearen Funktion. Der letzte y – Wert fehlt noch.

x	2	3	4	5	6
y	7	10	13	16	

Welche Gleichung gehört zu der Wertetabelle, die Kevin berechnet hat? Kreuze an.

- ☐ y = x + 5
- ☐ y = x – 5
- ☐ y = 4x – 1
- ☐ y = 3x + 1

Lösung

y = 3x + 1

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe sind unterschiedliche Strategien möglich, die angewendet werden können (K2). Es bietet sich an, durch Einsetzen von gegebenen Wertepaaren (x ; y) die Gültigkeit der jeweiligen Gleichung zu prüfen. Für x = 2 liefert die erste Gleichung den Tabellenwert, aber bereits für x = 3 stimmt der berechnete y – Wert nicht mit dem betreffenden Tabellenwert überein. Das kann bei y = x + 5 wie auch bei y = 4x – 1 zum falschen Schluss führen, so dass diese **Fehler** beim Ankreuzen erklärbar sind. Die zweite Gleichung könnte gewählt worden sein, wenn die x – und y – Werte beim Einsetzen vertauscht wurden, also 2 = 7 – 5, oder statt subtrahiert addiert wurde, also y = 2 + 5. Bei richtigem Einsetzen und Rechnen bleibt nur das Ankreuzen von y = 3x + 1 als Lösung.

Nutzen Schülerinnen und Schüler funktionale Zusammenhänge (L4), können verschiedene Wege zur Lösung führen.

- Schülerinnen und Schüler können die regelmäßige Differenz 3 der y – Werte als Höhe im Steigungsdreieck interpretieren und so auf die einzige Gleichung mit dieser Steigung kommen.
- Sie können auch die Vorstellung zu Grunde legen, dass eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist und daher mit Hilfe von zwei der gegebenen Punkte (etwa der ersten beiden x – und y – Werte) eine Gerade zeichnen, um dann zu prüfen, ob alle weiteren gegebenen Punkte ebenfalls auf dieser Geraden liegen.
- Umgekehrt können die vorgegebenen Terme als Geraden skizziert werden, um dann zu prüfen, ob jeweils alle anderen angegebenen Punkte auf ein und derselben Geraden liegen.

Je nach Vorgehen wechseln sie zwischen den Darstellungsformen und wenden vertraue Verfahren an (K4, K5). Da sie mehrschrittig vorgehen, liegt die Aufgabe im Anforderungsbereich II.

Wegen der verschiedenen Bearbeitungsmöglichkeiten empfiehlt sich für die **Diagnose** auch bei richtig angekreuzter Lösung eine (schriftliche oder mündliche) Dokumentation des Lösungsweges (K1, K6). Es ist auch bei richtiger Lösung nicht ersichtlich, ob Schülerinnen und Schüler u.a. die Funktionsgleichung tatsächlich selbst aufstellen können.

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht sollte wiederholt der Zusammenhang zwischen Wertetabelle, Term, Graph und verbaler Funktionsbeschreibung thematisiert werden, um zwischen den Darstellungsformen nach Notwendigkeit wechseln zu können. Auch die Abgrenzung zu nichtfunktionalen Zusammenhängen sowie die Abgrenzung von linearen zu nichtlinearen Zusammenhängen ist sinnvoll. Um einen Bezug zur Lebenswelt der Schüler herzustellen, sollten jeweils geeignete Sachsituationen ausgewählt werden. Es empfiehl sich der Computereinsatz (z.B. Funktionsplotter, Geometriesoftware, Tabellenkalkulation).

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollte das Verfahren des Verifizierens noch einmal nahe gebracht werden, da es bei Überprüfung der Gültigkeit auf einem eingeschränkten Grundbereich oder bei zu erwartenden Gegenbeispielen oft auf einfachem Wege zum Ziel führt. In diesem Fall bietet sich dies auch auf geometrischem Weg an, indem eine Wertetabelle mit ihren Punkten in ein Koordinatensystem übertragen wird.
Hier sollten vorbereitend folgende Übungen erfolgen:

- Aus einer Geraden im Koordinatensystem einzelne Punkte ablesen.
- In eine Funktionsgleichung Zahlenwerte für x einsetzen und die y – Werte berechnen (und umgekehrt).
- Durch Einsetzen überprüfen, ob Zahlenpaare eine Funktionsgleichung erfüllen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe bearbeitet haben, sollten sich - etwa in Gruppenarbeit - auch mit anderen Lösungswegen auseinandersetzen und ihre eigene Vorgehensweise reflektieren.

I. Sie können auch Aufgaben bearbeiten, die verbale Darstellungen beinhalten, wie:
   - Der y – Wert ist das Dreifache des x – Wertes vermehrt um 4. Schreibe jeweils als Gleichung. Zeichne die passende Gerade dazu.
   - Eine gedachte Zahl wird halbiert und anschließend um 3 vermindert. Wenn 1 das Ergebnis ist, wie heißt dann die gedachte Zahl?

II. Es werden Lagebeschreibungen von Geraden vorgegeben, zu denen dann - ggf. mit Hilfe der Zeichnung - die Funktionsgleichung erstellt werden soll, wie:
   - Eine Gerade geht durch den Punkt (1 ; 2) und schneidet die y – Achse bei –3. Zeichne die Gerade und gib ihre Gleichung an.
   - Eine Gerade ist parallel zu $y = 2x + 5$ und schneidet die x – Achse bei 7. Gib ein Zahlenpaar an, das auf der Geraden liegt und eines, das nicht darauf liegt.

Aufgabe 26

Gleichung
Gegeben ist die Gleichung $6x = 4,2$.
Bestimme x.
x = ______

Lösung

0,7 (oder andere Zahldarstellung)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Zuordnung zur Leitidee funktionaler Zusammenhang ergibt sich aus dem Bezug zum Lösen einer Gleichung (L4). Zur Lösung verwenden die Schülerinnen und Schüler ein ihnen bekanntes Routineverfahren (K5, AB I).

Fehler können entstehen, wenn die Schülerinnen und Schüler keine oder nur falsche Vorstellungen von Gleichungen haben. In diesem Fall finden sie keinen Lösungsansatz bzw. können Umformungsregeln nicht korrekt anwenden. Auch beim Berechnen des Quotienten 4,2 : 6 oder beim Übertragen der Gleichung $6 \cdot 7 = 42$ hinsichtlich der Dezimalstelle können Fehler auftreten.

Anregungen für den Unterricht

Bei der Reflektion der Aufgabe mit **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht gelöst haben**, sollte im Unterricht zunächst eine Darstellung des gewählten Lösungsweges eingefordert werden. Möglichkeiten des kalkülmäßigen oder auch des inhaltlichen Lösens der einfach strukturierten Gleichung sollten durch Schülerinnen und Schüler ergänzt werden, gegebenenfalls mit Anregungen durch die Lehrkraft.

Die Schülerinnen und Schüler sollten für das Bestimmen der Anzahl von Dezimalstellen in der Lösung selbst Regeln erkennen und formulieren.
Dazu dienen Aufgaben, wie:
$8 \cdot x = 56$
$8 \cdot x = 5,6$
$8 \cdot x = 0,56$
$8 \cdot x = 0,056$

Für weiteres Arbeiten mit **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe richtig gelöst haben**, bieten sich eine Vielzahl unterschiedlicher linearer Gleichungen an. Durch das Auftreten von mehrteiligen Termen (auch mit Klammern) kann an der weiteren Ausbildung von Kompetenzen im Lösen von Gleichungen gearbeitet werden. Eine solche Steigerung im Anforderungsniveau ist empfehlenswert. Weiterhin sollte auch auf Inhalte und Begriffe wie Grundbereich, Lösungsmenge und Existenz von Lösungen eingegangen werden.

Aufgabe 27

Postkarten

Martin und Uta kaufen Postkarten . Die Postkarten haben alle den gleichen Preis. Uta kauft neun Karten, Martin kauft sechs Karten .

Die Postkarten kosten zusammen 9,00 € . Wie viel bezahlt Uta ?

Uta bezahlt ________ .

Lösung

5,40 Euro oder 5,4 Euro oder 540 Cent (Die Einheit muss angegeben sein.)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe beschreibt einen Sachverhalt aus dem Alltag. Schülerinnen und Schüler müssen den funktionalen Zusammenhang aus dem Text herausfiltern und in die Sprache der Mathematik übersetzen (L4, K3). Das Vorgehen ist mehrschrittig (K5, AB II).

Verschiedene Lösungswege sind denkbar, die besprochen werden sollten:

- Die Schülerinnen und Schüler stellen eine Gleichung auf, lösen diese und übersetzen das Ergebnis wieder in den Kontext der Aufgabe.
- Der Preis für eine Postkarte wird berechnet (9 € : 15 = 0,60 €) und dann multipliziert. Damit kosten 9 Karten (9 · 0,60 € = 5,40 €) 5,40 € und 6 Karten entsprechend 3,60 €.
- Utes Anteil ergibt sich durch Multiplikation mit dem entsprechenden Anteil: $9\text{ €} \cdot \frac{9}{15} = 5{,}40\text{ €}$.
- Ein anderer inhaltlicher Weg eröffnet sich, indem die 9 und 6 Karten zum Preis von 9,00 € als Pakete zu je 3 Karten (3 x 3 und 2 x 3) betrachtet werden. Somit kostet jedes Paket zu 3 Karten (9 € : 5 = 1,80 €) 1,80 €. 9 Karten, also 3 Pakete, kosten (3 · 1,80 € = 5,40 €) 5,40 € und 6 Karten entsprechen 3,60 €.

Auch eine Lösung durch „systematisches Probieren“ ist vorstellbar, wie:

Preis p einer Postkarte in Euro	Uta bezahlt 9 · p in Euro	Martin bezahlt 6 · p in Euro	Zusammen	9 Euro?
1,00	9,00	6,00	15,00 €	zu viel
0,50	4,50	3,00	7,50 €	zu wenig
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,60	5,40	3,60	9,00 €	stimmt

Häufig auftretende **Fehler** entstehen durch falsches Modellieren, falsche Rechenergebnisse oder fehlende Maßeinheiten.
Eine detaillierte **Diagnose** der Fehlerursachen kann durch Beschreiben des Bearbeitungsweges der Schülerinnen und Schüler im nachfolgenden Unterricht erfolgen.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben, können heuristische Hilfsmittel bewusst gemacht werden, wie Unterstreichen der gegebenen Daten oder Anfertigen einer Skizze:

<table>
<tr><td>9 Karten</td><td>6 Karten</td></tr>
<tr><td colspan="2">15 Karten</td></tr>
<tr><td colspan="2">9 Euro</td></tr>
</table>

Daraus folgt, dass eine Karte $\frac{9}{15}$ € kostet.

Des Weiteren können ähnliche Aufgaben gestellt werden, wie:

- Peter und Maik kaufen Brötchen zu 60 ct. Peter kauft 5 und Maik ein paar mehr. Sie bezahlen zusammen 9 €. Wie viele hat Maik gekauft?
- Peter und Maik kaufen Brötchen zu 60 ct. Peter kauft dreimal so viele wie Maik. Sie bezahlen 12 €. Wie viele Brötchen hat jeder gekauft?
- Wie viele Körnerbrötchen zu 30 ct und Mohnbrötchen zu 50 ct können Peter und Maik gekauft haben, wenn sie zusammen 4,50 € bezahlen?

Immer sollte eine Reflektion zum Lösungsweg erfolgen.

Dabei können zugleich das Modellieren thematisiert, das Rechnen trainiert, die Umrechnung der Maßeinheiten wiederholt und Termstrukturen erkannt werden.

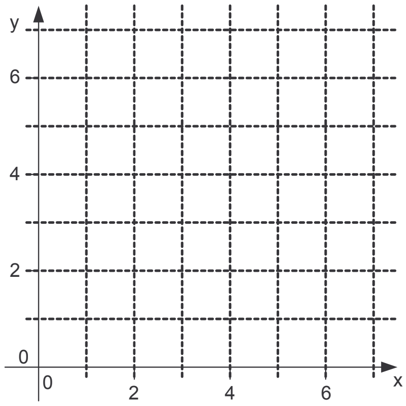
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten ähnliche Aufgaben selbst erstellen und lösen, um sie dann von ihren Mitschülern bearbeiten zu lassen.

Aufgabe 28

Koordinatensystem

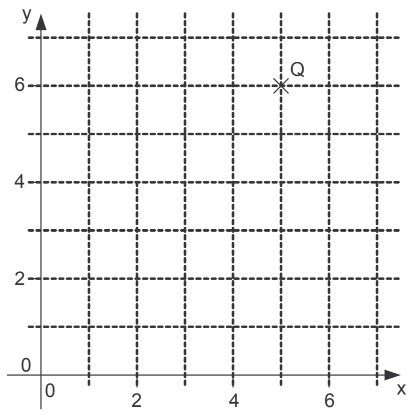
28.1

Zeichne den Punkt P (2 | 3) in das Koordinatensystem ein .



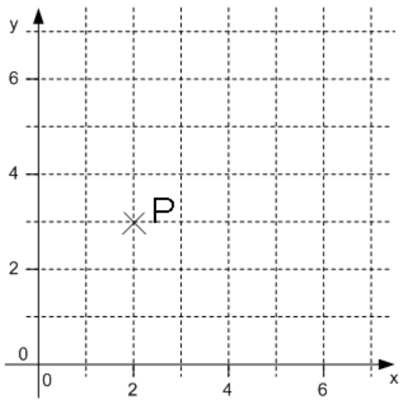
28.2

Trage die Koordinaten des Punktes Q ein . **Q (|)**



Lösung

28.1



28.2

Q (5 | 6)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

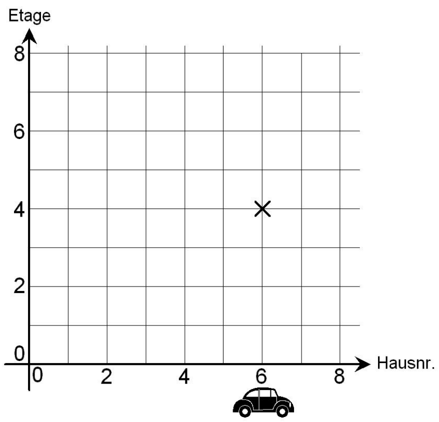
Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das Arbeiten im ersten Quadranten (Gitternetz, Quadratgitter) eines Koordinatensystems ist geübt und insofern vertraut (L3, K4, AB I).

Das Lösen beider Aufgaben verlangt Grundvorstellungen über die Darstellung der Lage von Punkten in der Ebene durch Koordinaten (Datenpaare) und die konsequente Beachtung und Einhaltung der zugehörigen Konventionen: Durch den Punkt werden Parallelen zu den Achsen gezogen (evtl. gedanklich) und deren Schnittpunkte mit den Achsen als Werte auf zwei Zahlenstrahlen gedeutet. Zuerst wird der x – Wert eines Punktes berücksichtigt, danach der y – Wert. Weitere **Fehler** entstehen bei vorhandenem Grundverständnis vermutlich meist durch Konzentrationsprobleme. Falsches Abzählen, auch bedingt durch die Tatsache, dass die Achsenbeschriftung jeweils in Zweierintervallen vorgegeben ist, kann eine Rolle spielen.

Anregungen für den Unterricht

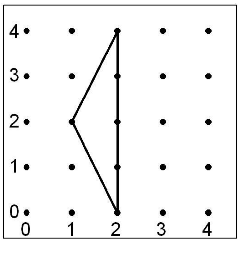
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, haben möglicherweise die Grundidee eines Koordinatensystems nicht verstanden oder die oben benannte Konvention (x ; y) nicht eingehalten. Dem sollte beispielsweise durch das Arbeiten im inhaltlichen Kontext „Paketboten-Modell" („Pizzaservice-Modell") begegnet werden.



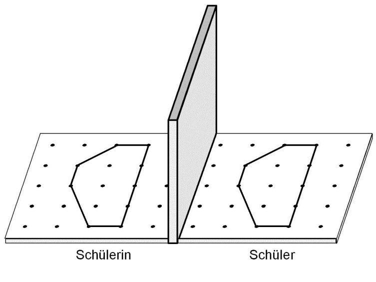
Familie Müller wohnt in der Lindenstraße 6 in der vierten Etage. Paketbote Jan soll dort ein Paket zustellen.
Er fährt erst vom Postamt (0,0) zum Haus mit der Nummer 6 (nach rechts). Dann begibt er sich in die vierte Etage (nach oben). Die Umkehrung dieser Handlungsabfolge ist für alle Lernenden einleuchtend sinnlos.

Sehr wichtig und das Verständnis klärend, sind dabei Interpretationen von Punkten auf den Achsen. Innerhalb des Modells wird dann sehr deutlich, dass auch diese Punkte einen x- <u>und</u> einen y-Wert benötigen, sollen sie präzise geortet werden können.
Zu empfehlen sind weiterhin für alle Schülerinnen und Schüler „Punkt-Diktate". Die von der Lehrkraft genannten Koordinaten benennen Punkte (Nägel) am Geo-Brett. Die umspannten Figuren lassen sich zur schnellen Ergebniskontrolle exakt beschreiben (z.B. „ein gleichschenkliges Dreieck steht auf einer Ecke"). Diese Übung lässt sich dann in der Partnerarbeit (s. Abb.) sinnvoll fortsetzen.

Lehrerdiktat

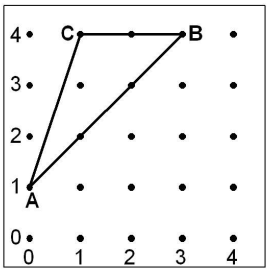


Partnerdiktat in Abwechslung



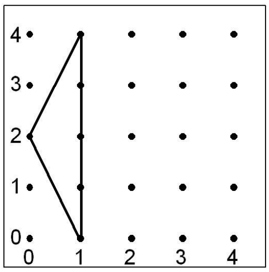
Aufgabe 28

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können durch Aufgabenstellungen wie die folgenden gefördert werden:



Karin sollte ein Dreieck mit den Punkten A (1|0), B (4|3) und C (4|1) aufspannen.

- Was hat sie falsch gemacht?
- Spanne du nun das Dreieck richtig auf.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem von Karin. Welche geometrische Beziehung besteht zwischen beiden Spannbildern?
- Kann man dies verallgemeinern? (AB III)



Um welche Nägel muss das Gummiband zusätzlich gespannt werden, damit

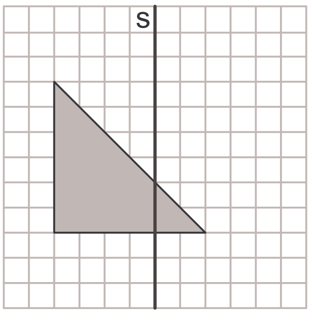
- eine Raute
- ein Drachenviereck
- ein rechtwinkliges Trapez
- ein symmetrisches (gleichschenkliges) Trapez

entsteht?

Nenne jeweils die Koordinaten der zusätzlichen Punkte. (AB II)

Aufgabe 29

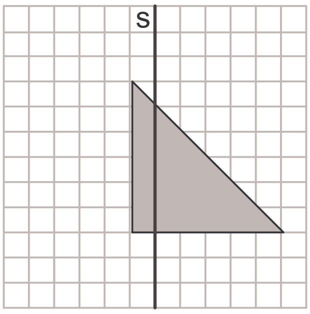
Spiegelung



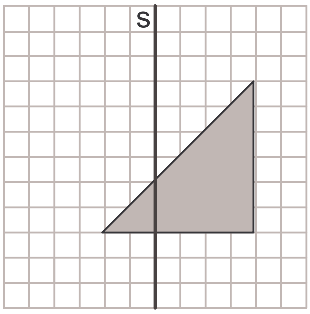
Das graue Dreieck wird an der Achse s gespiegelt.

Welche der Figuren stellt das Ergebnis der Spiegelung dar?

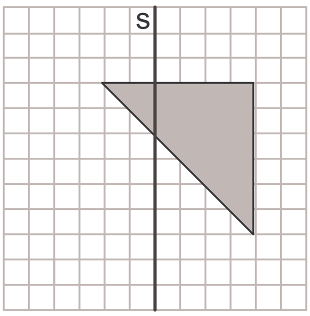
Kreuze an.



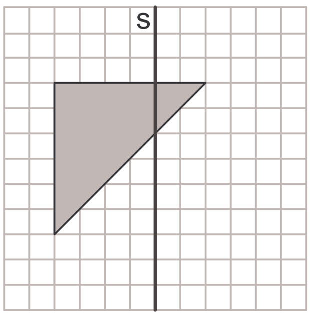
☐



☐



☐



☐

Lösung

Nur das 2. Kästchen (rechts oben) wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das von einer Achse geschnittene Dreieck soll an dieser gespiegelt werden (L3, K4). Zur Lösung gelangen die Schülerinnen und Schüler, indem sie ihre (intuitiven) Vorstellungen von einer Spiegelung auf das Original und die (als möglich) gegebenen Bilder anwenden. D.h. sie untersuchen, ob das Bild „seitenverkehrt“ zum Original ist oder sie wenden ihre Kenntnisse über die Spiegelung an, indem sie prüfen, ob die entsprechenden Original- und Bildpunkte, z.B. die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke, jeweils den gleichen Abstand zu s haben, auf verschiedenen Seiten von s liegen und ihre Verbindungsgerade senkrecht zu s ist. Sie können auch ein gleichschenkliges Dreieck benutzen und versuchen, durch Spiegeln an einer Geraden wie s eines von den Antwortangeboten zu erhalten. Mit der Aufgabe wird ein bekannter Sachverhalt bearbeitet (AB I).

Fehler können entstehen, wenn die Schülerinnen und Schüler die Achsenspiegelung mit einer Drehung (und Verschiebung) wie bei der 3. und 4. Antwort bzw. mit einer Verschiebung wie bei der 1. Antwort verwechseln. Da Original- und Bild-Dreieck nicht in ein und derselben Zeichnung dargestellt sind, können auch Fehler bei der Überprüfung der Eigenschaften der Spieglung entstehen. Da das Original von der Spiegelachse geschnitten wird, können die Schülerinnen und Schüler zwar mit der Handlung „den Spiegel an die Achse halten“ in der Vorstellung operieren, aber erhalten kein vollständiges Bild.

Fehler können genauer **diagnostiziert** werden, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege erklären bzw. die Achsenspiegelung in ihren Heften durchführen.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet sich an, den Schwierigkeitsgrad wie folgt zu reduzieren:

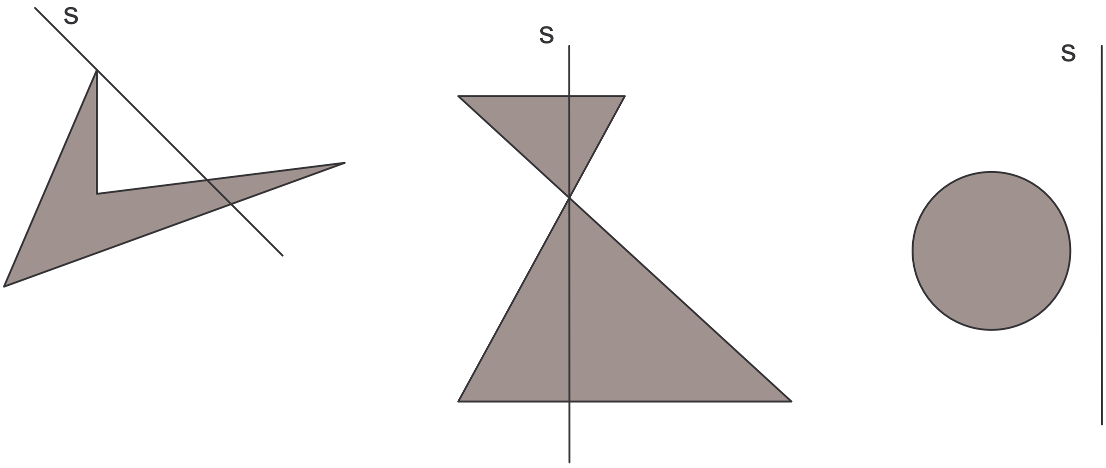
- Es werden zunächst einfache geometrische Figuren an einer Achse gespiegelt wie Punkte und Geraden.
- Die Spiegelachse ist außerhalb der zu spiegelnden Figur.

Alternativ können achsensymmetrische Objekte (z.B. Verkehrszeichen, Landesflaggen) auf ihre Spiegelachsen untersucht werden. Auch Buchstaben eignen sich für diese Übung, wie die folgende Aufgabe zeigt:
Welche der folgenden 15 Buchstaben sind achsensymmetrisch? Kreise sie ein und zeichne alle Spiegelachsen ein.

A B C D E F G H I J K L M N O

Schülerinnen und Schüler, die bei der Bearbeitung der Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, spiegeln komplexere geometrische Figuren als die gegebene, wie:

Spiegele die Figur an der Gerade s.

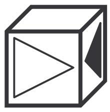


Darüber hinaus sollten auch reale ebene Figuren auf Achsensymmetrie untersucht werden wie Fotografien oder Kunstwerke.
Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen beschreiben, können sich anschließen, wie:

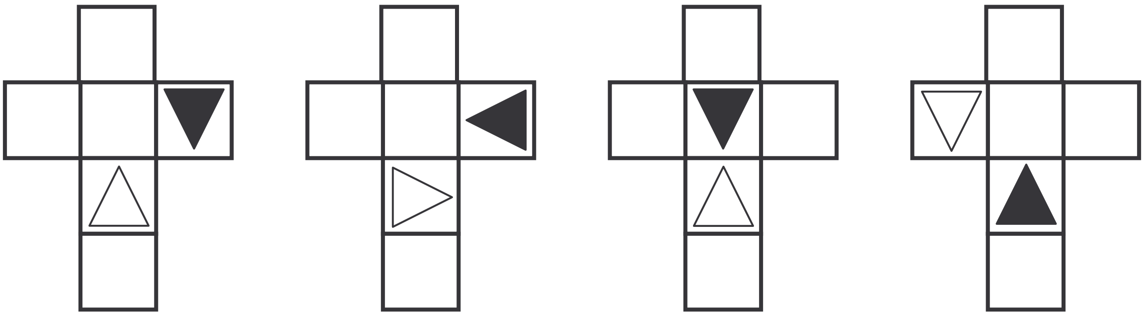
- Beschreibe, wie du vorgehst, wenn du überprüfst, ob zwei gegebene Kreise achsensymmetrisch zu einer Gerade s sind.

Aufgabe 30

Würfelnetze



Welches der vier Netze ergibt beim Zusammenfalten den oben abgebildeten Würfel?
Kreuze an.



□ □ □ □

Lösung

Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen dem gegebenen Schrägbild eines Würfels das passende Netz zuordnen (L3). Dazu müssen sie entsprechende Beziehungen zwischen der Lage der Seitenflächen in der räumlichen und der ebenen Darstellung erkennen (K4, AB II).
Da alle abgebildeten Netze die gleiche Form haben, muss nur die korrekte Lagebeziehung zwischen der Seitenfläche mit dem weißen und der mit dem schwarzen Dreieck herausgefunden werden. Entspricht die gemeinsame Kante im Schrägbild einer Faltkante im Netz, so müssen die Spitzen der beiden Dreiecke aufeinander zuzeigen.

Fehler dürften fast immer auf ein nicht ausreichendes räumliches Vorstellungsvermögen zurückzuführen sein.

Anregungen für den Unterricht

Zur Verbesserung des räumlichen Vorstellungsvermögens bieten sich für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten,** folgende Fördermaßnahmen an:

- Der in der Aufgabe vorgegebene Würfel wird (ausgehend von der Form der in der Aufgabe abgebildeten Netze) aus Papier bzw. mit Hilfe von Steckplättchen gebastelt. Einhergehend werden Falt- und Klebe- bzw. Steckkanten zugeordnet.
- Durch Zerschneiden bzw. Zerlegen der gebastelten Würfel werden möglichst viele verschiedene Netze hergestellt. Anschließend wird die Lage der Seitenflächen zueinander verglichen. (Zur Unterscheidung empfiehlt sich die optische Kennzeichnung der einzelnen Seitenflächen des Würfels.)
- Von einem als Anschauungsobjekt vorliegenden Spielwürfel werden mögliche Netze gezeichnet, wobei die Augenzahl jeder Seitenfläche in der korrekten Lage dargestellt wird.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** bietet sich folgende Aufgabenstellung an: „Ein gegebener Würfel wird zur Hälfte in Farbe getaucht. Zeichne mögliche zu diesem Würfel gehörige Netze.“

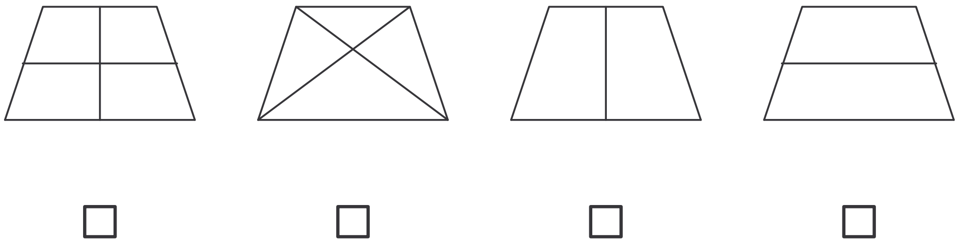
Es empfiehlt sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 35 „Würfel drehen“ und Aufgabe 37 „Quadernetze“.

Aufgabe 31

Symmetrieachsen im Trapez

Welche Zeichnung zeigt **alle** Symmetrieachsen eines gleichschenkligen (symmetrischen) Trapezes?

Kreuze an.



Lösung

Nur das dritte Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung des Items kommt es darauf an, eine geometrische Grundvorstellung von Achsensymmetrie anzuwenden (L3), um die Darstellungen der gegebenen Auswahlantworten zu prüfen (K4). Da vertraue und geübte Darstellungen gegeben sind, wird AB I zugeordnet.

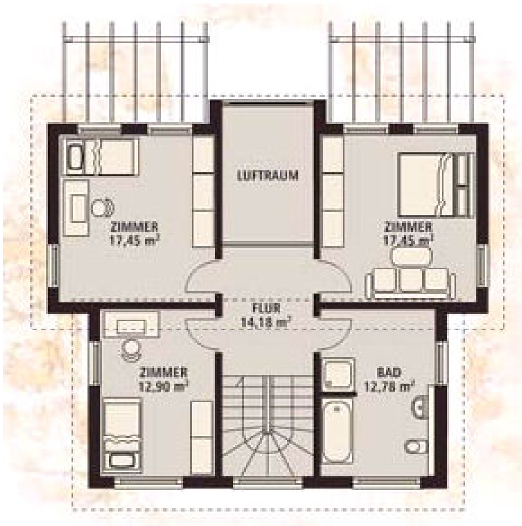
Fehler werden häufig das Ankreuzen des ersten und vierten Kästchens sein, wenn die Mittelparallele des Trapezes mit der Symmetrieachse verwechselt wird. Wird das zweite Kästchen angekreuzt, fehlt vermutlich die Grundvorstellung von Achsensymmetrie.

Anregungen für den Unterricht

Die Symmetrie ist eine besondere und fundamentale mathematische Eigenschaft. Grundlegende – lange ungelöste Probleme der Mathematik – wurden im 19. und 20. Jahrhundert durch konsequentes Verwenden der Idee der Symmetrie elegant und überraschend gelöst. Dies kann in einer 8. Klasse natürlich bestenfalls angedeutet werden, dennoch sollte im Unterricht nicht nur der technische Aspekt des Symmetriebegriffs verdeutlicht werden.

Symmetrien reduzieren die Komplexität von mathematischen Problemstellungen, z.B. das Ausmessen oder Konstruieren einer Figur oder den Rechenaufwand bei algebraischen Problemen mit symmetrischer Struktur. Auch die Erzeugung komplexer ästhetischer Muster (z.B. Weihnachtssterne) mit Papierfalten und Schereneinsatz basiert auf der Idee der Symmetrie. Im Mathematikunterricht sollte bis in die Oberstufe hinein (auch bei Funktionsbetrachtungen) die Idee der Symmetrie immer wieder als Denkwerkzeug aktiviert werden.

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben, sollten zunächst weitere Beispiele und Gegenbeispiele von achsensymmetrischen Figuren vorgelegt werden. Zum Beispiel kann die Symmetrieeigenschaft mit einem auf die vermutete Symmetrieachse senkrecht zur Zeichenebene gehaltenen Taschenspiegel überprüft werden. Bei Achsensymmetrie einer ebenen Figur entspricht jedem Punkt der Figur außerhalb der Symmetrieachse ein „Partnerpunkt“. Dies kann präzisiert werden und sollte dann sowohl zur Konstruktion symmetrischer Figuren als auch zur Analyse mathematischer Problemstellungen verwendet werden. Eine sinnvolle und schöne Aufgabe besteht z.B. darin, eine mehr oder weniger komplexe technische Zeichnung (vgl. nebenstehende Abbildung) zu bemaßen und dabei vorhandene Symmetrien auszunutzen.



Symmetrische Phänomene gibt es auch außerhalb der Geometrie, z.B. bei der Bestimmung aller Teiler einer natürlichen Zahl, wo es zu jedem Teiler den dazu „symmetrischen“ (komplementären) Teiler gibt, wie:
Teiler von 12 sind: 1 und 12, 2 und 6 sowie 3 und 4.

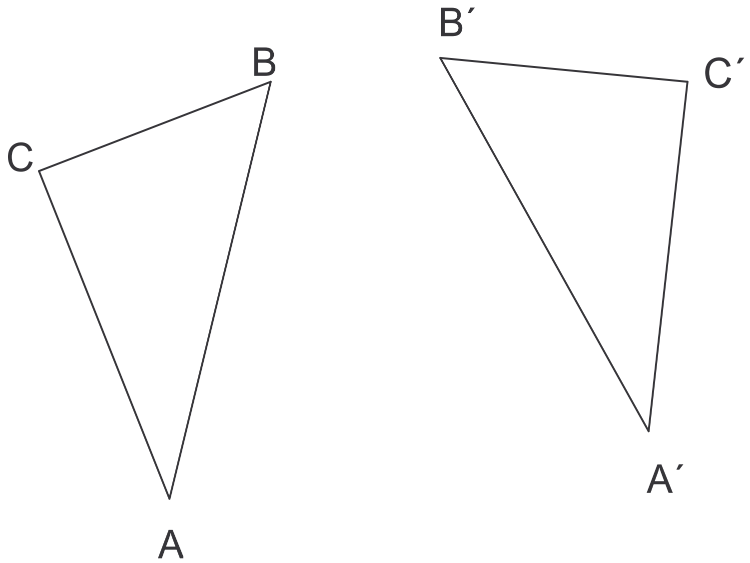
Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe lösen konnten, können in diesem Zusammenhang der Frage nachgehen, wie viele und welche „Testteiler“ man überprüfen muss, um festzustellen, ob eine natürliche Zahl eine Primzahl ist, z.B.: Für 41 sind nur die Teiler bis 7 zu prüfen, da $7 \cdot 7 = 49$.

Aufgabe 32

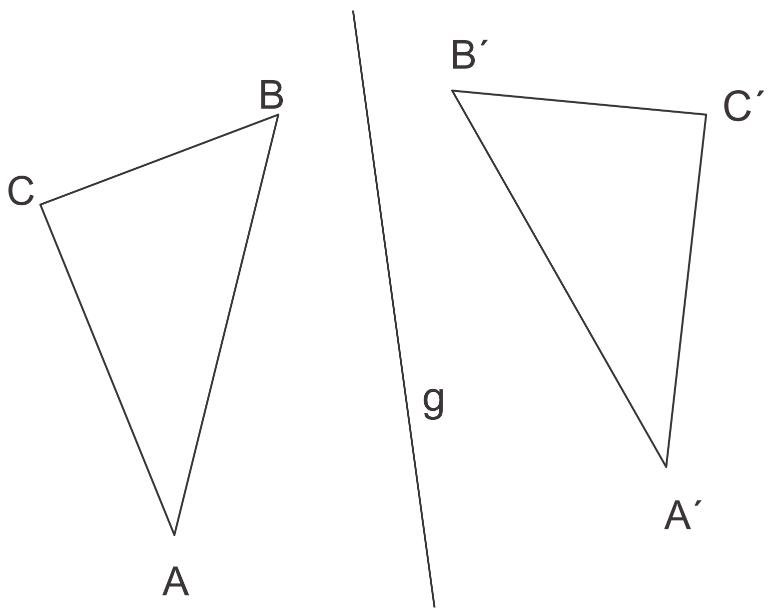
Spiegelachse

Das Dreieck A´B´C´ ist das Ergebnis einer Achsenspiegelung des Dreiecks ABC.

Zeichne die Spiegelachse g ein .



Lösung



Aufgabe 32

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Beim Betrachten der achsensymmetrischen Darstellung wird zunächst die (gedankliche) Zuordnung von Bildpunkten zu Originalpunkten in der Darstellung erwartet (K4). Unterschiedliche Strategien (K2, AB II) sind für das Bestimmen der Spiegelachse denkbar:

- Anwenden von Alltagswissen bzw. Grundvorstellungen, dass Bild und Original denselben Abstand zur Spiegelachse haben und sich genau gegenüberliegen. In diesem Fall ergibt sich die Lösung allein aus Halbieren der Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ (bzw. $\overline{CC'}$) und der Verbindung der Halbierungspunkte bzw. durch Interpretation "von genau gegenüber liegend" als "mittel - senkrecht sein" von Original-Bild-Strecke zur Spiegelachse (vgl. unten).
- Anwenden der geometrischen Eigenschaften der Spiegelung. Hier wäre nur einmal ein Originalpunkt mit dem dazugehörigen Bildpunkt durch eine Strecke zu verbinden (oder umgekehrt) und darauf die Mittelsenkrechte zu konstruieren.

Dazu sind mathematische Werkzeuge (Geodreieck, Zirkel und Lineal oder ggf. Geometrie-Software) zu nutzen (K5), deren Einsatz in diesen Situationen bereits geübt wurde.

Fehler entstehen, wenn
- eine geschätzte, augenscheinliche Symmetrieachse eingezeichnet
- ungenau gezeichnet
- mathematische Werkzeuge fehlerhaft genutzt
- die Halbierungs- oder Orthogonalitätsbedingung nicht beachtet

wurde(n).

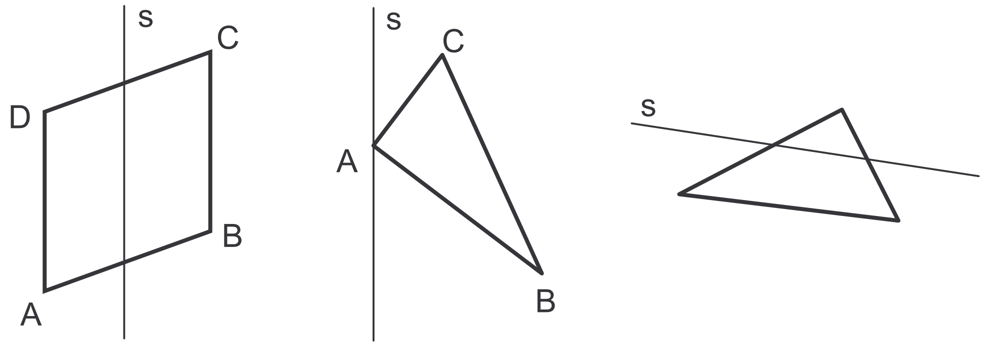
Zur **Diagnose** kann die Lehrkraft die Bearbeitung der Darstellung heranziehen. Weiteren Aufschluss kann eine Beschreibung der Vorgehensweise geben.

Anregungen für den Unterricht

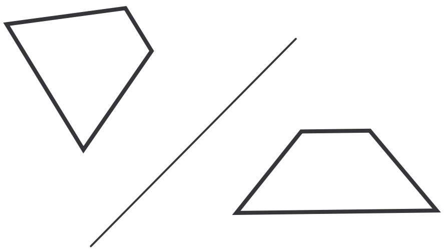
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollen zunächst ein Dreieck oder eine andere ebene Figuren an einer vorgegebenen Achse spiegeln. Dazu ist der Einsatz des Geodreiecks sinnvoll. Es ermöglicht das eigenständige Finden von Eigenschaften der Geradenspiegelung. Anschließend ist das Besprechen von Strategien zur Bearbeitung sinnvoll. Eventuell ist der Umgang mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeugen durch Üben vorher abzusichern.

Als weitere Aufgaben sind solche wie die folgenden zu empfehlen:

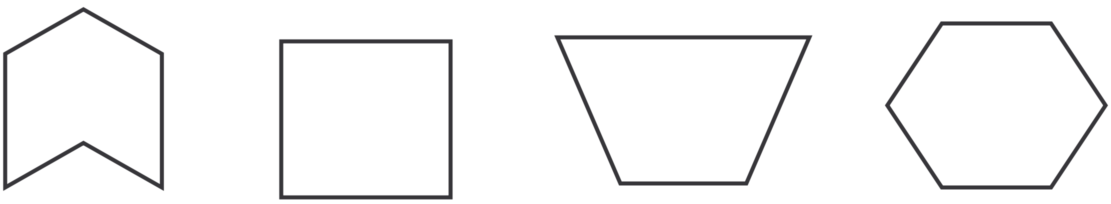
- Spiegle jede Figur an der Spiegelachse s.



- Ist die Gerade s Spiegelachse der gegebenen Figuren? Begründe deine Entscheidung.



- Folgende Figuren sind durch eine Achsenspiegelung entstanden. Zeichne alle möglichen Spiegelachsen in jede Figur ein.



Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, können sich im Aufschreiben von Handlungsanweisungen zum Finden einer Symmetrieachse bei ebenen Figuren üben. Dabei sollte bewusst werden, dass diese Vorgehensweise zugleich zur Überprüfung der Achsensymmetrie genutzt werden kann.

Aufgabe 33

Parallelogramme
Welche dieser Aussagen, die für alle Parallelogramme gelten sollen, ist **FALSCH**?

Kreuze an.

- ☐ Gegenüberliegende Seiten sind parallel.
- ☐ Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
- ☐ Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
- ☐ Es gibt genau eine Spiegelachse.
- ☐ Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

Lösung

Es gibt genau eine Spiegelachse.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler die in den Auswahlantworten verwendeten mathematischen Begriffe in die natürliche Sprache übersetzen (K5) und verstehen (K6). Sie analysieren daraufhin ein Parallelogramm gedanklich oder anhand einer Skizze (L3).

Bei der ersten und letzten Aussage wird die Anzahl der Fehlentscheidungen gering sein. Hier sind häufig verwendete und leicht vorstellbare Eigenschaften des Parallelogramms benannt. **Fehler** bei der Wahl der anderen Aussagen lassen sich erörtern, indem ein passendes Gegenbeispiel zur 4. Antwort gefunden oder bei der 2. und 3. Antwort die Gültigkeit begründet wird.

Um Sicherheit über mögliche Fehlerquellen zu erhalten – auch bei anderen Fehlentscheidungen der Schülerinnen und Schüler – sollten schriftliche oder mündliche Begründungen für eine **Diagnose** eingefordert werden.

Anregungen für den Unterricht

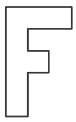
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst auf Skizzen oder Zeichnungen als wichtiges Hilfsmittel hingewiesen werden. Bei (exakten) Zeichnungen können die angegebenen Eigenschaften nachgemessen und so im Rahmen der Messgenauigkeit überprüft werden.
Die Diskussion zu allen Auswahlantworten ist nicht zu vernachlässigen. Dabei müssen auch die Spezialfälle (Rechteck, Quadrat, Raute) betrachtet werden. Diese Sonderfälle haben mehrere Spiegelachsen, das allgemeine Parallelogramm keine. Im Unterricht kann auch dynamische Geometriesoftware eingesetzt werden, um Parallelogramme zu variieren und die gegebenen Aussagen an Beispielen zu prüfen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können eine Umkehraufgabe dazu lösen, nämlich zu jeweils einer gegebenen Eigenschaft ein Viereck anzugeben, welches diese Eigenschaft erfüllt, und eines, welches diese nicht erfüllt. Anspruchsvoller ist es, wenn mehrere Eigenschaften vorgegeben werden, zu denen passende Vierecke gefunden werden sollen. Hier können auch evtl. sich ausschließende Vorgaben gemacht werden. Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware ist möglich.

Aufgabe 34

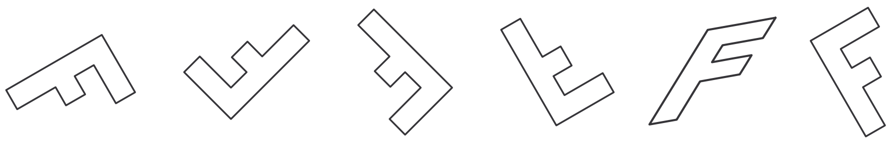
Kongruente Figuren

Gegeben ist eine Figur .



Welche der unten stehenden Figuren ist nicht kongruent (deckungsgleich) zu der oben gegebenen Figur ?

Kreuze an.



☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Lösung

Nur die fünfte Figur wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erkennen einfache zueinander deckungsgleiche (kongruente) Figuren in der gegebenen Darstellung (L3, K4). Die Aufgabenstellung ist aus dem Unterricht vertraut (AB I).

Ein häufig zu erwartender **Fehler** könnte das Überlesen von „nicht" in der Aufgabenstellung sein. In der vierten Figur wurde der gegebene Buchstabe F gespiegelt. Auch hier werden häufig Fehlantworten auftreten. Da die falsche Darstellung als einzige verzerrte Figur aus dem Rahmen fällt, kann die Aufgabe auch richtig bearbeitet sein, ohne dass Kenntnis über Deckungsgleichheit (Kongruenz) vorliegt. In diesem Fall wurde aus dem Verständnis von Deckungsgleichheit im Alltag entschieden. Um eine **Diagnose** zu ermöglichen, ist eine schriftliche oder mündliche Kommentierung erforderlich.

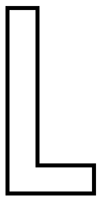
Anregungen für den Unterricht

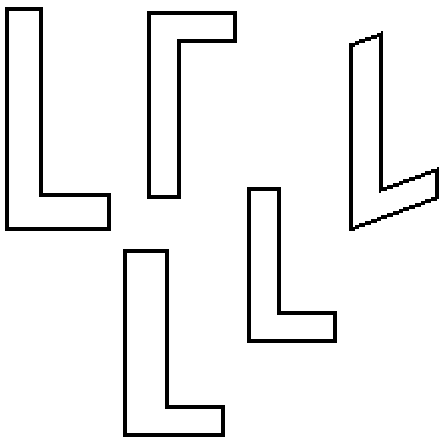
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben, können sich die Deckungsgleichheit veranschaulichen, indem sie die gegebene geometrische Figur ausschneiden und versuchen, diese mit den gegebenen Auswahlantworten zur Deckung zu bringen. Sie sollten auch angehalten werden, zu überlegen, mit welcher Bewegung die gegebene Figur in jede der angebotenen (bis auf die verzerrte) Darstellung überführt werden kann.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können die zu Grunde liegenden Bewegungen (Kongruenzabbildungen) angeben, mit denen man vom Urbild zu einem der deckungsgleichen Bilder kommt (evtl. auch Angabe von Drehzentrum und -winkel und Spiegelachsen).

Als weitere Aufgabe kann die folgende angeboten werden, die zusätzlich die Relation „ähnlich zu“ berücksichtigt:

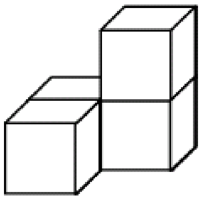
Gegeben ist die nebenstehende Figur.
Welches der unten stehenden Bilder ist
zu dieser deckungsgleich (kongruent)?





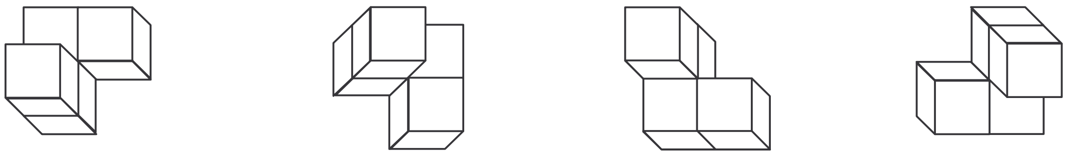
Aufgabe 35

Würfel drehen
Dieser Körper wird in eine andere Lage gedreht.



Welches der folgenden Bilder zeigt den gedrehten Körper ?

Kreuze an.



☐ ☐ ☐ ☐

Lösung

Nur das dritte Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Bearbeitung der Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler räumliche Vorstellungen des gegebenen Körpers (L3) aktivieren. Wenn dies nicht rein intuitiv geschieht, ist es entscheidend, eine geeignete Herangehensweise zu entwickeln und zu verwenden (K2), damit die in der Vorstellung gedrehten Varianten des Ausgangskörpers mit den Körpern in den Auswahlantworten verglichen werden können. Denkbar ist zum Beispiel, nach einer geeigneten Bewegung zu suchen und diese gedanklich auszuführen, damit der gegebene Körper in einen, der als Antwort dargestellt ist, überführt werden kann (K4). Dabei ist die Lage der kleinen Würfel zueinander bedeutsam. Die Bearbeitung ist mehrschrittig (AB II).

Aufgabe 35

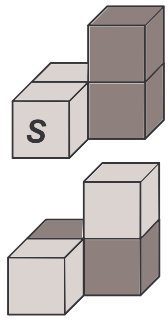
Die Ursachen für **Fehler**, lassen sich aus den angebotenen Antworten vermuten: Beispielsweise wurde bei der ersten Auswahlantwort nicht beachtet, dass bei Drehung des Körpers der "Turm" an einer anderen Stelle des Zweierblocks steht. Eine detaillierte Diagnose ist im folgenden Unterricht möglich, wenn Schülerinnen und Schüler versuchen, ihre Antworten zu begründen.

Anregungen für den Unterricht

Um die hier geforderte Kompetenz auszubilden, ist der Umgang mit konkreten Körpern der abgebildeten oder ähnlicher Art (z.B. dem Soma-Würfel) sinnvoll. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler Vermutungen über die Lage eines Körpers nach einer bestimmten Bewegung äußern bzw. zu vorgegebenem Original und Bild eines Körpers Vermutungen über die entsprechende Bewegung äußern und dies jeweils durch gegenständliches Handel überprüfen. So erleben sie, ob ihre Vorstellung richtig ist. Das könnte insbesondere denjenigen **Schülerinnen und Schülern** helfen**, die die Aufgabe nicht lösen konnten**. Geeignet sind auch Computeranimationen bzw. entsprechende Spiele.

Für **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe gelöst haben,** ist es sinnvoll, einen systematischen Zugang zur Lösung dieses und verwandter Probleme zu gewinnen. Ein möglicher Weg besteht darin, sich eine bestimmte Teilfigur des Ausgangskörpers (gedanklich) „herzunehmen“, z.B. einen Quader aus zwei Würfeln.

Man „sieht“ dann entweder
- zwei solche Quader, die „aneinander geklebt“ sind und in ihren Längsrichtungen senkrecht zueinander stehen, oder
- einen solchen Quader in der Mitte mit vorne und hinten je einer angeklebten „Nase“ (Würfel), die „in Richtungen zeigen“ die senkrecht zueinander sind.



Beispielhaft wird hier die erste Sichtweise eingenommen:
Man versucht, einen der beiden Quader in eine Standardlage (z.B. die in der gegebenen Aufgabe dargestellte) zu bringen. Dazu betrachtet man seine einzige „freie“ Stirnseite ***S*** (Quadrat), legt diese nach vorn und dreht sie - und damit die ganze Figur - so, dass der angeklebte Quader rechts (hinten) liegt. Dann ragt er bei der Ausgangsfigur und ebenso bei dem dritten Distraktor jeweils nach oben heraus, bei den drei anderen – somit „falschen“ - Distraktoren ragt er demgegenüber nach unten heraus.
Streng genommen muss man sich noch überzeugen, dass dieses Verfahren unabhängig davon ist, welchen der beiden Quader man sich ausgesucht hat. Man wird dabei erkennen, dass alle abgebildeten Körper eine Symmetrie haben, die realisiert wird, wenn man die beiden freien Quadrate ineinander überführt.

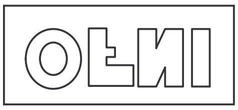
So ist auch zu erkennen, dass der hier betrachtete Körpertyp genau zwei Varianten zulässt. Die drei „falschen“ Distraktoren realisieren deshalb - wie auch das beschriebene Verfahren zeigt – gegenüber dem Ausgangskörper die gleiche andere Variante.
Hinter dieser Lösungsstrategie steckt eine allgemeine Idee, um verschiedene (mathematische) Objekte zu vergleichen: Man definiert eine „Standardlage“, damit Objekte in verschiedener Lage vergleichbar werden.
Die hier beschriebene Begründung ist nur beispielhaft für eine von sehr vielen möglichen.
Ein lebendiger Unterricht kann entstehen, wenn Schülerinnen und Schüler versuchen, ihre Auswahl auf andere Weise zu begründen. Dann wird auch die allgemeine Kommunikationskompetenz (K6) in starkem Maße geübt.

Aufgabe 36

Spiegelschrift

Du hältst dieses Schild so vor dich, dass jeder es lesen kann und stehst vor einem Spiegel. Was siehst du?
Kreuze an.

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Lösung

Nur das 5. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Aufgabe 36

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der vorliegenden Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler Eigenschaften dargestellter geometrischer Objekte bezüglich einer Spiegelung (Spiegelbild) erkennen und anwenden (L3). Sie müssen über gute Raumvorstellungen verfügen, da die dargestellte Situation nicht der den Schülerinnen und Schülern bekannten Darstellung in der Ebene entspricht (K3, K4). Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich aus der Mehrschrittigkeit bei der Lösungsfindung.
Neben der oben genannten Möglichkeit kann ohne Kenntnisse der Eigenschaften der Spiegelung eine Lösung gefunden werden, indem das Blatt gegen das Licht gehalten wird.
Auch ein Ausschlussverfahren ist möglich. Ein lesbares Schild steht nicht auf dem Kopf (sichtbar beim Buchstaben F) und die einzelnen Buchstaben ändern auf dem Schild selbst nicht ihre Ausrichtung (das F öffnet sich zum „O“ und nicht zum „N“). In diesem Fall käme die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ auch zum Tragen.
Denkbar ist ebenfalls, dass Schülerinnen und Schüler ihr Alltagswissen einsetzen, etwa wenn sie sich an die spiegelbildliche Aufschrift an Rettungswagen oder Feuerwehr erinnern.

Zu erwartende **Fehler** können u.a. entstehen durch

- Nichtberücksichtigung eines Teilschrittes (v.a. „dass jeder es lesen kann“), da die Schülerinnen und Schüler das Schild selbst ja nicht mehr lesen können.
- Vorgabe der Lösungsobjekte in der Ebene, weil dort ein gedankliches Operieren erfolgen kann, bei dem die Längskante des Schildes bzw. eine Parallele dazu als Spiegelachse dient (Ankreuzen des ersten Kästchens).

Die Bearbeitungsstrategie und eventuelle fehlerhafte oder defizitäre Vorstellungen werden deutlich, wenn die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen erklären (**Diagnose**).

Anregungen für den Unterricht

Die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens geschieht durch den Umgang mit konkreten Figuren oder Körpern. Vor allem das genaue Beschreiben einfach strukturierter Figuren (z.B. nur der Buchstabe F oder die Kombination FO) vor und nach einer Änderung der Blickrichtung (Spiegelung) hilft Schülerinnen und Schülern, sich zunehmend gezielt auch gedanklich im Raum zu bewegen. Diesem Ziel dienen ebenfalls entsprechende Computerspiele.

Mit **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte die Lehrkraft im Unterrichtsgespräch zunächst klären, inwieweit die Aufgabe verstanden wurde (u.a. wie das Schild zu halten ist). Dienlich erscheint gegebenenfalls das Nachstellen der Aufgabe in der realen Situation.

Können die betreffenden Schülerinnen und Schüler die Aufgabe dennoch nicht bearbeiten, sollte ihre Raumvorstellung durch vielfältige zum Handeln anregende Unterrichtssituationen geschult werden. Weitergeführt wird dieser Lernvorgang durch zeichnerische Darstellungen, indem Figuren und Körper in der Ebene „bewegt“ werden und dies zu beschreiben ist, ggf. mit Anregungen, wie:
In welche Richtung wird gedreht?
Wo befindet sich die Spiegelachse?

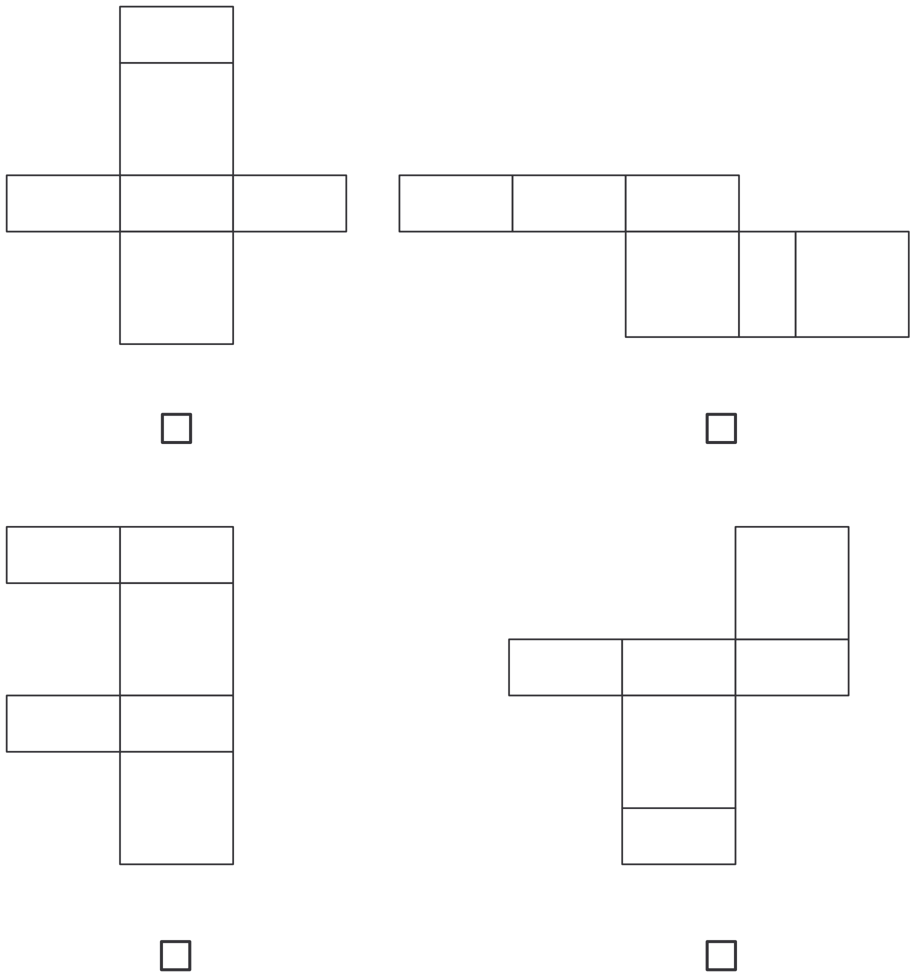
Für Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, kann der Auftrag gestellt werden, in Spiegelschrift zu schreiben oder zu zeichnen, so dass es im Spiegel richtig erscheint. Daneben regen Fragestellung der Art „Was siehst du bei zwei entsprechend gestellten Spiegeln?“ zu weiteren Vorstellungen und vertieftem Nachdenken an.

Aufgabe 37

Quadernetze

Welches der vier Netze ergibt beim Zusammenfalten **keinen** Quader?

Kreuze an.



Lösung

Es wurde nur das 3. Kästchen angekreuzt (links unten).

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler untersuchen die vier dargestellten Körpernetze, um festzustellen, welches davon kein Quadernetz ist (K4). Dazu müssen sie mit den unterschiedlich angeordneten Flächen gedanklich operieren (L3) und von der ebenen zur räumlichen Darstellung des Körpers wechseln (AB II). Der Quader wird dabei nicht so häufig im Unterricht verwendet, wie etwa der Würfel und verlangt wegen der unterschiedlichen Rechteckflächen höhere Aufmerksamkeit.

Auftretende **Fehler** entstehen, wenn das gedankliche Falten des Quaders unsystematisch verläuft oder weil der Begriff „Körpernetz" völlig unbekannt ist.

Eine **Diagnose** ist ohne Nachfrage nicht möglich. Deshalb sollte die Lehrkraft in jedem Fall nach dem Vorgehen bzw. der verwendeten Strategie fragen.

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht sollte sowohl durch tatsächliches Abwickeln verschiedener Körper wie auch durch das Zusammenbauen aus „Schnittmusterbögen" der Wechsel zwischen Körper und Körpernetz begreifbar gemacht werden.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, obwohl sie den Begriff „Körpernetz" kennen, benötigen Strategien für ihr Handeln, wie:

- Beschriften der einzelnen Flächen des Netzes mit „unten", „vorn", „oben", „hinten", „links" und „rechts" zur Zuordnung für die Flächen des Quaders.
- Körpernetze von vorgegebenen Quadern mit farbig markierten Seiten zeichnen.
- Gedankliches Zusammenfalten, indem die Fläche markiert wird, die Standfläche des Körpers sein soll.

Die Ergebnisse des gedanklichen Operierens mit den gegebenen Körpernetzen sollten durch Ausschneiden und Falten überprüft werden.

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, sollten

- ihre Lösungsstrategie vortragen oder in Partnerarbeit erklären,
- Netze von Körpern selbst entwerfen (z.B. Pyramide mit regelmäßigem Sechseck als Grundfläche, Pyramidenstumpf, dreiseitiges Prisma),

ggf. auch eine ähnliche Aufgabe wie die gegebene formulieren.

Aufgabe 38

Gleichschenklige Dreiecke
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
Kreuze an.

Jedes gleichschenklige Dreieck ...	wahr	falsch
besitzt drei gleich lange Seiten .	☐	☐
besitzt mindestens eine Symmetrieachse.	☐	☐
hat immer einen rechten Winkel .	☐	☐
hat mindestens zwei gleich große Winkel.	☐	☐

Lösung

falsch
wahr
falsch
wahr

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der vorliegenden Aufgabenstellung sind Aussagen zu Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke in einer Tabelle gegeben, die die Schülerinnen und Schüler erfassen (L3, K6), hinsichtlich ihrer Richtigkeit überprüfen und als „wahr“ oder „falsch“ einordnen müssen (K5). Dabei ist die Allgemeingültigkeit („Jedes gleichschenklige Dreieck …“) zu beachten. Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Voraussetzung für die erfolgreiche Lösung der Aufgabe ist, dass die Schülerinnen und Schüler über das nötige Fachwissen hinsichtlich der im Text vorkommenden Begriffe und eine ausreichende formenkundliche Vorstellungskraft verfügen.

Ein zu erwartender **Fehler** ist, dass die Schülerinnen und Schüler eine Aussage nur oberflächlich erfassen und für die Richtigkeit der Aussage entscheidende Wörter (z.B. „Jedes“, „mindestens“, „immer“, …) nicht berücksichtigen.

Zur gezielten **Diagnose** empfiehlt es sich, die Überlegungen verbalisieren zu lassen.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben,** bietet es sich an, neben der Wiederholung der in der Aufgabe vorkommenden Fachbegriffe das Vorgehen bei der Beurteilung von (All-)Aussagen zu thematisieren. Hierzu eignet sich die Betrachtung einfacher Alltagsbeispiele:

- „Jedes Jahr hat 12 Monate.“
- „Jedes Jahr hat mindestens 365 Tage.“
- „Jedes Jahr hat immer den 1. Januar als Jahresbeginn.“
- „Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr.“
- …

Zur anschaulichen Untersuchung der in der vorliegenden Aufgabe beschriebenen Eigenschaften und zur Demonstration der Vielfalt gleichschenkliger Dreiecke ist neben dem Zeichnen der Einsatz eines dynamischen Geometrieprogramms geeignet.

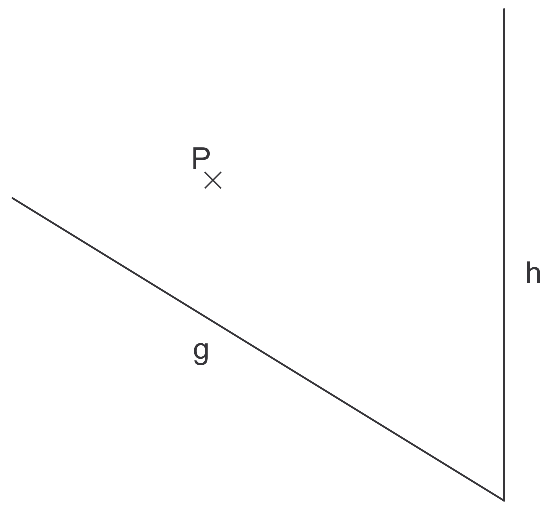
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, könnten selbst ähnliche Aufgaben, z.B. zu gleichseitigen Dreiecken oder speziellen Vierecken, entwerfen.

Es empfiehlt sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 40 „Dreieck“.

Aufgabe 39

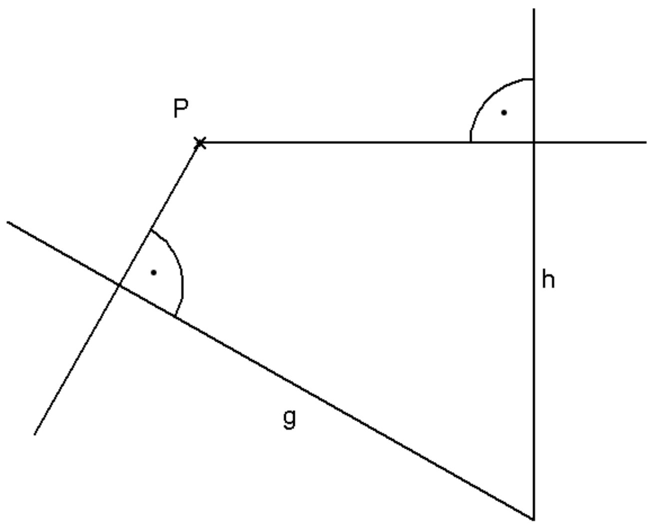
Punkte und Abstände

Gegeben sind zwei Halbgeraden g und h und ein Punkt P .



Zeichne eine Senkrechte durch den Punkt P auf die Halbgerade g und eine Senkrechte durch den Punkt P auf die Halbgerade h.

Lösung



Abweichungen von 1° bezüglich der Winkel werden akzeptiert.
Anmerkung: Hier ist keine Konstruktion erforderlich! Zeichnung mit Hilfe von Geodreieck, Lineal, etc. ist erlaubt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

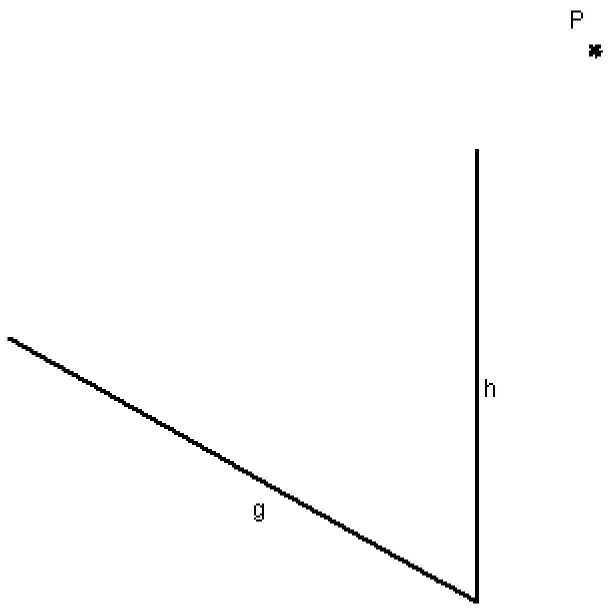
Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler zwei Senkrechten durch ein und denselben Punkt auf jede der zwei Halbgeraden zeichnen (L3, K4) und dabei mathematische Hilfsmittel wie das Geodreieck sachgerecht anwenden (K5). Da diese Aufgabenstellung zu den Routinehandlungen in Jahrgangsstufe 8 gehört, wird der Anforderungsbereich AB I zugeordnet. Verschiedene Wege zur Lösung sind möglich. Das Anlegen des Geodreiecks auf der Halbgeraden und seine Verschiebung bis die Senkrechte durch den Punkt P geht, ist sicher die schnellste Variante für eine genaue Lösung. Ebenso denkbar ist, dass Schülerinnen und Schüler mit einem einfachen Lineal versuchen, eine Senkrechte zu zeichnen und mit etwas Glück auch hier zu einer noch akzeptablen Lösung kommen. Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal wird eher die Ausnahme bei der Lösungsfindung sein.

Zu erwartende **Fehler** können entstehen, wenn Schülerinnen und Schüler keine konkrete Vorstellung vom Begriff der Senkrechten haben (rechter Winkel) oder das Zeichnen bzw. Konstruieren der Senkrechten durch einen gegebenen Punkt nicht durchgeführt werden kann. Auch ungenaue Ausführungen sind oftmals Grund dafür, die Aufgabe als fehlerhaft zu werten.

Anregungen für den Unterricht

Bei **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten,** muss zuerst sichergestellt werden, dass begriffliche Vorstellungen einer Senkrechten vorhanden sind. Nach Übungen zum Erkennen zueinander senkrecht stehender Geraden mit Kennzeichnung des rechten Winkels, wäre ein weiterer Schritt das Zeichnen einer Senkrechten zu einer Gerade. Im Mittelpunkt steht hierbei das sichere Anlegen des Geodreiecks. Eine Thematisierung, dass Zeichnungen mit einem einfachen Lineal nur selten zu einer korrekten Lösung führen können, sollte in diesem Zusammenhang erfolgen. Das Verschieben des Geodreiecks, damit die Senkrechte durch einen bestimmten Punkt geht, dürfte nun keine Probleme mehr bereiten.
Eine vereinfachte Variante könnte sein, auf jeder Halbgerade einen Punkt vorzugeben und durch jeden dieser Punkte zu den Halbgeraden Senkrechten zu zeichnen. Parallel zu der inhaltlichen Erarbeitung sollte durchgehend Wert auf eine saubere Darstellung gelegt werden.

Bei **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, bietet sich an, die Aufgabe nicht als Zeichnung sondern als Konstruktion im Unterricht zu behandeln. Auch wenn dies über die Anforderungen der Aufgabe hinausgeht, bedeutet es doch eine weitere Möglichkeit zur Lösung zu kommen.
Durch Verändern der Lage des Punktes P lässt sich die Schwierigkeit der Aufgabe leicht variieren.



Aufgabe 39

Aufgabe 40

Dreieck
In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis doppelt so lang wie die Höhe.
Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

Lösung

45°, 45° und 90°

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Ausgehend von der beschriebenen Eigenschaft eines gleichschenkligen Dreiecks sollen die Schülerinnen und Schüler die Maße der zugehörigen Innenwinkel angeben (L3). Dazu müssen sie die formale Beschreibung gedanklich oder zeichnerisch umsetzen und die gesuchten Winkelmaße durch Messen (K5) oder logische Folgerungen (K2) ermitteln. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen geht jeweils über die Anwendung eines Routineverfahrens hinaus (AB II).
Um die Aufgabe erfolgreich lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler über das nötige Fachwissen hinsichtlich der im Text vorkommenden Begriffe verfügen. Ob sie dann bei ihren Überlegungen von der Basis oder der zur Basis gehörenden Höhe ausgehen, spielt für die Ermittlung der in der Aufgabenlösung angegebenen Winkelmaße keine Rolle. Ebenso kann die Betrachtung eines konkreten Beispiels (selbst gewählte Basislänge bzw. Höhe) erfolgen.

Ein möglicher **Fehler** wird sein, dass die Schülerinnen und Schüler nicht alle drei Winkelmaße, sondern nur das Maß eines oder zweier Winkel des Dreieckes angeben.
Die Aufgabenstellung hat in der vorliegenden Form mehrere Lösungen.
Eindeutig lösbar ist die folgende Aufgabenstellung:
„In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis doppelt so lang wie die zugehörige Höhe. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten,** sollten die im Text vorkommenden Begriffe „gleichschenklig“, „Basis“ und „Höhe“ wiederholt werden. Dazu empfiehlt sich die formenkundliche Klassifizierung verschiedener vorgegebener Dreiecke mit einhergehender Zuordnung der jeweiligen Fachbegriffe.
Im Anschluss daran bietet sich das Zeichnen von Dreiecken ausgehend von gegebenen Seitenlängen und/oder Winkelmaßen bzw. anderen beschriebenen Eigenschaften an.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe zeichnerisch und durch Messen der entsprechenden Winkelmaße **lösen konnten,** sollten versuchen, die gefundene Lösung durch logisches Argumentieren (K1) zu begründen. Darüber hinaus könnten die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Angabe der Aufgabenlösung („45°, 45°, 90°.“, „Das Maß der Basiswinkel beträgt 45°, der dritte Innenwinkel hat das Maß 90°.“, „Das Maß des dritten Innenwinkels ist doppelt so groß wie das Maß der Basiswinkel.“, …) thematisiert werden, ebenso wie eine weitere Lösungsmöglichkeit der Aufgabe (statt von der zur Basis gehörenden Höhe wird von einer der beiden – gleich langen – anderen Höhen ausgegangen: Die Winkelmaße der drei Innenwinkel betragen dann 30°, 30° und 120°.)

Bei der vorliegenden Aufgabe bietet sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 38 „Gleichschenklige Dreiecke“ an.