Material zur Weiterarbeit
zum
Lernstand im Fach Mathematik in der Klassenstufe 8

Adressaten sind die Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie Fachkonferenzen oder andere Lehrkräfte und innerschulische Gruppen. Sie sollen durch das Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, die vor allem in der individuellen Förderung liegen.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Umfang und Tiefe richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich am rechten Rand ersichtlich.
Eine Kommentierung zu einer Aufgabe schließt folgende Teile ein:

- Begründungen für die Zuordnung der Standardeigenschaften[1] zu einer Aufgabe (und damit Ausweisen von didaktischem Potential der Aufgabe),
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler (u.a. häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose),
- Anregungen für den Unterricht.

An verschiedenen Stellen werden Bezüge zur Veröffentlichung „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ des IQB hergestellt, da hierin eine große Anzahl von Aufgaben mit ausgewiesenen Standardbezügen und Unterrichtsanregungen vorgestellt werden.

Bezüge zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter kann von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben für ein Testheft nur die „hinführende“ Teilaufgabe ausgewählt werden und es muss auf mathematisch interessantere verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen, solche Teilaufgaben aufzugreifen und weitere Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung des Materials ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen Lehrkräfte u.a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann, damit über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden kann. Im vorliegenden Material wird daher für jede Aufgabe die Zuordnung der

[1] Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss, Beschluss der KMK vom 04.12.2003, S.7 – 15 bzw. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Beschluss der KMK vom 15.10.2004, S. 7 - 14.

Standardmerkmale (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen kann deutlich gemacht werden, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zur mathematischen Kompetenz bestimmt.

Überlegungen, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können , sind Teil jeder Kommentierung. Betrachtet werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und zu erwartende häufige Fehler sowie Möglichkeiten zur Diagnose. Dies soll die Lehrkräfte auch in ihrer Individualdiagnose unterstützen und helfen, Ansätze zur individuellen Förderung aufzudecken. Darauf aufbauend wird für jede Aufgabe vorgeschlagen, wie diese verändert oder variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Solche Anregungen beinhalten die Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, den Umgang mit verschiedenen Lösungen, eine Diskussion zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegeben Sachverhalts, den Einsatz von Aufgabenvariationen u.a.m. Dabei wird auch deutlich, wie sich Testaufgaben und Unterrichtsaufgaben bzw. Aufgaben in Lernstanderhebungen für die eigene Klasse unterscheiden können.

An der Weiterentwicklung des Materials wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. So wird angestrebt, im nächsten Jahr die Kommentierungen zu den einzelnen Aufgaben in Form einer Online-Datenbank anzubieten. Hinweise zum vorliegenden Material, beispielsweise zur gewählten Präsentationsform, und zu Ergänzungen können an (entw8@thillm.thueringen.de) gerichtet werden. Sie werden gern entgegengenommen.

Literatur:
/1/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006
/2/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss Beschluss der KMK vom 04.12.2003
/3/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss Beschluss der KMK vom 15.10.2004

Aufgabe 1

Rapido
Aus der Preistabelle des Paketdienstes „Rapido" kann man zu jedem Paketgewicht den zugehörigen Preis ablesen.

Bis 1 kg	3,50 €
Über 1 kg bis 2 kg	4,00 €
Über 2 kg bis 3 kg	4,50 €
Über 3 kg bis 5 kg	5,00 €
Über 5 kg bis 8 kg	5,50 €
Über 8 kg bis 10 kg	6,00 €

Beantworte mit Hilfe der Tabelle folgende Fragen:

1.1: Wie viel kostet ein Paket, das 9 kg wiegt?
Kreuze die richtige Lösung an.
- ☐ 5,50 €
- ☐ 6,00 €
- ☐ 9,00 €
- ☐ 13,50 €

1.2: Wie schwer darf ein Paket sein, für das man 5,00 € bezahlt?
Kreuze die richtige Lösung an.
- ☐ Genau 4 kg
- ☐ Höchstens 10 kg
- ☐ Über 3 kg bis 5 kg
- ☐ Über 5 kg bis 8 kg

Lösung

1.1: 6,00 €
1.2: Über 3 kg bis 5 kg

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen aus der Tabelle den Zusammenhang zwischen dem Paketgewicht und dem zugehörigen Preis erkennen (L4), und zwar vom Paketgewicht auf den Preis und umgekehrt vom Preis auf mögliche Paketgewichte schließen. Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch richtiges Ablesen des Preises für das Paketgewicht von 9 kg in der Tabelle für Aufgabenteil 1 bzw. durch richtiges Ablesen möglicher Gewichte bei vorgegebenem Preis von 5,00 € für Aufgabenteil 2 (K4, AB I).

Zur **Diagnose** von Zuordnungsfehlern, sollte im Unterricht durch die betreffenden Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise beschrieben werden.

Anregungen für den Unterricht

Ähnliche Fragestellungen können zu verschiedenen funktionalen Zusammenhängen aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler gestellt werden (z.B. zu Eintrittspreisen, die nach Zeiten oder Kategorien gestaffelt sind).
Daran anknüpfend kann ein Wechsel der Darstellungsformen im Unterricht thematisiert werden, nämlich von den Tabellenwerten zur graphischen Darstellung bzw. umgekehrt, und der Nutzen für die Beantwortung der betreffenden Fragestellung diskutiert werden.

In einem Parkhaus ist folgende Preistafel zu sehen:

I. Maria fährt mit ihren Eltern um 11.00 Uhr in das Parkhaus. Sie verlassen es um 13.45 Uhr. Wie viel Parkgebühren müssen sie für diese Zeit bezahlen?
II. Wie lang könnten sie für 5 Euro ihr Auto in dem Parkhaus lassen?

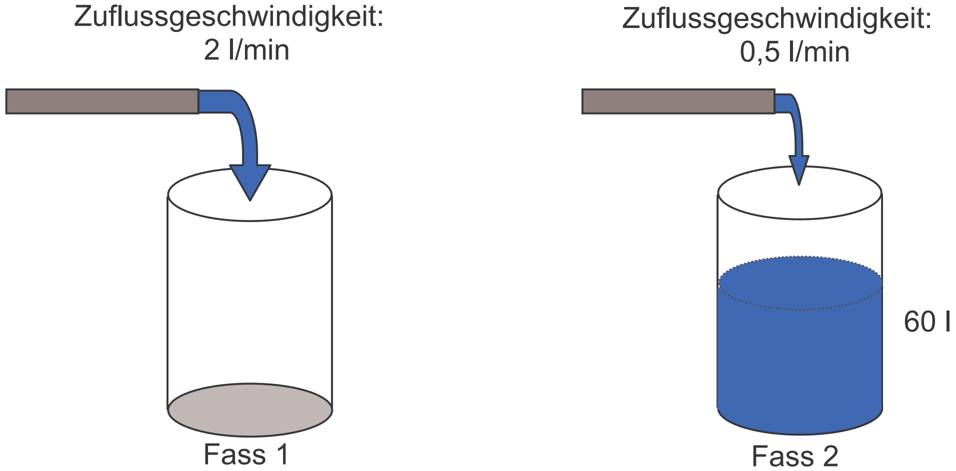
Parkgebühren	
Erste Stunde:	1,00 €
Jede weitere angefangene Stunde:	0,70 €

Bei Ableseproblemen können auch die Aufgaben 15 und 24 genutzt werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 2.1

Zwei Fässer



Jedes der beiden dargestellten Fässer fasst genau 100 l. Sie werden mit Wasser gefüllt. Zu Beginn des Füllvorgangs enthält Fass 2 bereits 60 l. Fass 1 wird mit 2 l/min gleichmäßig gefüllt, Fass 2 mit 0,5 l/min.

Stimmt es, dass Fass 2 zuerst überläuft? Schreibe auf, wie du zu deiner Entscheidung gekommen bist.

Aufgabe 2.1

Lösung

Richtige Antwort: Nein
und
Erklärung, z.B.:

Wertetabelle, z.B.:

Zeit (Minuten)	Fass I (Liter)	Fass II (Liter)
0	0	60
10	20	65
20	40	70
30	60	75
40	80	80
50	100	85

(Kleinere Rechenfehler sind in der Tabelle erlaubt – wichtig ist aber, dass grundsätzlich die eine Spalte jeweils um 20 und die andere um 5 zunimmt.)

Oder:
Berechnung des Zeitpunktes, an dem die Fässer überlaufen,
z.B. funktional:

Fass I: $2x = 100 \mid :2$
$x = 50$ => Fass I läuft nach 50 Min. über.

Fass II: $0{,}5x + 60 = 100 \mid -60 \mid :0{,}5$
$x = 80$ => Fass II läuft nach 80 Min. über.

Oder:
Graphische Lösung

Oder:
Sonstige richtige Antworten mit richtiger Begründung;
z.B.: Fass 2: 40l für 80min und Fass 1: 160l für 80min

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

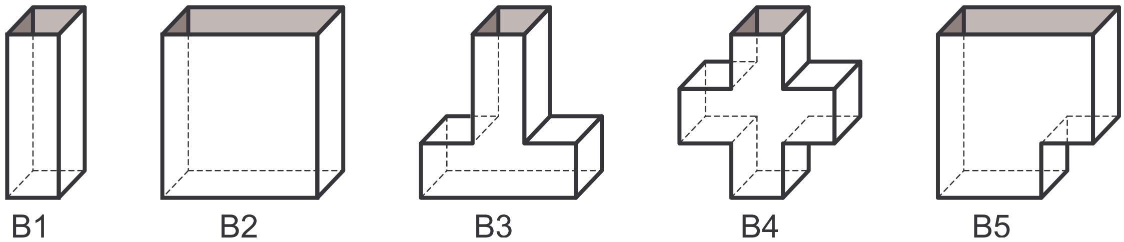
Die Aufgabe ist auf den funktionalen Zusammenhang zwischen Zeit und Füllstand bezogen (L4). Dieser soll auf Grund der Beschreibung und der Darstellung (K4) erfasst werden.
Die Schülerinnen und Schüler analysieren die Aufgabe, um aus den Angaben des Sachzusammenhanges eine Lösungsidee zu entwickeln (K2). Dabei stoßen Sie auf „Restmengen“ (100l und 60l), auf die sich die Füllvorgänge funktional (konkret: linear) beziehen (K3). Die größere Restmenge wird schneller gefüllt, so dass der gefragte Vergleich nur durch ein differenziertes Vorgehen beantwortet werden kann. Die obige Lösung zeigt mögliche Wege, die aus den verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten entstehen. Auf einen soll näher eingegangen werden, weil sowohl Rückwärts- als auch Vorwärtsarbeiten möglich ist. Die Bestimmung der Füllzeiten ist ein Umkehrproblem, was zusätzlich die Schwierigkeit der Aufgabe ausmacht, aber zumindest bei Fass1 auch intuitiv relativ leicht gelöst werden kann (100 Liter werden in 50 Minuten gefüllt). Statt Fass 2 entsprechend zu behandeln, kann auch vorwärts überprüft werden, ob es in 50 Minuten schon übergelaufen ist oder nicht. Man kann natürlich auch entsprechend mit dem Fass 2 beginnen, das in 80 Minuten überläuft und diesen Wert auf das Fass 1 beziehen.
Die auszuführenden Rechnungen bedingen K5.
Schließlich muss das gewählte Vorgehen noch dokumentiert werden (K6).

Man kann in der Aufgabe auch eine „Falle“ sehen, die zu einem kurzschlüssigen **Fehler** führt: Die „Restmenge“ im Fass 2 ist ja viel kleiner, also läuft das Fass 1 auch zuerst über.

Anregungen für den Unterricht

Füllprobleme sind ein sehr geeignetes Feld, um funktionales Denken zu entwickeln, zu schulen und zu festigen. Dabei kann man auch Querschnitte eines Gefäßes (z.B. einer geschwungenen Vase) und dessen Höhe variieren und die Füllhöhe (bei gleichmäßigem Zulauf) als Funktion der Zeit betrachten, wie:

Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.

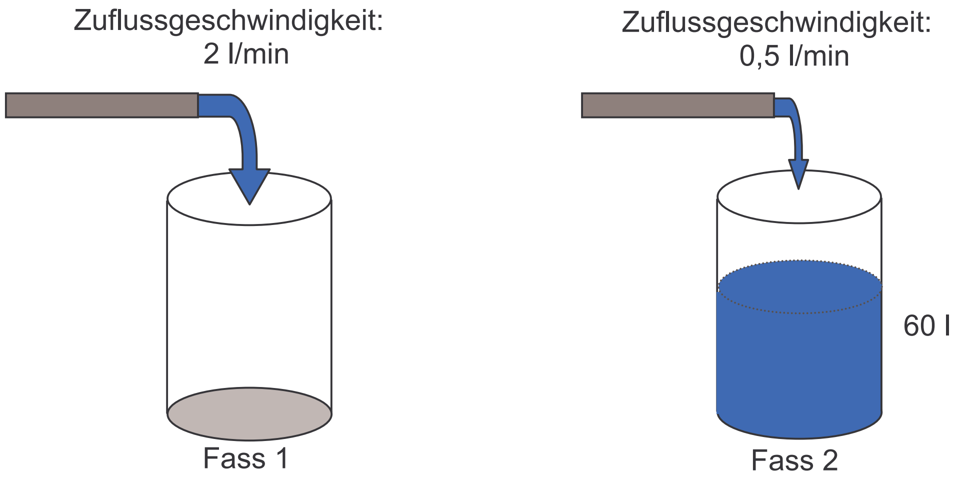


Gib die Höhe h des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Füllzeit t an. Qualitative Betrachtungen und Konstruktionen der Füllgraphen bieten sich hier an. (Vgl. auch /2/, S. 34 Aufgabe 14)

Ebenso können die Schülerinnen und Schüler zu vorgegebenen Graphen entsprechende Gefäßformen zeichnen.

Aufgabe 2.2

Zwei Fässer



Jedes der beiden dargestellten Fässer fasst genau 100 l. Sie werden mit Wasser gefüllt. Zu Beginn des Füllvorgangs enthält Fass 2 bereits 60 l. Fass 1 wird mit 2 l/min gleichmäßig gefüllt, Fass 2 mit 0,5 l/min.

Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem das Wasser in beiden Fässern gleich hoch steht? Schreib auf, wie du zu deiner Antwort kommst.

Lösung

Richtige Antwort: Ja
und
Erklärung, z.B.:

- Ablesen aus der (zu Aufgabe 2.1.) erstellten Wertetabelle
  z.B.: Nach 40 min steht das Wasser in beiden Fässern gleich hoch.

Oder:

- Funktionale Lösung, z. B. durch Aufstellen der Funktionsgleichungen für beide Fässer
  y - Füllmenge und x - Zeit:
  I $y = 2x$
  II $y = 0,5x + 60$
  Durch Gleichsetzen folgt:
  $2x = 0,5x + 60$
  $1,5x = 60$
  $x = 40$
  $y = 2 \cdot 40 = 80$
  Nach 40 Min. Gleichstand bei 80 Litern.

Oder:
- „Stetigkeitsargument“: Der Wasserstand in Fass 1 muss den Wasserstand in Fass 2 „überholen.“ Eine Angabe des Zeitpunktes ist ja nicht explizit verlangt.

Oder:
- Graphische Lösung

Oder:
- Sonstige richtige Antworten mit richtiger Begründung

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Frage, die hier beantwortet werden soll, bezieht sich auf den funktionalen Zusammenhang zwischen Zeit und Füllstand (L4). Die Schülerinnen und Schüler analysieren die Aufgabenstellung an Hand des Textes und der Abbildung (K2, K4), um die Angaben des Sachzusammenhanges mathematisch handhabbar zu machen. Dabei stoßen Sie auf „Füllstände“, die funktional von der Zeit abhängen. Sie können die gegebene Situation unterschiedlich modellieren (K3). (Vgl. die verschiedenen Lösungswege unter 2.1.)
In jedem Fall müssen die Schülerinnen und Schüler mit symbolischen, formalen bzw. technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5). Bei der Dokumentation des Lösungsweges wird ein komplexer mathematischer Sachverhalt dargestellt (K6, AB III).
Die unterschiedlichen Lösungswege aktivieren die angesprochenen Kompetenzen in unterschiedlicher Intensität.
Bei dieser Aufgabenstellung sind auch Trivialantworten möglich, wie:
„Ja, nach z.B. 100 Stunden.“

Anregungen für den Unterricht

Vergleiche die Kommentierung zu Aufgabe 2.1.

Das Entwickeln und Ausschärfen des Funktionsbegriffs und der verständnisvolle Umgang mit diesem ist bekanntlich eines der anspruchsvollsten und auch wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I. Alle drei genannten Darstellungsformen Tabelle, Funktionsterm und Funktionsgraph sollten im Unterricht immer wieder zur Anwendung kommen und in ihren gegenseitigen Beziehungen von den Schülerinnen und Schülern erfahren werden.

Erfahrungsgemäß ist die Verbindung von funktionalen Grundvorstellungen zu abstrakten Funktionstermen bzw. Funktionsgleichungen für viele Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten verbunden. Häufig wird die Abstraktion nicht vollzogen, die in der Verwendung der Argumentvariablen liegt. Hier sollte man auch immer wieder Verbalisierungen der Funktionsvorschrift den formalen Darstellungen gegenüberstellen.

Aufgabe 3

Nachbarschaftshilfe
Drei Schüler erledigen für einen kranken Nachbarn die Gartenarbeit. Fritz hat viel Zeit und fängt schon um 14 Uhr an zu arbeiten. Hans kommt um 15 Uhr und Max um 15:30 Uhr. Um 17 Uhr ist die Arbeit für alle drei erledigt. Der Nachbar gibt den Schülern 50,- € mit der Bitte, das Geld möglichst entsprechend der jeweils geleisteten Arbeitszeit zu verteilen.

Lösung

Fritz :	23,07 €
Hans:	15,38 €
Max:	11,54 €

Rundungsfehler nach unten erlaubt:
Toleranzbereich für die Summe der Arbeitslöhne: 49,4 – 50 €

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Lösen dieser Aufgabe ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen dem zu verteilenden Geldbetrag und der geleisteten Arbeitszeit erkennen (L4). Das setzt ein Sinn entnehmendes Erfassen des Textes (K6) sowie ein Erkennen und Nutzen von proportionalen Zuordnungen (K3) voraus. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II). Es sind Lösungsverfahren auszuführen (K5).

Viele **Fehler** ergeben sich möglicherweise bereits bei der Modellierung, insbesondere beim Beschreiben des proportionalen Zusammenhangs und der Zuordnung der Gesamtarbeitszeit zu 50 €.
Außerdem können Rechenfehler bzw. grobe Ungenauigkeiten in den Ergebnissen auftreten.

Zur weitergehenden **Diagnose** sollten Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg beschreiben.

Anregungen für den Unterricht

Für Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht gelöst haben, können folgende Unterstützungen hilfreich sein:

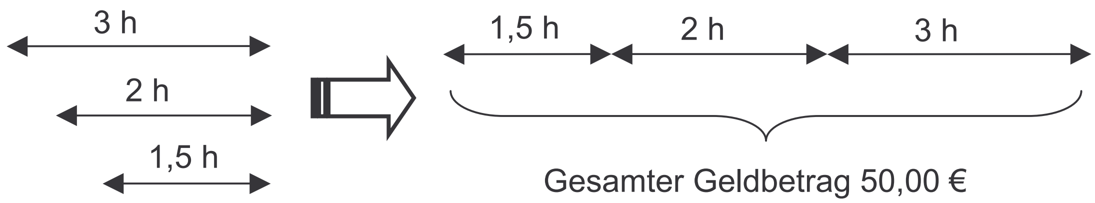
- Veränderung des Geldbetrages (z.B. 135 oder 65 anstatt 50), so dass ein offensichtlicherer Zugang entsprechend des proportionalen Zusammenhangs eröffnet wird.
- Darstellung der Aufgabe in Tabellenform

6,5 Stunden	50 €
3 Stunden	
2 Stunden	
1,5 Stunden	

- Bei Schülerinnen und Schülern, die sehr große Schwierigkeiten haben, bieten sich Zahlen an, die das Finden des Lösungsansatzes gegenüber der gegebenen Aufgabe vereinfachen.

5 Stunden	50 €
2,5 Stunden	
1 Stunde	

- Darstellung durch ein Schaubild



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, beschreiben selbst einen ähnlichen Sachverhalt, der dann von allen bearbeitet werden kann. Es bietet sich auch an, den gegebenen Sachverhalt komplexer zu gestalten, so dass die Modellierung anspruchsvoller wird. Das ist möglich, wenn unterschiedlich schwere Gartenarbeiten ausgeführt werden, wie Rasenmähen, Umgraben oder Gießen, und dies bei der Höhe der Bezahlung berücksichtigt werden soll.

Aufgabe 4.1

Verknüpfungen

Für zwei Zahlen x und y soll gelten $x + y = 1$.

Kreuze die richtige Aussage an.

- ☐ Wenn x negativ ist, dann ist auch y negativ.
- ☐ Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.
- ☐ Weder x noch y können negativ sein.
- ☐ Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y positiv.
- ☐ x und y müssen verschiedene Vorzeichen haben.

Aufgabe 4.1

Lösung

Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y positiv.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Aussagen und damit mathematikhaltige Texte verstehen (K6) und in Beziehung zu der gegebenen Gleichung setzen. Um die geforderte Zuordnung zu finden, können die Schülerinnen und Schüler verschiedene heuristische Strategien anwenden (K2).

In vielen Fällen wird es sich hierbei um das Untersuchen von Beispielen und / oder systematisches Probieren handeln (K5). In der konkreten Durchführung muss mit Termen bzw. Gleichungen gearbeitet werden. Aufgrund der mehrschrittigen Vorgehensweise ergibt sich eine Zuordnung zu AB II.

Insbesondere die Suche nach Beispielen, die zeigen, dass die jeweilige Aussage falsch ist, führt bei den Auswahlantworten zu folgenden Überlegungen:

A1: Wahl einer negativen Zahl a für x ergibt mit $y = 1 - a$ eine positive Zahl. Die Aussage ist also falsch.

A2: Wahl einer Zahl a mit $a > 1$ ergibt mit $y = 1 - a$ eine Zahl kleiner als Null, die Aussage ist also falsch.

A3: Wahl einer negativen Zahl a für x ergibt mit $y = 1 - a$ eine Lösung für a (vgl. A1). Die Aussage ist also falsch.

A4: Wahl einer Zahl a mit $a < 1$ ergibt mit $y = 1 - a$ eine positive Zahl. Auch die Wahl weiterer Zahlen a mit $a < 1$ ergibt mit $y = 1 - a$ eine positive Zahl. Die Aussage ist also möglicherweise richtig.

A5: Wahl einer ganzen Zahl a mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ für x ergibt mit $y = 1 - a$ eine Zahl mit einem von a verschiedenen Vorzeichen. Erst eine Wahl mit $0 < a < 1$ ergibt eine Zahl mit demselben Vorzeichen.

Diese Auflistung zeigt, dass ohne das Vorliegen von Aussagen der Schülerinnen und Schüler **keine Diagnose** der zugrunde liegenden **Fehler** möglich ist. Neben der falschen Interpretation der Aussagen liegen andere häufig auftretende Fehler sicher auch in Mängeln im Umformen der Gleichung oder in Fehlern in der Berechnung begründet. Auch grundsätzliche Fehlvorstellungen, wie:

A1: Verwechselung Summe-Produkt,

A2: Verwechselung Zahl-Betrag der Zahl,

A3: eine Summe ist nur positiv, wenn die Summanden positiv sind,

A5: Betrachtung ausschließlich von ganzen Zahlen

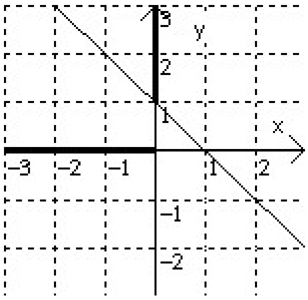
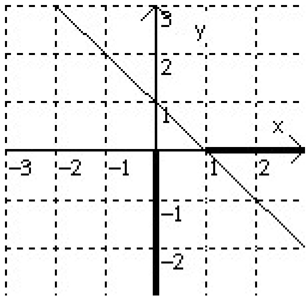
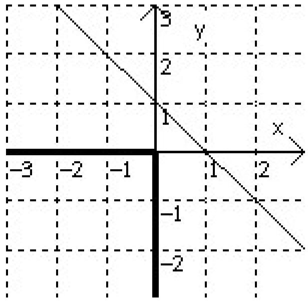
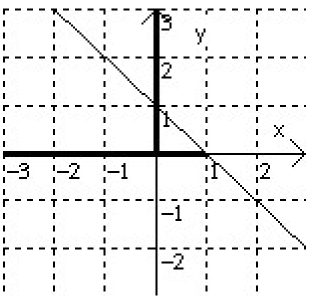
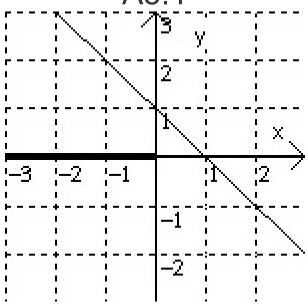
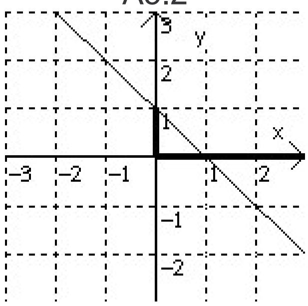
können zu falschen Antworten führen.

Anregungen für den Unterricht

Wenn auch einfache Variationen der Aufgabenstellung (geringfügige Änderungen der Gleichung, z.B. in $x + y = 2$, $x - y = 1$, $x + 2y = 1$ usw.; Hinzufügen einer weiteren Auswahl „Keine der anderen Aussagen ist zutreffend.“) weitere Informationen zur Kompetenzentwicklung liefern können, führen erst Aufträge wie „Begründe deine Entscheidung.“ zu Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die bei falschen Antworten, teils auch bei richtigen Antworten auf Defizite schließen lassen.

Neben möglichen Mängeln im Bereich des Umgangs mit Gleichungen und Termen bietet es sich im Kontext dieser Aufgabe an, Problemlösestrategien aufzuzeigen. Hier ist insbesondere der Übergang vom Untersuchen von Beispielen über das systematische Probieren hin zum allgemeinen Nachweis aufzuzeigen. Aber auch logische Verknüpfungen wie „weder x noch y", „x oder y", „x und y" können hier genauso wie beweislogische Aspekte thematisiert werden.
Dabei sollten sich die Betrachtungen gerade bei dem hier gegebenen Bezug zu funktionalen Zusammenhängen nicht auf die Untersuchung des Terms beschränken.

Insbesondere zur Beschreibung der Allgemeingültigkeit einer Aussage liefert die grafische Darstellung für viele **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, wichtige Hilfen. So liefert die ursprüngliche Aufgabe den durch $y = 1 - x$ gegebenen Zusammenhang. Die Auswahlantworten A1 bis A5 lassen sich wie folgt darstellen:

A1	A2	A3
		
Für $x < 0$ gibt es Funktionswerte mit $y > 0$.	Für $x > 1$ gibt es Funktionswerte mit $y < 1$.	Sowohl für $x < 0$ als auch für $y < 0$ gibt es entsprechende Werte.
A4	**A5.1**	**A5.2**
		
Für alle $x < 1$ ist $y > 0$.	Für negative x gibt es keine entsprechenden y-Werte.	Für $0 < x < 1$ ist auch $0 < y < 1$.

Aufgabe 4.2

Verknüpfungen

Für zwei Zahlen x und y soll gelten $x \cdot y = 1$.

Kreuze die richtige Aussage an.

☐ Wenn x negativ ist, dann ist y positiv.

☐ Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.

☐ Weder x noch y können negativ sein.

☐ Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ.

☐ x und y müssen dasselbe Vorzeichen haben.

Lösung

x und y müssen dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Aussagen und damit mathematikhaltige Texte verstehen (K6) und in Beziehung zu der gegebenen Gleichung setzen. Um die geforderte Zuordnung zu finden, können die Schülerinnen und Schüler verschiedene heuristische Strategien anwenden (K2). In vielen Fällen wird es sich hierbei um das Untersuchen von Beispielen und / oder systematisches Probieren handeln (K5).

In der konkreten Durchführung muss mit Termen bzw. Gleichungen gearbeitet werden, wie aus $x \cdot y = 1$ folgt $x = \frac{1}{y}$. Aufgrund der mehrschrittigen Vorgehensweise ergibt sich eine Zuordnung zu AB II.
Wie in der Kommentierung zu der ähnlichen Aufgabe 4.1 beschrieben, führt z.B. die Suche nach Beispielen, die zeigen, dass die jeweilige Aussage falsch ist, weiter und schließlich zur Lösung.

Häufig auftretende **Fehler** liegen in der falschen Interpretation der Aussagen und sicher auch in Mängeln im Umformen der Gleichung oder in Fehlern in der Berechnung begründet. Wird eine der ersten drei Auswahlantworten gewählt, so liegt vermutlich eine grobe Fehlvorstellung bezüglich der Multiplikation rationaler Zahlen vor. Wenn die Auswahlantwort 4 (Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ.) gewählt wird, so lässt dies in vielen Fällen darauf schließen, dass ausschließlich im Bereich der ganzen Zahlen nach (Gegen-)Beispielen gesucht wurde.

Auch hier ist häufig eine **weitere Diagnose** (siehe unten) notwendig.
(Vgl. auch Kommentar zu Aufgabe 4.3.)

Anregungen für den Unterricht

Ebenso wie bei Aufgabe 4.1 können einfache Variationen der Aufgabenstellung (geringfügige Änderungen der Gleichung, z.B. in $x \cdot y = -1$, $x \cdot 2y = 1$ usw., Hinzufügen einer weiteren Auswahl „Keine der anderen Aussagen ist zutreffend.“) weitere Informationen zur Kompetenzentwicklung liefern. Aber erst Aufträge wie „Begründe deine Entscheidung.“ führen zu Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die Schlüsse auf zugrunde liegende Defizite erlauben.

Liegen die Defizite im Bereich der Multiplikation rationaler Zahlen, insbesondere der negativen, so bieten sich konkrete Übungen hierzu an. Weist die weitere Diagnose auf Probleme im Bereich des Problemlösens oder des Kommunizierens hin, so sind die Anmerkungen zu Aufgabe 4.1 entsprechend zu übertragen. Dies gilt insbesondere für die Veranschaulichung durch die grafische Darstellung des sich ergebenden funktionalen Zusammenhangs.

Aufgabe 4.3

Verknüpfungen

Für zwei Zahlen x und y ($y \neq 0$) soll gelten $\frac{x}{y} = 1$.

Kreuze die richtige Aussage an .

- ☐ Wenn x negativ ist , dann ist y positiv .
- ☐ Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.
- ☐ Weder x noch y können negativ sein .
- ☐ Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ .
- ☐ x und y müssen verschiedene Vorzeichen haben .

Lösung

Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Aussagen und damit mathematikhaltige Texte verstehen (K6) und in Beziehung zu der gegebenen Gleichung setzen. Um die geforderte Zuordnung zu finden, können die Schülerinnen und Schüler verschiedene heuristische Strategien anwenden (K2). In vielen Fällen wird es sich hierbei um das Untersuchen von Beispielen und / oder systematisches Probieren handeln (K5).

In der konkreten Durchführung muss mit Termen bzw. Gleichungen gearbeitet werden, wie aus $\frac{x}{y} = 1$ mit ($x \neq 0$) folgt $x = y$.
Aufgrund der mehrschrittigen Vorgehensweise ergibt sich eine Zuordnung zu AB II.

Wie in der Kommentierung zu den ähnlichen Aufgaben (4.1 und 4.2) beschrieben, führt z.B. die Suche nach Beispielen, die zeigen, dass die jeweilige Aussage falsch ist, zu einer richtigen Lösung.

Neben der falschen Interpretation der Aussagen liegen andere häufig auftretende **Fehler** sicher auch in Mängeln im Umformen der Gleichung oder in Fehlern in der Berechnung begründet. Wird eine der Auswahlantworten 1, 3 oder 5 gewählt, so liegt vermutlich eine grobe Fehlvorstellung bezüglich der Division rationaler Zahlen vor. Liegt der **Fehler** jedoch in der Wahl der Auswahlantwort 4 (Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ.), so lässt dies in vielen Fällen darauf schließen, dass ausschließlich im Bereich der ganzen Zahlen nach Gegenbespielen bzw. Beispielen gesucht wurde.

Eine **Diagnosemöglichkeit** ergibt sich durch den Vergleich der Antworten zu den Aufgaben 4.1 bis 4.3. Dennoch wird häufig eine **weitere Diagnose** (siehe unten) notwendig sein.

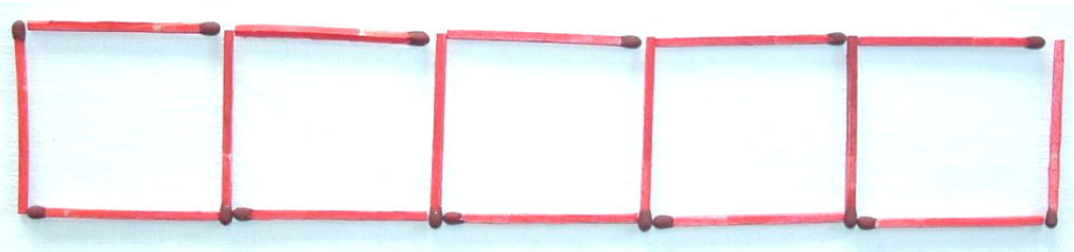
Anregungen für den Unterricht

Ebenso wie bei den Aufgaben 4.1 und 4.2 können einfache Variationen der Aufgabenstellung (geringfügige Änderungen der Gleichung, z.B. in $\frac{x}{y} = -1$, $\frac{x}{y} = 2$ usw., Hinzufügen einer weiteren Auswahl „Keine der anderen Aussagen ist zutreffend.“) weitere Informationen liefern.
Aber erst Aufträge wie „Begründe deine Entscheidung.“ führen zu Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die Schlüsse auf zugrunde liegende Defizite erlauben.

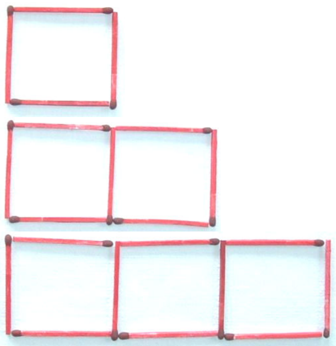
Liegen die Defizite im Bereich der Division rationaler Zahlen, so bieten sich konkrete Übungen hierzu an. Weist die weitere Diagnose auf Probleme im Bereich des Problemlösens oder des Kommunizierens hin, so sind die Anmerkungen zu Aufgabe 4.1 entsprechend zu übertragen. Dies gilt insbesondere für die Veranschaulichung durch die grafische Darstellung des sich ergebenden funktionalen Zusammenhangs.

Aufgabe 5.1

Streichholzkette
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



Schreib jeweils die Anzahl der benötigten Streichhölzer in die freien Kästchen.



Anzahl der Quadrate	Anzahl der Streichhölzer
1	4
2	7
3	
4	

Lösung

- bei 3 Quadraten: 10 Streichhölzer
- bei 4 Quadraten: 13 Streichhölzer

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In dieser Aufgabe soll erkannt werden, dass ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Quadrate in der Kette und der Anzahl der zum Legen notwendigen Streichhölzer besteht (L4). Die Schülerinnen und Schüler nutzen eine vertraute Darstellung zum Erfassen der wesentlichen Informationen (K4). Die Lösung kann durch einfaches Abzählen an der Zeichnung bzw. bei vier Quadraten durch gedankliches Ergänzen ermittelt werden (AB I).

Zu erwarten sind bei dieser Aufgabe entweder **Fehler** durch Flüchtigkeit (Verzählen) oder durch vorschnelles Schließen auf 4 Hölzchen je Quadrat.

Die letztgenannte **Diagnose** liegt nahe, wenn ausschließlich Vielfache von 4 als Anzahlen der Streichhölzer auftreten. Schülerinnen und Schüler sollten dann im Unterricht aufgefordert werden, ihre Gedankengänge zu verbalisieren.

Anregungen für den Unterricht

Das Erfassen von mathematischen Zusammenhängen muss vielfältig geübt werden. Es wird immer Schülerinnen und Schüler geben, die alle drei Ebenen des Erkenntnisprozesses durchlaufen müssen, um eine Erkenntnis verallgemeinert zu formulieren.
Als mögliche Variation dieser Aufgabe kann die geometrische Form verändert werden, z.B. Ketten mit Dreiecken oder Sechsecken.

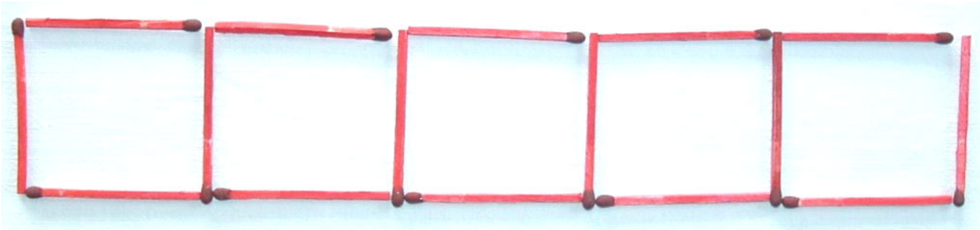
Zur Differenzierung für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht gelöst haben**, kann zunächst erfragt werden, wie viele Hölzchen jeweils hinzukommen. Dazu sollen Hölzchen bereitgestellt werden, um eine Kette selbstständig legen zu können. Analog zur Aufgabenstellung sollen Vermutungen auch für 5, 6, ...Quadrate geäußert und konkret handelnd überprüft werden.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben**, sind folgende Variationen möglich:

I. Vorgabe der Aufgabe als Wortvorschrift:
   “Baue aus 10 gleichen Hölzchen eine Kette aus drei Quadraten.
   Wie viele Hölzchen brauchst du für eine Kette aus vier (fünf, sechs, ...) Quadraten?“
II. Vorgabe einer Kette mit einer bestimmten Anzahl von Hölzchen:
   “Stelle dir eine Kette mit Quadraten aus 13 Hölzern vor. Wie viele Quadrate gehören zur Kette?“
III. Öffnen der Aufgabe:
   Erfinde neue „wachsende Streichholzmuster“ (eventuell in Partnerarbeit) und ordne jedem weiteren Schritt die Anzahl der Streichhölzer zu, die zum Anhängen der nächsten Figur benötigt wird.

Aufgabe 5.2

Streichholzkette
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



Wie viele Streichhölzer werden für 12 solche Quadrate benötigt?
Kreuze die richtige Antwort an.

- ☐ 23
- ☐ 24
- ☐ 36
- ☐ 37
- ☐ 48

Lösung

37

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In der Aufgabe muss der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Quadrate in der Kette und der Anzahl der zum Legen notwendigen Streichhölzer erkannt und genutzt werden (K5, L4). Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Darstellung Informationen zur Aufgabenstellung (K4). Die Lösung kann nicht durch einfaches Abzählen ermittelt werden; das Anwenden des erkannten Zusammenhangs ist notwendig (K2, AB II).

Bei dieser Aufgabe werden **Fehler** durch vorschnelles Schließen auf 4 Hölzchen für jedes hinzukommende Quadrat auftreten.

Diese Fehlvorstellungen sind durch die Lösungen 36 bzw. 48 zu identifizieren (**Diagnose**). Schülerinnen und Schüler sollten im Unterricht aufgefordert werden, ihre Überlegungen darzulegen. Systematisches Skizzieren kann helfen, den zentralen Lösungsgedanken zu finden.

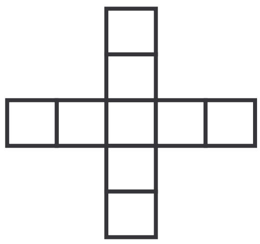
Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe nicht lösen konnten, sollten entsprechend angeregt werden, Zusammenhänge beim Bau der Kette selbst zu erkennen:

- Wie viele Hölzchen sind nötig, um immer wieder das nächste Quadrat anzulegen, wenn das erste bereits gelegt ist? Oder:
  Vervollständige. „Wenn das erste Quadrat mit _ Hölzchen gelegt ist, benötigt man noch _ Hölzchen für das nächste Quadrat, für das nächste wieder _ Hölzchen usw.“
- Vervollständige. „Wenn 12 Quadrate in einer Kette sein sollen, legt man zuerst das erste Quadrat mit Hilfe von _ Hölzchen. Dann wird noch 11 Mal ein Quadrat mit Hilfe von _ Hölzchen ergänzt. Zusammen sind es dann 4 + 11 x _ Hölzchen.“
- Vervollständige. „Eine Kette von 5 Quadraten (siehe Abb.) hat an den beiden langen Seiten je __ Holzstäbchen. Zwischen den beiden langen Seiten sind 1 + _ Holzstäbchen. Insgesamt sind es dann 5 + 5 + _ = __ Holzstäbchen.“
  Bilde die Sätze für 12 Quadrate.

Unterstützend kann die Streichholzkette systematisch bis zu den 12 Quadraten weiter gebaut oder gezeichnet werden. Die Anzahl der notwendigen Hölzer sollte solange in einer Tabelle protokolliert werden, bis die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang entdeckt haben.

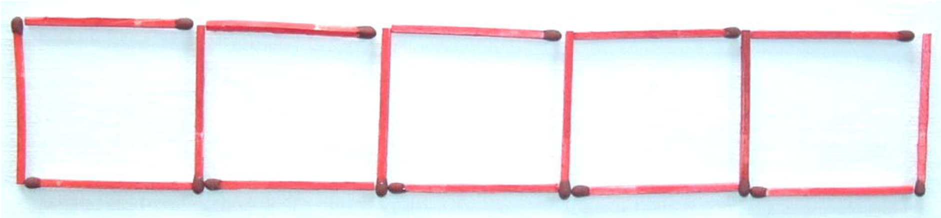
Schülerinnen und Schüler, die gegebene Aufgabe gelöst haben, können Umkehraufgaben zur gegebenen Aufgabe (ähnlich Aufgabe 5.1) gestellt werden. Es kann die Erweiterung auf komplexere Figuren erfolgen, wie:
Setze die Figur an allen vier Seiten des Ausgangsquadrates mit je einem Quadrat fort.
Wie viele Streichhölzer werden für jeweils eine solche Fortsetzung benötigt?
Gib die Anzahl der Streichhölzer in der gesamten Figur nach vier solchen Fortsetzungen an.



Dosenmauern oder sogar Dosenpyramiden bieten weitere Möglichkeiten für das Untersuchen und Erkennen derartiger Zusammenhänge.

Aufgabe 5.3

Streichholzkette
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



Gib eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl k der Quadrate und der Anzahl s der benötigten Streichhölzer allgemein beschreibt.

s = ______________________________

Lösung

$s = 3k + 1$

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler sollen bei der gegebenen Aufgabe den Zusammenhang zwischen der Anzahl k der Quadrate in der Kette und der Anzahl s der Hölzchen mit Hilfe einer Gleichung beschreiben (K2). Das kann mittels einer Tabelle oder an Hand der Abbildung (K4) vorbereitet werden. Erwartet wird die Erkenntnis, dass zum ersten Quadrat 4 und zu jedem weiteren Quadrat nur noch 3 Hölzchen erforderlich sind (also $4 + 3 \cdot (k - 1) = 3k + 1$) bzw. die beiden „Außen“ - Längen mit jeweils k Hölzchen und die inneren k + 1 Hölzchen ergeben $k + k + k + 1 = 3k + 1$. Diese Verallgemeinerung rechtfertigt AB III.
Die eigene kritische Auseinandersetzung mit den Werten für k und s aus der Gleichung und aus der Abbildung erfordert Verstehen und Anwenden der formalen Sprache (K5).

Aufgabe 5.3

Die Ergebnisse lassen Rückschlüsse zu auf einige häufig zu erwartende **Fehler** in den Überlegungen von Schülerinnen und Schülern, wie:

- Jedes Quadrat hat vier Seiten, also gilt: „s = 4k“.
- „s = k : 4“, was zusätzlich durch falsche Zuordnung der Variablen zustande kommt.

Anregungen für den Unterricht

Durch die Aufforderung, dargestellte Zusammenhänge zu erkennen und durch Gleichungen auszudrücken, wird das Verallgemeinern geübt. Weitere vorgegebene oder von Schülerinnen und Schülern selbst gefundene Zuordnungen bei Figuren wie Dreiecken, Rechtecken oder Fünfecken bieten sich zur Differenzierung oder Weiterarbeit an. So lassen sich Terme, bezogen auf Figurenketten, nicht nur für Anzahlen, sondern auch für Längen, Umfänge oder Flächeninhalte aufstellen.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, werden aufgefordert, schrittweise zu addieren und rekursiv weitere Zahlenpaare (k; s) zu finden. Mögliche Wege sind u. a.:

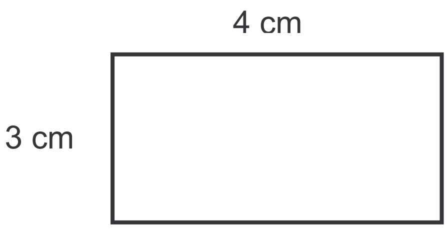
- Mit 4 Hölzchen beginnen und immer 3 weitere anbauen
  → 4 + 3 + 3 + 3 +…+ 3.
- Mit 1 Hölzchen beginnen und immer 3 weitere anbauen
  → 1 + 3 + 3 + 3 +…+ 3.
- Immer 3 Hölzchen anbauen und am Ende noch 1 Holz hinzufügen
  → 3 + 3 + 3 + 3 +…+ 1.

Zur Unterstützung des selbstständigen Verallgemeinerungsprozess sollten Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, vorgegebene Gleichungen zu analysieren und zu entscheiden, ob sie den Sachverhalt richtig widerspiegeln.
„s = 4 + (k – 1) · 3“ , „s = 1 + k · 3“ , „s = k · 3 + 1“ , „s = k · 4 – (k – 1)“ , „s = 4k“
Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme sollte abschließend die erwartete Lösung herbeigeführt werden. In jedem Fall sollte eine Legende (s ist die Anzahl der Hölzchen und k ist die Anzahl der Quadrate) die Verwechslung der Variablen ausschließen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Gleichung gefunden haben**, kann die Fragestellung umgekehrt werden, wie:
Wie viele Quadrate kann eine Streichholzkette höchstens haben, wenn 100 Streichhölzer dafür bereit liegen?
Wie viele Streichhölzer bleiben dann als nicht mehr nutzbarer Rest übrig?
(Vgl. auch Aufgabe 5.2 in diesem Heft.)

Aufgabe 6

Rechteck
Ein Rechteck ist 4 cm lang und 3 cm breit.



(Zeichnung nicht maßgenau)

Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Kreuze an.

- ☐ 12 cm^2
- ☐ 7 cm
- ☐ 7 cm^2
- ☐ 12 cm
- ☐ 14 cm

Lösung

12 cm^2

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

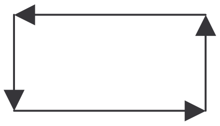
Die Schülerinnen und Schüler ermitteln den Flächeninhalt eines Rechtecks und wählen dabei die richtige Einheit des Flächeninhalts (L2). Dabei müssen sie mit der ihnen vertrauten Formel umgehen (K5, AB I).

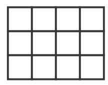
Fehler beim Ankreuzen lassen folgende **Diagnosen** zu:

- 7 cm: Die im Bild angegebenen Längenangaben wurden ohne Bezug zur Frage addiert. Es ist kein Bezug zu Umfang oder Flächeninhalt erkennbar.
- 7 cm^2: Die Flächenformel wurde falsch angewendet (plus statt mal), allerdings die richtige Einheit benutzt.
- 12 cm: Die Maßzahl der Fläche wurde richtig berechnet, allerdings die falsche Einheit verwendet.
- 14 cm: Hier wurde der Umfang statt der Fläche berechnet.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich folgende Übungsmöglichkeiten an:
Zu Rechtecken mit vorgegebenen Längen und Breiten sind jeweils Flächeninhalt und Umfang zu ermitteln. Zur Verankerung der Vorstellungen sind die folgenden Bilder hilfreich:

Umfang: 

Flächeninhalt: 

Beim Üben ist insbesondere auf den korrekten Umgang mit den Einheiten zu achten. Mit zunehmender Sicherheit können auch die Umkehraufgaben (zu vorgegebener Maßzahl und Einheit sollen verschiedene Rechtecke gezeichnet werden) eingesetzt werden, etwa:

- Zeichne 3 verschiedene Rechtecke mit dem Umfang 12 cm.
- Zeichne 2 verschiedene Rechtecke mit dem Flächeninhalt 18 cm^2.

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können durch anspruchsvollere Varianten gefördert werden, wie:

I. Kombination verschiedener Einheiten, die das Umrechnen von Größeneinheiten erfordern, wie:
Ein Rechteck ist 0,7 m lang und 13 cm breit. Berechne Flächeninhalt und Umfang und gib beide in zwei verschiedenen Einheiten (m und mm) an.

II. Darüber hinaus kann die Aufgabe geöffnet werden, indem zu vorgegebener Maßzahl (Flächeninhalt oder Umfang) verschiedene ebene Figuren gezeichnet werden sollen, wie:
Zeichne ein Rechteck (ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Dreieck und eine L – Figur) mit dem Flächeninhalt 16 cm^2. Dabei wird das Umwandeln der einzelnen Formen (Abschneiden und Anfügen von Teilflächen) wiederholt.

III. Der Umgang mit Formeln kann geübt werden, indem zu vorgegebenem Flächeninhalt bzw. Umfang eine fehlende Seitenlänge berechnet werden soll, wie:
Ein Rechteck hat den Umfang 32 cm und ist 11 cm breit. Wie lang ist es?
Ein Rechteck ist 5 cm lang und hat den Flächeninhalt 8 cm^2. Wie breit ist es?
Der Schwierigkeitsgrad wird erhöht, indem Dezimalzahlen und verschiedene Maßeinheiten benutzt werden.

IV. Fragen zu minimalem bzw. maximalem Umfang bzw. Flächeninhalt schulen das Argumentieren (K1), wie:
Zeichne ein Rechteck mit dem Umfang 20 cm, das einen möglichst großen Flächeninhalt hat.
Verschiedene Beispiele werden zur Entdeckung des Quadrats als maximale Lösung führen.
Suche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 12 cm^2, das einen möglichst großen Umfang hat.
Durch zunehmende Verbreiterung (Verdünnung) des Rechtecks kommen Schülerinnen und Schüler zu der Entdeckung, dass es kein solches geben kann.

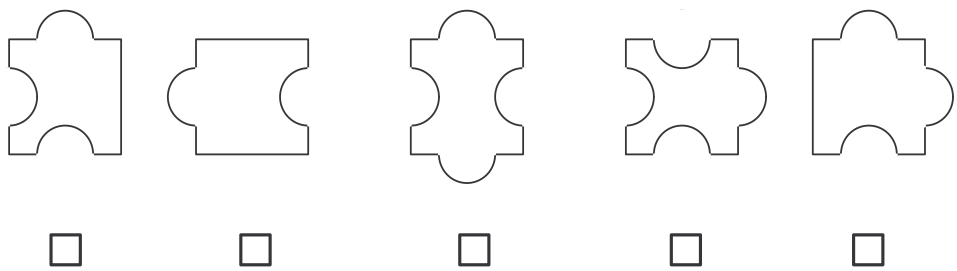
V. Auch ohne den Umgang mit Termen und quadratischen Gleichungen können Schülerinnen und Schüler folgende Fragestellung argumentativ oder experimentell bearbeiten:
Gibt es ein Rechteck mit dem Umfang 20 cm und dem Flächeninhalt 20 cm^2?
Durch die Betrachtung von verschiedenen Rechtecken mit dem Umfang 20 cm und ganzzahligen Seitenlängen kann begründet werden, dass zwischen den Rechtecken 3 cm x 7 cm und dem Rechteck 2 cm x 8 cm eine Lösung liegen muss („Stetigkeitsargument"). Die Aufgabe kann auch rein experimentell durch systematisches Probieren (auch mit Hilfe von Tabellenkalkulation) gelöst werden.

Aufgabe 7

Puzzleteile

Welches dieser Puzzleteile hat den größten Flächeninhalt ?

Kreuze an.



Lösung

Das 5. Kästchen wurde angekreuzt.

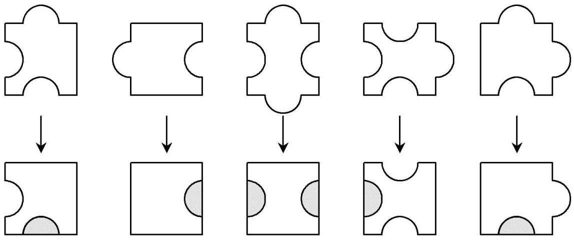
Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Elementare Voraussetzung dieser Aufgabe ist eine Grundvorstellung bei den Schülerinnen und Schülern von Flächengrößen und die Strategie der Zerlegung in disjunkte einfachere Teilflächen, deren Inhalte man addieren kann, um den Gesamtinhalt zu bestimmen. Um Flächengleichheit zu „sehen", müssen die Schülerinnen und Schüler auch über eine Vorstellung von Kongruenz verfügen, ohne diesen Begriff unbedingt zu kennen.

Das Lösen dieser Aufgabe erfordert von den Schülerinnen und Schülern ein gedankliches Operieren mit den vorgegebenen Flächen (L2). Den größten Flächeninhalt finden sie durch geeignete Strategien im direkten Flächenvergleich (K2). Dazu ist es hilfreich, die komplementären Halbkreise (Ausstülpung und Einbuchtung) zu erkennen, entsprechend gedanklich zusammenzufügen und sich so der ursprünglichen Quadratform zu nähern (K4).



Neben dieser visuellen Vorstellung kann auch das konkrete Zählen der Einbuchtungen und Ausstülpungen bei jeder einzelnen Figur eine Lösungsstrategie sein. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II).

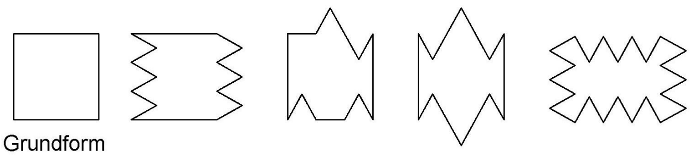
Anregungen für den Unterricht

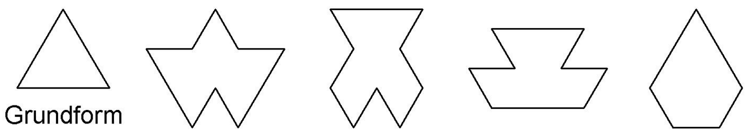
Für den Unterricht bieten sich zahlreiche Aufgabenvariationen zu diesem Sachverhalt an.

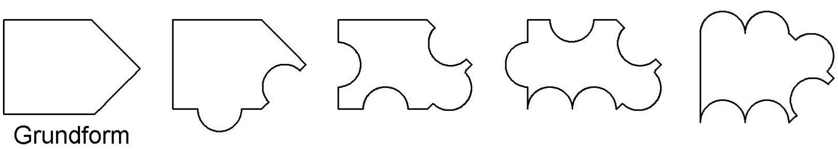
Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgabe hatten, sollten die Lösungsstrategie an Variationen der gegebenen Aufgabe festigen. Gemäß der angesprochenen Grundvorstellung, sollten auch einfachere Flächen betrachtet werden, die aus Rechtecken oder rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt sind.

Bei **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, kann der Schwierigkeitsgrad durch komplexere Formen erhöht werden.

Beispiele:

- 

- 

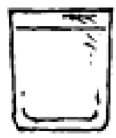
- 

Durch Weglassen der Grundform wird der Schwierigkeitsgrad weiter erhöht.

Aufgabe 8

Saft

Für wie viele Gläser Saft reicht die Flasche ?



1 Flasche Saft
2l

1 Glas Saft
200 ml

Die Flasche reicht für ____________ Gläser Saft.

Lösung

10 Gläser

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe stellt ein einfaches Problem dar, das mit bekannten Verfahren, auch experimentell, gelöst werden kann (K2, AB I). Die Schülerinnen und Schüler vergleichen Volumenangaben und müssen dazu die gegebenen Maßeinheiten umrechnen (L2).

Es ist nicht zu erwarten, dass gehäuft bestimmte **Fehler** auftreten. Die Aufgabe wird den Schülerinnen und Schülern wenig Probleme bereiten, da sie ihrer Erfahrungswelt entspricht.

Anregungen für den Unterricht

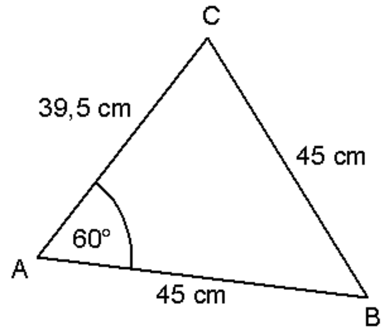
Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es sinnvoll, den Inhalt der Flasche zunächst mit 2000 ml anzugeben.
Im Folgenden sollte im Unterricht mit Volumenangaben gearbeitet werden.

- Nennen geeigneter Repräsentanten zu vorgegebenen Volumenangaben
- Schätzen des Fassungsvermögens von realen Gefäßen bzw. Gegenständen
- Umrechnen von Volumenangaben

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben**, könnte die gestellte Aufgabe folgendermaßen abgeändert werden:
Eine Regentonne fasst $\frac{1}{2}$ m^3 Wasser. Wie viele Gießkannen mit 10 l Fassungsvermögen können daraus gefüllt werden?

Aufgabe 9

Das unmögliche Dreieck



Begründe, warum es kein Dreieck mit diesen Maßen geben kann.

Lösung

Richtige Begründung, die die Unvereinbarkeit von Seitenlängen und Innenwinkeln in diesem Dreieck verdeutlicht, z.B.:
Verbal:
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und gleichzeitig hat ein Innenwinkel das Maß 60°. Folglich müsste dieses Dreieck gleichseitig sein. Daher müssten alle drei Seiten entweder 39,5 cm oder 45 cm lang sein.
Zeichnerisch:
Zeichnen des Dreiecks mit den angegebenen Seitenlängen und Messen des Winkels. Dabei muss mit Hilfe der Zeichnung verdeutlicht werden, dass es das o.g. Dreieck in der Form nicht geben kann.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Argumentieren (K1)** **Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, eine gegebene Aussage zu bewerten (K1), selbstständig unter Anwendung ihrer Kenntnisse geeignete Strategien zur Problemlösung zu entwickeln und eine mehrschrittige und komplexe Argumentation vorzunehmen (K2, AB III).

Die Maßangaben am gegebenen Dreieck sind Grundlage der Bearbeitung (L2). Sie werden genutzt, um geometrische Beziehungen an der Darstellung zu erkennen und zu interpretieren (K4). Um zur Entscheidung zu gelangen, sind Berechnungen nötig oder ein Nutzen vertrauter Formeln und Zusammenhänge (K5).
Zwei denkbare Lösungsstrategien werden bereits in den Lösungshinweisen deutlich, wobei eine zeichnerische Lösung in einem dem Format des Aufgabenblattes angemessenen Maßstab auszuführen wäre.

Fehler in den Argumentationen können auftreten, wenn von den Schülerinnen und Schülern die gleichschenklige Form des Dreiecks zwar erkannt wird, aber Schlussfolgerungen für die Größe der beiden Basiswinkel nicht gezogen werden. Ein Nichtbeachten des Satzes über die Summe der Innenwinkel bzw. von Seite-Winkel-Beziehungen in einem Dreieck kann Ursache für falsche Lösungsdarstellungen sein. Bei zeichnerischer Lösung können der nicht korrekte Umgang mit Maßstäben oder mangelnde Fähigkeiten im Konstruieren zu falschen Lösungen führen.

Anregungen für den Unterricht

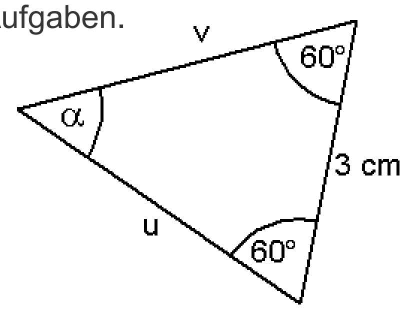
Die Form der geforderten Lösungsdarstellung bietet bei dieser Aufgabe vielfältige Möglichkeiten, um mit Schülerinnen und Schülern über ihre Begründungen zu sprechen, eigene Lösungsbeispiele vorzustellen und gemeinsam auf deren Stichhaltigkeit und Exaktheit hin zu überprüfen. Dazu können verschiedene Sozialformen (z.B. Gruppen- und Partnerarbeit oder Klassenunterricht) genutzt werden. Ein Beitrag zur Kompetenzentwicklung im Bereich des Kommunizierens (K6) kann so über die Aufgabe hinaus geleistet werden.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, können Eigenschaften verschiedener Dreiecksarten und relevante Sätze zum Dreieck wiederholt werden. Problemen bei zeichnerischen Lösungen könnte im Unterricht durch Vorgabe eines geeigneten Maßstabes bzw. durch entsprechend angepasste Seitenlängen begegnet werden. Hilfen beim Erstellen von Begründungen im Rahmen der gegebenen Aufgabe können Aufforderungen sein, wie:

- Was weißt du über das gegebene Dreieck? (Seiten, Winkel)
- Was gilt für die Größe von Basiswinkeln in gleichschenkligen Dreiecken?
- Beachte den gegebenen Winkel. Bestimme die Größe des Winkels, der von den beiden Schenkeln eingeschlossenen wird. Was bedeutet das für die Basis in diesem Dreieck? Vergleiche mit der Abbildung.

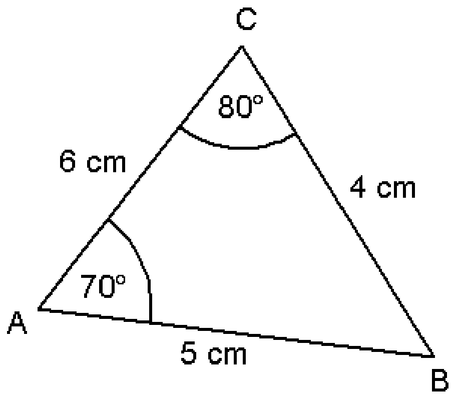
Eine ergänzende Aufgabenstellung zur Unterstützung und Weiterarbeit ist:

Löse für das Dreieck in der Abbildung folgende Aufgaben.
Gib eine Begründung für das jeweilige Ergebnis.



a) Bestimme die Größe des Winkels α.
b) Bestimme die Länge der Seiten u und v.
c) Wie heißen solche Dreiecke?

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe lösen konnten, können aufgefordert werden, ähnliche Aufgabenstellungen selbständig zu entwickeln, indem sie Zusammenhänge am Dreieck nutzen („Der größten Seite liegt der größte Winkel gegenüber." oder „Die Summe zweier Seitenlängen ist stets größer als die dritte Seitenlänge.")
Beispiel:
Begründe, warum es kein Dreieck mit diesen Maßen gibt.



Zur **Differenzierung** bietet sich der Einsatz dynamischer Geometriesoftware an.

Aufgabe 10

Geld umrechnen
10.1: Rechne um:

27 € 50 Cent = _______ €

10.2: Rechne um:

1 € 1 Cent = _______ Cent

Lösung

10.1: 27,50 oder 27,5
10.2: 101

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgaben sind elementare Kenntnisse im Umgang mit Größen direkt anzuwenden (L2, K5). Die Aufgabenstellung und das gewählte Zahlenmaterial erlauben eine Lösung „im Kopf" (AB I).
Mögliche **Fehler** können auftreten, wenn die geforderten Einheiten nicht richtig erfasst werden und statt in € in Cent umgerechnet wird oder umgekehrt. Wird beim Betrag in Teilaufgabe 2 die Zuweisung zur Stellentafel nicht berücksichtigt, treten weitere mögliche **Fehler** auf, z.B. 110 Cent oder 11 Cent.

Anregungen für den Unterricht

Das Umrechnen von Größen, hier insbesondere von Geld, kennen die Schülerinnen und Schüler nicht nur aus dem Mathematikunterricht, sondern vor allem aus ihren Alltagserfahrungen. **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben nicht lösen konnten**, sollten Gelegenheit erhalten, verschiedene Anzahlen von Cent – Stücken zu gruppieren, um so die jeweils größeren Münzwerte zu erfassen. Anschließend bieten sich einfache Kopfrechenübungen an (auch regelmäßig am Anfang oder Ende einer Stunde), um Sicherheit beim Lösen dieser formalen Aufgaben zu erlangen. Bei fehlerhaften Antworten zur Teilaufgabe 2 kann es erforderlich sein, an einfachen Aufgaben die Bedeutung der Stellenwerte zu wiederholen.

Aufgabenvariationen sind z.B.:

- Ergänze zu vollen 10 €:
  3,50 € ; 5,55 € ; 7,99 € ; 50 Cent ;
  4 € und 80 Cent ;
  9 € und 5 Cent

- Finde die Fehler und berichtige:
  3 € = 30 Cent
  505 Cent = 50,5 €
  2,5 € = 25 Cent
  12,2 € = 122 Cent
  340 Cent = 34 €

Aufgabe 11

Minuten und Sekunden

Rechne die Zeitangaben um und fülle die Lücken aus .

95 s = _1_ min _35_ s ___ s = 3 min 28 s

136 s = ____ min ___ s ___ s = 8 min 20 s

Lösung

208 (s) 2 (min) 16 (s) 500 (s)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe verlangt das Umwandeln von Zeiteinheiten (L2, K5, AB I). Auch im täglichen Leben wird dies benötigt. Es gilt zu beachten, dass (aus historischen Gründen) die Zeitmessung nicht in Einheiten erfolgt, die Stellenwerte des Dezimalsystems repräsentieren.

Wenn das nicht im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler verankert ist, können **Fehler** dadurch entstehen, dass eine Minute durch 10 oder 100 Sekunden ersetzt wird, z.B. 3 min 28 s wären dann 328 s. Zumindest Grundvorstellungen von den beiden Zeiteinheiten müssen von den Schülerinnen und Schülern aktiviert werden. Einfache Multiplikation mit 60 und Division mit Rest durch 60 muss beherrscht werden.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können sich im Rahmen von Binnendifferenzierung systematisch damit auseinandersetzen, dezimale Stundenangaben umzurechnen in Formate des Typs
Stunden : Minuten : Sekunden (letztere: dezimal) und umgekehrt, wie die folgende Tabelle zeigt.

Dies formal zu bewerkstelligen mit Hilfe einer Excel-Tabelle (deren Zellen nur als Dezimalzahlen formatiert sind), fordert auch Schülerinnen und Schüler heraus, die die Aufgabe lösen konnten.

Zeit dezimal in Stunden		**Stunden**	**Minuten**	**Sekunden**
2,47895		2	28	44,22
0,005		0	0	18
127,115		127	6	54
7,923		7	55	22,8
2,47895		2	28	44,22
11,94263889		11	56	33,5

Zeit dezimal in Stunden		**Stunden**	**Minuten**	**Sekunden**
2,47895		=GANZZAHL(A3)	=GANZZAHL((A3-C3)*60)	=(A3-C3)*3600-D3*60
0,005		=GANZZAHL(A4)	=GANZZAHL((A4-C4)*60)	=(A4-C4)*3600-D4*60
127,115		=GANZZAHL(A5)	=GANZZAHL((A5-C5)*60)	=(A5-C5)*3600-D5*60
=C7+D7/60+E7/3600		7	55	22,8
=C8+D8/60+E8/3600		2	28	44,22
=C9+D9/60+E9/3600		11	56	33,5

Aufgabe 12

Fehlendes Zeichen
Setze das jeweils richtige Zeichen ein.
Folgende Zeichen kannst du benutzen: <, >, =

700 cm	____	17 m
5 m	____	5,50 m
180 cm	____	1,80 m
20 cm	____	20 mm
4 cm	____	40 mm
0,8 cm	____	100 mm

Lösung

700 cm	<	17 m
5 m	<	5,50 m
180 cm	=	1,80 m
20 cm	>	20 mm
4 cm	=	40 mm
0,8 cm	<	100 mm

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler vergleichen Längenmaße. Das setzt sichere Grundvorstellungen gängiger Maßeinheiten und Größenordnungen voraus. Regelkenntnisse für das Umwandeln werden ebenfalls benötigt (L2). Es ist mit vertrauten Formeln und Symbolen umzugehen (K5, AB I).

Fehler können entstehen, wenn die genannten Voraussetzungen nicht vollkommen vorliegen, insbesondere bei Fehlvorstellungen zu den Längenmaßen. Darüber hinaus können Flüchtigkeitsfehler entstehen, weil mehrfach einfache Antworten zu geben sind.

Die Fehlerursache ist nicht eindeutig aus der Lösung erkennbar. Deshalb sind zur **Diagnose** Nachfragen zum Bearbeitungsweg oder Aufforderungen zum Erklären desselben erforderlich.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sind vermutlich häufig an der Wahl des richtigen Umrechnungsfaktors gescheitert. Daher sollen im Unterricht zunächst Größen mit gleicher Maßeinheit verglichen werden. Anschließend ist zu empfehlen, an geeigneten Repräsentanten von Längenmaßen (z.B. Tafellineal 1 m = 10 dm = 100 cm) die Umwandlung durchführen zu lassen. Eventuell muss die Stellenwerttafel nochmals thematisiert werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können aufgefordert werden – falls noch nicht vorhanden – anschauliche Hilfen zum Aushängen im Klassenzimmer zu erstellen. Dabei sollten auch besonders kleine und große Längenangaben (aus dem Makro- und Mikrokosmos) beachtet werden, wie:

- Tiefe der Weltmeere, Entfernungen im Sonnensystem und im Weltraum,
- Dicke eines Blattes, „Höhe“ einer Ameise, Länge von Pantoffeltierchen, Feinstaubabmessungen.

Aufgabe 13

Winkel im Dreieck
In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel γ an der Spitze dreimal so groß wie ein Basiswinkel α.
Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?
Kreuze die richtige Antwort an.

- ☐ $\alpha = 30°$, $\gamma = 90°$
- ☐ $\alpha = 20°$, $\gamma = 120°$
- ☐ $\alpha = 36°$, $\gamma = 108°$
- ☐ $\alpha = 22{,}5°$, $\gamma = 135°$

Lösung

$\alpha = 36°$, $\gamma = 108°$

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler haben aus den gegebenen Größen des Dreiecks (L2) die einzige korrekte Lösung zu ermitteln. Zur Lösung des Problems sind verschiedene Wege, wie Vor- oder Rückwärtsarbeiten, möglich (K2):

- Durch Nutzung der vorliegenden Beziehungen am gegebenen Dreieck erhält man $3\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180°$ und damit $\alpha = 36°$ und folglich $\gamma = 108°$.
- Durch Überprüfen der gegebenen Antworten kann ermittelt werden, ob ein entsprechendes Dreieck die Bedingungen erfüllt (K4, K5). Es reicht nicht aus, bei den gegebenen Antworten zu prüfen, ob die Größe des Winkels γ das Dreifache des Winkels α ist. Außerdem muss auch die Summe der Innenwinkel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ betragen.

Ein wie auch immer gearteter Lösungsweg erfordert ein Strategie gestütztes mehrschrittiges Vorgehen (AB II).

Fehler können bedingt sein durch Nichtbeachten der im Aufgabentext genannten Bedingung für die beiden Winkel (Ankreuzen der 2. und 4. Antwort), durch Nichtbeachten des Satzes über die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck (Ankreuzen der 1. Antwort) oder eine Kombination beider Fehler.

Eine **Diagnose** kann hier durch das Einfordern von verbalen Begründungen für die getroffene Auswahl erfolgen.

Anregungen für den Unterricht

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben,** können im Unterricht weitere Aufgaben betrachtet werden, wie:

- In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt der Winkel, den die beiden gleich langen Seiten bilden, 40°. Wie groß sind die beiden anderen Winkel?
- Die Seiten eines Dreiecks sind alle 5 cm lang. Wie groß sind seine Innenwinkel?
- In einem Dreieck verhalten sich die Innenwinkel wie 3 : 2 : 1. Gib ihre Größe an.

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe lösen konnten, können angeregt werden, über Existenz und Eindeutigkeit von Dreiecken, für die Stücke bzw. Eigenschaften gegeben sind, nachzudenken und ihre Überlegungen Mitschülern vorzustellen. Empfehlenswert sind auch Aufgaben, wie:

- Zwei gleichlange Seiten eines Dreiecks schließen einen spitzen Winkel ein. Erläutere anhand einer Skizze, welche Aussagen sich über die beiden anderen Winkel in diesem Dreieck treffen lassen. Was lässt sich über die Verhältnisse der Seitenlängen in diesem Dreieck sagen? Wie heißen solche Dreiecke?
- Ergänze für die Dreiecke ABC die Tabelle.

Innenwinkel der Dreiecke ABC			Dreiecksart		längste Seite des Dreiecks
α	β	γ	nach Seiten	nach Winkeln	
54°	78°		unregelmäßig	spitzwinklig	
	30°	105°	unregelmäßig	stumpfwinklig	
60°	60°		gleichseitig	spitzwinklig	
50°	50°		gleichschenklig	spitzwinklig	

Es empfiehlt sich eine gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 9 „Das unmögliche Dreieck“.

Aufgabe 14

Nachbarseiten im Parallelogramm
Bei einem Parallelogramm ist eine Seite 40 cm lang und eine benachbarte Seite 90 cm. Wie groß ist der Umfang des Parallelogramms? Kreuze an.

☐ 130 cm
☐ 170 cm
☐ 260 cm
☐ 340 cm
☐ 360 cm

Lösung

260 cm

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der vorliegenden Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler den Umfang des beschriebenen Parallelogramms berechnen (L2). Sie interpretieren „benachbarte Seite“ im gegebenen Kontext und erhalten so eine Routineaufgabe (K2). Zur erfolgreichen Bearbeitung müssen Schülerinnen und Schüler über das nötige Faktenwissen bezüglich der Begriffe „Parallelogramm“ und „Umfang“ verfügen und bei der Berechnung des Umfangs mit der vertrauten Formel umgehen bzw. die Vorstellung von Umfang als der Summe der Seitenlängen nutzen (K5, AB I).

Ein zu erwartender **Fehler** ist, dass die Schülerinnen und Schüler keine konkrete Vorstellung vom Begriff des Umfangs eines Vierecks haben und so z.B. lediglich die gegebenen Seitenlängen addieren und den Umfang des Parallelogramms mit 130 cm angeben. Um falsche Antworten nachvollziehen zu können, empfiehlt es sich, die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen verbalisieren zu lassen. Daraus lässt sich individuell eine **Diagnose** erstellen.

Anregungen für den Unterricht

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben,** sollten Eigenschaften des Parallelogramms wiederholt und Übungen zum inhaltlichen Erfassen seines Umfangs durchgeführt werden, wie:

- Zeichnen eines Parallelogramms an der Tafel und Nachfahren des Umfangs mit farbiger Kreide,
- Betrachten eines realen Modells (z.B. in Form eines beweglichen Holzrahmens) und anschauliches Kennzeichnen des Umfangs (z.B. mit farbigem Klebeband).

Anhand des beweglichen Holzrahmens kann darüber hinaus veranschaulicht werden, dass der Umfang nur von den Seitenlängen und nicht von der Form des Parallelogramms abhängt. Die Berechnung des Umfangs weiterer Figuren (z.B. Drachenvierecke, Trapeze, ...) dient zur Vertiefung des Verständnisses. Anschließend bietet sich die Bearbeitung einer praxisbezogenen Aufgabenstellung (z.B. eingezäunte Wiese) an.

Schülerinnen und Schülern, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, können komplexere Aufgaben angeboten werden, wie:

- Der Umfang eines Parallelogramms beträgt 60 cm. Von zwei benachbarten Seiten ist eine doppelt so lang wie die andere.
  Wie lang sind die Seiten dieses Parallelogramms?
- Warum ist der Umfang eines Parallelogramms immer geradzahlig, wenn die Seitenlängen ganzzahlig sind?

Zur gegenseitigen Abgrenzung der Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“ einer Figur empfiehlt sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 6 „Rechteck“.

Aufgabe 15

Fahrplan

Hier siehst du den Fahrplan von Köln mit dem Intercity IC 800 nach Hamburg.

Bahnhof	an	ab
Köln Hbf		10:09
Düsseldorf Hbf	10:30	10:32
Duisburg Hbf	10:44	10:46
Essen Hbf	10:57	10.59
Bochum Hbf	11:07	11:09
Dortmund Hbf	11:20	11:24
Münster (Westf) Hbf	11:53	11:55
Osnabrück Hbf	12:18	12:20
Bremen Hbf	13:13	13:15
Hamburg-Harburg	13:59	14:01
Hamburg Hbf	14:09	

15.1: Wie lange braucht der Zug von Köln bis Hamburg Hbf? ____________

15.2: Herr Schmitz fährt von Essen nach Bremen.
Wie lange braucht der Zug für diese Strecke? ____________

15.3: Frau Krüger fährt von Köln nach Münster.
Wie lange braucht der Zug für diese Strecke? ____________

15.4: An welchem Bahnhof hält der Zug am längsten? ____________

Lösung

15.1: 4 Stunden
15.2: 2 Stunden 14 Minuten oder 134 Minuten
15.3: 1 Stunde 44 Minuten oder 104 Minuten
15.4: Dortmund Hbf

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

<table>
<tr><td colspan="2">Leitidee</td><td>Messen (L2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Kompetenz</td><td>15.1
15.2
15.3</td><td>Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)</td></tr>
<tr><td>15.4</td><td>Probleme mathematisch lösen (K2)
Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Anforderungsbereich</td><td>AB I</td></tr>
</table>

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Tabelle die jeweils relevanten Zeitangaben (L2) und berechnen Zeitdifferenzen (K5). Da hier nur einfache Routineverfahren benutzt werden, gehört die Aufgabe zu AB I.

Die Schülerinnen und Schüler werden vermutlich **Fehler** machen, wenn der Umgang mit Fahrplänen nicht hinreichend bekannt ist. Insbesondere kann es Verwechslungen bzgl. der An- und Abfahrtzeiten geben. Das Bilden von Zeitdifferenzen, vor allem beim Überschreiten voller Stunden, bereitet häufig Schwierigkeiten. Das hier vorliegende Zahlenmaterial ist jedoch recht einfach.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten,** sollten Fahrpläne zur Berechnung von Fahrzeiten und Aufenthaltsdauern analog der vier gestellten Teilaufgaben eingesetzt werden.
Auch der Zeitplan der Schule von der 1. bis zur 8. Stunde kann vorgegeben werden. Folgende Aufgabenstellungen bieten sich dazu an:

- Wie viel Zeit vergeht von der ersten bis zur letzten Unterrichtsstunde?
- Welche ist die längste Pause?
- Wie viele Minuten Pause gibt es insgesamt?
- Wie lang ist ein Schultag, wenn der Unterricht von der 2. bis zur 6. Stunde dauert?

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, wäre folgende Fragestellung zum obigen Kontext geeignet:
Wie lange ist ein Schüler von zu Hause weg, wenn er für seinen Schulweg eine Viertelstunde braucht und zehn Minuten vor Unterrichtsbeginn an der Schule sein will? Sein Unterricht geht von der ersten bis zur achten Stunde. Er geht direkt von „seinem“ Haus zur Schule und so auch wieder zurück.

Aufgabe 16

Fadenaufgabe

Ein 34 Zentimeter langer Faden wird zu einem Rechteck gelegt .

Die Breite des Rechteckes beträgt 8 Zentimeter.

Wie lang ist das Rechteck ?

- ☐ 8 Zentimeter
- ☐ 9 Zentimeter
- ☐ 13 Zentimeter
- ☐ 18 Zentimeter

Aufgabe 16

Lösung

9 Zentimeter

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabenstellung stellt direkt den Bezug zwischen einer Seitenlänge eines Rechtecks und dessen Umfang her. Zur Bearbeitung muss zunächst eine Lösungsstrategie ausgewählt werden (K2), die dann umgesetzt wird (K5). Neben der Berechnung über eine Umfangsformel (z.B. $u = 2a + 2b$) ist auch eine sukzessive Bestimmung z.B. anhand einer Skizze möglich.

Die Antwort 8 cm könnte auf die **Fehlinterpretation**, dass es sich um ein Quadrat handelt, hinweisen. Die beiden anderen Antworten sind in der Regel darauf zurückzuführen, dass entweder die gegebene oder die gesuchte Rechteckseite nur einfach in die Bestimmung eingegangen ist.

Anregungen für den Unterricht

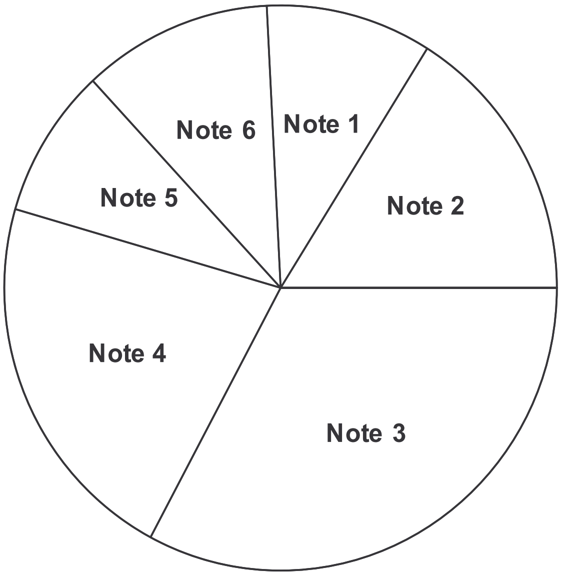
Liegen bei **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, Probleme im Zusammenhang von Seitenlängen und Umfang einer geometrischen Figur vor, so können z.B. anhand von Figuren auf dem Geobrett die Berechnungen aufgearbeitet werden. Einfache Lösungsstrategien zur Bearbeitung von Gleichungen sollten hierbei genauso angesprochen werden wie die Strategien „Zerlegung" oder „Rückwärtsarbeiten" zur sukzessiven Bestimmung. Dabei sollten auch Variationen, wie Fragen nach der Änderung des Umfangs bei Verdoppelung, Halbierung etc. entsprechender Seiten, einfließen.
Empfehlenswert ist es, diese Zusammenhänge nicht isoliert zu wiederholen, sondern insbesondere bei der Bearbeitung verschiedener Körper aufzugreifen, wie bei der Berechnung von Materialien zur Anfertigung von Kantenmodellen. Auch der Zusammenhang von Kantenlängen, Gesamtkantenlängen, Oberflächen und Volumina bietet Gelegenheiten zur Übung und Wiederholung.

Hierbei ergeben sich auch für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, Anregungen zur Vertiefung. Modellierungsaspekte (K3), die bei der praktischen Umsetzung von „Ein Faden wird zu einem Rechteck gelegt." zu beachten sind, sollten diskutiert werden: „Sollen die Enden des Fadens verbunden werden?", „Was ist die Konsequenz für die Fadenlänge als Umfang des Rechtecks?".
Analoges gilt für die Herstellung der Kantenmodelle von Würfeln bzw. Quadern aus Draht einer vorgegebenen Länge.

Aufgabe 17

Noten

Das Kreisdiagramm zeigt die Notenverteilung einer Prüfung im Fach Englisch .



Welche der folgenden Aussagen zu diesem Kreisdiagramm ist richtig ?

Kreuze an.

- ☐ Es gibt öfter die Note 2 als die Note 4.
- ☐ Ein Drittel der Schülerinnen und Schüler hat die Note 1 oder die Note 2.
- ☐ Mehr als 50% der Schülerinnen und Schüler haben eine bessere Note als die Note 4.
- ☐ Weniger als ein Viertel der Schülerinnen und Schüler haben die Note 3.

Aufgabe 17

Lösung

Mehr als 50 % der Schülerinnen und Schüler haben eine bessere Note als die Note 4.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik	
Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Aufgabe 17

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufbereitung von Daten in einem Kreisdiagramm und umgekehrt die Interpretation so aufbereiteter Daten (L5) ist ein unverzichtbarer Teilbereich der Leitidee „Daten und Zufall“. Dahinter steckt immer auch der Umgang mit Proportionalitäten.

Fehler können entstehen, wenn
- Kreisanteile nicht richtig in Beziehung zum Ganzen gesetzt werden können, also das Denken in Proportionalitäten nicht beherrscht wird oder
- Übersetzungsprobleme hinsichtlich "mehr als", "besser als", "weniger als", "oder", "öfter als" auftreten.

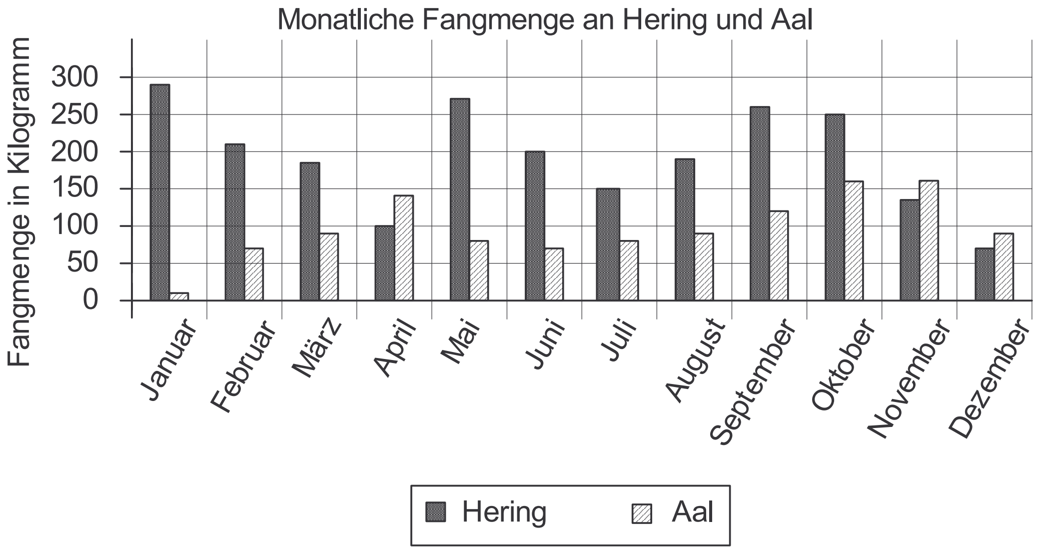
Anregungen für den Unterricht

Ausgehend von dem gegebenen Kreisdiagramm können Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, andere Darstellungen für diese Daten zu entwickeln. Hierfür sollten auch die Möglichkeiten von Tabellenkalkulationen genutzt werden.
Der Vergleich verschiedener so entstandener Darstellungsformen kann sich u.a. darauf beziehen, wie gut sie sich jeweils zur Prüfung der vorliegenden Auswahlantworten eignen.
Mit Bezug auf die gegebenen Auswahlantworten können Schülerinnen und Schüler auch aufgefordert werden, diese so zu verändern, dass wahre Aussagen entstehen (vgl. auch /1/, Seite 44 - 45).

Aufgabe 18

Fisch

Das Diagramm zeigt die Menge gefangenen Fischs in jedem Monat .



In welchem Zeitraum ist die monatliche Fangmenge an Aal im Vergleich zum Vormonat laut Diagramm prozentual am meisten angestiegen ?

Kreuze an.

☐ von März nach April

☐ von April nach Mai

☐ von September nach Oktober

☐ von Januar nach Februar

Lösung

von Januar nach Februar

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Ausgehend von der Fragestellung sollen die für die Beantwortung relevanten Informationen aus dem Diagramm herausgelesen werden (L5, K4) und unter dem Gesichtspunkt des stärksten prozentualen Anstiegs bewertet werden (K5). Die vier vorgegebenen Antworten reduzieren den Aufwand. Das mehrschrittige Vorgehen (die benötigten Informationen sind auszuwählen, abzulesen und zu bewerten) bedingt (AB II).

Bei der Bearbeitung können vor allem folgende **Fehler** auftreten:

- Beim Ablesen der benötigten Informationen aus dem Diagramm können die Angaben für Hering und Aal verwechselt werden. Dies würde zum Ankreuzen des 2. Kästchens führen.
- Bei einer Verwechslung des absolut größten Wertes mit dem Wert des größten Anstiegs würde das 3. Kästchen angekreuzt werden.
- Die Verwechslung des absoluten Anstiegs mit dem prozentualen würde bei genauem Ablesen zur selben Antwort (4. Kästchen) führen, bei ungenauem Ablesen zum Ankreuzen des 1. Kästchens.

Zur **Diagnose** können aus den fehlerhaften Antworten, natürlich mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, wie oben erwähnt, die zugrunde liegenden Fehlvorstellungen vermutet werden und durch Nachfragen bzw. Aufforderungen zum Beschreiben des Bearbeitungsprozesses bestätigt oder widerlegt werden.

Anregungen für den Unterricht

Der Umgang mit Diagrammen und Statistiken stellt in der heutigen Zeit eine wichtige Fähigkeit dar und sollte im Unterricht immer wieder thematisiert werden. Während in den unteren Jahrgangsstufen der Sekundarstufe I die Erstellung und Analyse einfacher Diagramme im Vordergrund stehen wird, sollen sich in den folgenden Jahrgangsstufen die Schülerinnen und Schüler mit aufwendigeren statistischen Untersuchungen befassen und komplizierte Diagramme kritisch analysieren.
Es gibt zwei Schwerpunkte bei der Arbeit mit Diagrammen und Statistiken:

- Vorliegende Diagramme lesen und analysieren:
  Die Schülerinnen und Schüler sollen sich kritisch mit Diagrammen und Grafiken z.B. aus den Medien auseinandersetzen. Dabei geht es aber nicht nur darum, Verfälschungen zu erkennen, sondern zunächst um Verständnis.

- Statistische Untersuchungen planen, durchführen, auswerten und darstellen: Hierzu können die Schülerinnen und Schüler selbstständig z.B. die Freizeitgewohnheiten von Kindern und Jugendlichen in Bezug auf Alter oder Geschlecht statistisch untersuchen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es empfehlenswert, ähnliche Fragestellungen zu übersichtlicheren Diagrammen zu stellen. Dies könnten hier zum Beispiel Diagramme mit nur einer Fischart oder weniger Datenpunkten sein.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, formulieren selbst weitere Fragestellungen, die sie mit Hilfe des gegebenen Diagramms beantworten können, wie:
- Entwicklung der Fangmengen beider Fischarten.
- Berechnung und Interpretation der Quartalsfangmengen o.ä.

Weitere Aufgaben zum Thema Statistiken und Diagramme sind in /1/, S. 57 - S.68.

Ähnliche Aufgaben in diesem Heft sind Aufgabe 17 „Noten“ und Aufgabe 20 „Preisänderungen im Mobilfunk“.

Aufgabe 19

Schultaschen

Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 5a sitzen in Tischgruppen zu jeweils 5 oder 6 Schülerinnen und Schülern. Heute werden im Unterricht die Schultaschen gewogen.

Paul kommt zu spät. Die anderen aus seiner Tischgruppe haben bis dahin schon ihre Taschen gewogen: 3,7 kg, 4,6 kg, 4,8 kg, 5,2 kg, 5,3 kg.

Mit Pauls Schultasche ergibt sich in dieser Tischgruppe ein durchschnittliches Gewicht von 4,9 kg.

Welches Gewicht hat Pauls Schultasche?

_________ kg

Lösung

5,8 kg

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe beschreibt, dass eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern Daten erheben und diese durch die Bestimmung des arithmetischen Mittels auswerten (L5). Die Aufgabe bietet allerdings einen unrealistischen Kontext, denn in der Realität wird man in der Aufgabensituation Pauls Tasche einfach auswiegen. Daher wäre die Reduktion auf eine innermathematische Aufgabe "ehrlicher". Um die Aufgabe zu lösen, können Schülerinnen und Schüler verschiedene Strategien anwenden (K2), dementsprechend modellieren sie (K3) und führen Rechnungen aus (K5). Das führt zu unterschiedlichen Lösungswegen, die mehrschrittig sind (AB II):

- Rückwärtsrechnen mit der Formel zum arithmetischen Mittel:
  Um die Aufgabe so zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler das Verfahren zur Berechnung des arithmetischen Mittelwerts verstanden haben (K5), um es umkehren zu können. Nach der Multiplikation von 4,9 kg mit 6 erhalten sie das Gesamtgewicht von 29,4 kg, wovon die gegebenen 5 Einzelgewichte zu subtrahieren sind, um als Rest das gesuchte Gewicht von 5,8 kg zu erhalten.
- Systematische Probieren und Überprüfen:
  Aus den gegebenen Werten lässt sich abschätzen, dass Pauls Tasche relativ schwer sein muss. Eine Überprüfung mit Hilfe des Taschenrechners kann schnell erfolgen. Hier bietet es sich an, den gegebenen Mittelwert von 4,9 kg als auf eine Dezimalstelle gerundetes Ergebnis zu interpretieren. Vor dem Runden muss die Lösung im richtigen Intervall [4,85 ; 4,95) liegen; dies ist der Fall bei allen Werten von 5,5 kg bis 6,0 kg für Pauls Schultasche.

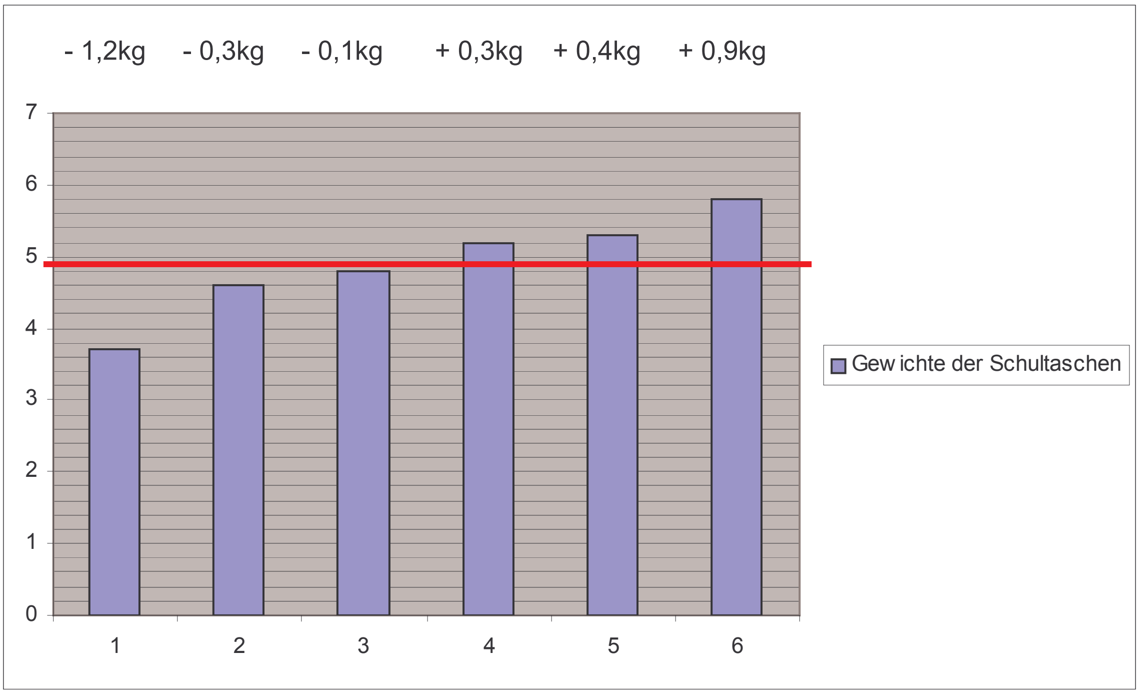
Gewicht von Pauls Schultasche	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1
Gesamtgewicht aller Schultaschen	29,0	29,1	29,2	29,3	29,4	29,5	29,6	29,7
Mittelwert (gerundet auf 2 Stellen)	4,83	4,85	4,87	4,88	4,9	4,92	4,93	4,95

- Berechnung der Abweichungen vom Mittelwert:
  Die ersten drei Gewichte sind zu klein, insgesamt fehlen 1,6 kg bis zum Mittelwert von 4,9 kg. Die beiden anderen sind zusammen 0,7 kg zu groß. Also muss das letzte Gewicht 0,9 kg größer sein als der Mittelwert, was insgesamt 5,8 kg ergibt. Dieser Ansatz erfordert einen flexiblen Umgang mit der Definition des Mittelwertes.
- Korrektur des Teil-Mittelwertes:
  Zunächst wird der Durchschnitt der 5 gegebenen Werte berechnet (4,72 kg). Die Abweichung zum angestrebten Mittelwert beträgt pro Schüler 0,18 kg. Für 5 Schüler sind das also 0,9 kg, die zur Erreichung des Mittelwertes fehlen und die daher zu den 4,9 kg addiert werden müssen. Das Defizit von 0,9 kg bei den ersten 5 gewogenen Schultaschen wird also gerade durch das entsprechende „Übergewicht“ von Pauls Schultasche aufgewogen.

Um **Fehler** relativ sicher **diagnostizieren** zu können, sollte eine (schriftliche oder mündliche) Dokumentation des Lösungsweges eingefordert werden.

Anregungen für den Unterricht

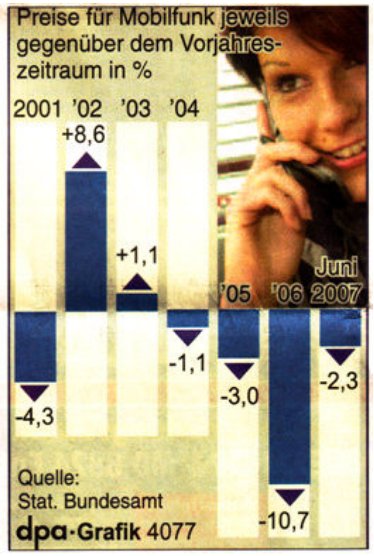
Bei Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, ist zunächst an einfachen Beispielen zu klären, ob das arithmetische Mittelwerte in seiner Bedeutung verstanden wird und das Verfahren zur Berechnung ausgeführt werden kann.
An grafischen Visualisierungen kann verdeutlicht werden, dass sich die Abweichungen nach oben und unten ausgleichen, so auch an der gegebenen Aufgabe.



Auch die Modellierung mit direkter Anwendung der Formel führt zum Ziel: (3,7 + 4,6 + 4,8 + 5,2 + 5,3 + x) : 6 = 4,9 (vgl. oben erstgenanntes Lösungsverfahren). Die Strategien „Rückwärtsrechnen“ und „Umkehren des Rechenverfahrens“ sollten bewusst gemacht werden.
Beim systematischen Probieren sollte insbesondere auf eine nachvollziehbare Argumentation geachtet werden. Wenn durch ein Ausschlussverfahren zunächst die Anzahl der möglichen Lösungen so eingeschränkt wird, dass ein Probieren mit wenigen Schritten zum Erfolg führt, ist damit eine wichtige Lösungsstrategie erfasst. Im Unterricht kann hier auch eine Tabellenkalkulation eingesetzt werden.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe bearbeitet haben, können ihr Vorgehen erläutern und mit anderen vergleichen oder ein weiteres Lösungsverfahren finden.

Preisänderungen im Mobilfunk



In dem Diagramm wird dargestellt, wie sich die Preise für Mobilfunk im Vergleich zum Vorjahr prozentual geändert haben. Zum Beispiel sind 2002 die Preise im Vergleich zu 2001 um 8,6 % angestiegen, während 2006 die Preise im Vergleich zu 2005 um 10,7 % gefallen sind.

20.1: Frau Neukirchen hatte im Jahr 2000 Mobilfunkkosten von 720 Euro. Was hätte sie nach den Angaben der Grafik für diese Rechnung in den Jahren 2001 und 2002 bezahlt?

20.2:
Um wie viel Prozent sind die Preise von 2002 gegenüber den Preisen von 2000 gestiegen?
Kreuze an.

- ☐ ca. 3,9 %
- ☐ ca. 4,3 %
- ☐ ca. 8,6 %
- ☐ ca. 12,9 %

20.3:
Marvin behauptet: „2004 waren die Preise genauso hoch wie 2002."
Julia sagt: „Nein, sie waren niedriger."
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

Lösung

20.1:
2001: 689,04 Euro
2002: 748,30 Euro

20.2:
ca. 3,9 %

20.3:
Antwort: „Julia hat recht
und
nachvollziehbare Begründung.

Die Begründung muss explizit oder implizit beinhalten, dass der Grundwert zu Beginn des Jahres 2003 (vor der Preiserhöhung um 1,1 %) niedriger ist als im Jahre 2004 (vor der Preissenkung um 1,1 %).
Z.B.:
Julia hat recht, denn: Nach der Preiserhöhung 2003 liegt bei der Preissenkung um 1,1% in 2004 ein höherer Grundwert vor als im Jahre 2002 vor der Preiserhöhung um 1,1%. Es wird also mehr gesenkt als vorher angehoben. Demnach waren die Preise in 2004 niedriger als im Jahre 2002.
Oder:
Julia hat recht, denn $1 \cdot 1{,}01 \cdot 0{,}989 = 0{,}99889$.
Oder:
Auch die Berechnung eines Beispiels wird als richtig gewertet, z.B.:
Ich nehme an, dass Frau Neukirchen im Jahre 2002 eine Rechnung in Höhe von 100 € bezahlen musste. Dann betrug der Rechnungsbetrag 101 € (100 € · 1,01) im Jahr 2003 und 99,89 € (101 € · 0,989) im Jahr 2004. Demnach war der Rechnungsbetrag im Jahr 2004 geringer als im Jahr 2002.

Aufgabe 20

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee		**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	20.1 20.2 20.3	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
	20.3	zusätzlich: **Mathematisch argumentieren (K1)**
Anforderungsbereich		**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das Lösen dieser Aufgaben fordert, Text und Grafik Sinn erfassend gemäß der Fragestellungen zu lesen und die relevanten Angaben zu entnehmen (L5, K6). Die Auswertung der gegebenen realen Situation verlangt einen Modellierungsprozess mit Text und Grafik. Im Ergebnis werden die Prozentsätze und die zugehörigen Grundwerte sowie die erforderliche Rechenvorschrift erkannt (K3, K4). Beim Rechnen liegt eine besondere Schwierigkeit im Wechsel zwischen Verminderung und Erhöhung auf der Grundlage der gegebenen Prozentsätze (K5). Äußerungen zu mathematischen Inhalten sind bei Aufgabe 20.3 begründet zu bewerten (K1).

Häufig ist als **Fehler** zu erwarten, dass der für ein bestimmtes Jahr berechnete Betrag nicht als neuer Grundwert gedeutet wird. (Bei Aufgabe 20.1 ist es das Jahr 2001). Dieser Fehler zeigt sich bei Aufgabe 20.2 dann daran, dass das zweite Lösungskästchen angekreuzt wurde. Sind „ca. 8,6%" als Lösung angegeben, ist der Preisvergleich zum falschen Jahr, nämlich zu 2001, hergestellt worden. Beim Ankreuzen des letzten Lösungskästchens wurden die Beträge bezüglich der Veränderung addiert. Dabei bleibt unberücksichtigt, dass es sich zuerst um eine Verminderung und anschießend um eine Erhöhung des Prozentsatzes handelt.
Bei Aufgabe 20.3 ist wahrscheinlich häufig zu erwarten, dass die Argumentationskette nicht schlüssig ist.

Wenn Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen im nachfolgenden Unterricht beschreiben, kann die **Diagnose** bei den Aufgaben 20.1 und 20.2 mit größerer Sicherheit erfolgen. Bei Aufgabe 20.3 sollte die vorgenommene Argumentation zusätzlich erläutert werden.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben nicht gelöst haben, können zunächst anhand von weniger komplexen Diagrammen, Grafiken und Schaubildern im Unterricht das Entnehmen von Informationen üben. Dabei ist auch darauf zu achten, dass die Darstellungen klar, übersichtlich und somit gut lesbar sind. Sind darüber hinaus Schwierigkeiten im Bereich der Berechnung der jeweiligen Prozentwerte (vgl. oben) aufgetreten, ist besonderer Wert darauf zu legen, dass der jeweilige Grundwert, auf den sich die Aussage bezieht, von den betreffenden Schülerinnen und Schülern identifiziert werden kann. Wird dann zuerst mit „einfachen“ Prozentsätzen gerechnet, kann verstärkt am inhaltlichen Verständnis gearbeitet werden.
Um bei Aufgabe 20.3 ein tiefgehendes Verständnis des vorliegenden Sachverhaltes zu erreichen, sollte unter Rückgriff auf einfaches Zahlenmaterial das Argumentieren in den Vordergrund gestellt werden. Dabei spielt der hier vorgegebene Fall, nämlich die Erhöhung und Verringerung um denselben Prozentsatz, neben zahlreichen anderen Beispielen eine besondere Rolle.

Schülerinnen und Schüler, die bei den Aufgaben 20.1 und 20.2 keine Schwierigkeiten hatten, können den Sachverhalt in einer Excel-Tabelle darstellen und anschließend geeignete Grafiken als Übungsmaterial für die Mitschülerinnen und Mitschüler erstellen.
Schülerinnen und Schüler, die bei Aufgabe 20.3 keine Schwierigkeiten hatten, können als Lernpartner für Mitschülerinnen und Mitschüler zur Verfügung stehen, um auf der Basis der Sprache unter Gleichaltrigen und unter Rückgriff auf selbst gewählte Beispiele die eigene Erkenntnis anschaulich zu kommunizieren.

Aufgabe 21

Grüngelber Würfel
Jede der sechs Flächen eines Würfels ist entweder gelb oder grün angestrichen. Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, dass gelb oben liegt.

Kreuze an, wie viele Flächen grün sind.

- ☐ eine
- ☐ zwei
- ☐ drei
- ☐ vier
- ☐ fünf

Lösung

vier Flächen

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das einfache Würfeln ist als übliches Zufallsexperiment den Schülerinnen und Schülern auch aus dem Alltag vertraut. Sie müssen eine Grundvorstellung von der Angabe einer Wahrscheinlichkeit haben, um die gegebene Zahl $\frac{1}{3}\left(=\frac{2}{6}\right)$ richtig zu deuten (L5, K5). Die Frage ist allerdings auf das komplementäre Ereignis gerichtet. Dies erfordert ein zweischrittiges Vorgehen (AB II). Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Strategien, um das gegebene Problem zu bearbeiten (K2).

Der wahrscheinlich am häufigsten zu erwartende **Fehler** („zwei“) kann darauf zurückgeführt werden, dass die betreffenden Schülerinnen und Schüler die vorgegebene Wahrscheinlichkeit zwar richtig interpretiert (der Würfel hat zwei gelbe Felder), aber in der Fragestellung gelb mit grün verwechselt haben

Aufgabe 21

(„Lesefehler“) oder einfach unkonzentriert antworten, ohne bis zum Ende überlegt zu haben. Dabei könnten sie durchaus in der Lage sein, komplementäre Ereignisse zu berechnen.
Eine andere Möglichkeit, die zum Fehler „zwei“ führt, ist, dass die Wahrscheinlichkeit für grün richtig mit $\frac{2}{3}$ bestimmt wird, dann aber der Zähler („günstige Fälle“) übernommen wird, ohne den Bruch entsprechend zu erweitern.
Die anderen Distraktoren lassen auf eine grundlegende Fehlvorstellung zum Begriff Wahrscheinlichkeit oder willkürliches Auswählen schließen.

Für eine detaillierte **Diagnose** ist ein Gespräch im nachfolgenden Unterricht geeignet.

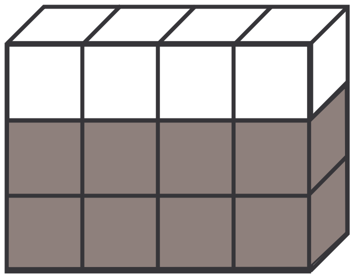
Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst einfache Würfelexperimente durchführen, um von relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeiten zu abstrahieren. Dann kann die Formel für die Wahrscheinlichkeit („günstige“ zu „mögliche“ Fälle) besprochen und nachvollzogen und dabei auf Komplementärereignisse eingegangen werden. Um an das Grundverständnis mit Brüchen anzuknüpfen, kann etwa die Aufgabe „Färbe $\frac{1}{3}$ der Felder“ in folgenden Bildern den Schritt zum Würfel über Würfelnetze nahe bringen:

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können zu gegebenen Wahrscheinlichkeiten weitere Simulationen angeben (auch mit anderen Zufallsexperimenten). Beispielsweise kann die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ simuliert werden durch Drehen eines passend eingefärbten Glücksrades, durch Würfeln mit einem Tetraeder oder Oktaeder, durch Ziehen von Karten aus einem Kartenspiel (vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo oder 4 Symbole), durch Ziehen von Kugeln aus einer passend gemischten „Urne“, durch zweifachen Münzwurf.

Um zusätzlich die Raumanschauung zu schulen, können aus Würfeln oder Quadern zusammengesetzte Körper benutzt werden, bei denen der Anteil gefärbter Flächen zu ermitteln ist (innen liegende Flächen bleiben ungefärbt).

Beispiel:
Der nebenstehende Körper wird mit den unteren beiden Dritteln in graue Farbe getaucht. Dann werden alle Teilwürfel voneinander getrennt und in eine Schale gelegt.
Ohne Hinzusehen wird ein Teilwürfel gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat dieser Teilwürfel keine / eine / zwei / drei / vier / fünf / sechs graue Seiten? Die innen liegenden „Klebeflächen“ bleiben dabei ungefärbt.



Eine weitere Aufgabenstellung findet sich in /2/, S. 21, Aufgabe 4.

Aufgabe 22

Der sechste Wurf

Ein normaler Spielwürfel wird geworfen. In fünf aufeinander folgenden Würfen landet der Würfel jedes Mal so, dass eine gerade Zahl angezeigt wird. Nun wird der Würfel ein sechstes Mal geworfen. Welche der folgenden Aussagen trifft dann zu?

Kreuze an.

- ☐ Es ist wahrscheinlicher, dass der Würfel eine gerade Zahl zeigt, als dass er eine ungerade Zahl zeigt.
- ☐ Es ist wahrscheinlicher, dass der Würfel eine ungerade Zahl zeigt, als dass er eine gerade Zahl zeigt.
- ☐ Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.
- ☐ Der Würfel zeigt mit Sicherheit eine ungerade Zahl.

Lösung

Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In der Aufgabe muss die Unabhängigkeit von Ereignissen in einem mehrstufigen Zufallsexperiment erkannt und angewendet werden (L5). Dies muss – in Abhängigkeit vom betreffenden Bundesland - noch nicht Thema im Unterricht bis zur Jahrgangsstufe 8 gewesen sein. Dementsprechend muss bei den Schülerinnen und Schülern aus den ersten Erfahrungen im Unterricht und im Alltag ein Verständnis von Wahrscheinlichkeit angebahnt und ein Gespür für die Unabhängigkeit von Ereignissen entwickelt worden sein.

Die Falschantworten folgen einer weit verbreiteten Fehlvorstellung bzgl. bedingter Wahrscheinlichkeiten und der Abhängigkeit von Ereignissen. Das Erfassen der Aufgabenstellung erfordert genaues Lesen und ein gutes Textverständnis (K6). Das Zufallsexperiment „Einmal Würfeln“ kennen die Schülerinnen und Schüler aus dem Alltag und die Gleichwahrscheinlichkeit der sechs möglichen Ergebnisse ist im Allgemeinen geläufig. In dieser Aufgabe müssen sie die Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse „gerade Augenzahl“ und „ungerade Augenzahl“ begreifen. Die sechsmalige Hintereinanderausführung dieses Zufallsexperiments erfordert eine für die meisten Schülerinnen und Schüler ungewohnte Modellierung (K3), bei der das gegenseitige Nicht-Beeinflussen der einzelnen Würfe (Unabhängigkeit) erkannt werden muss (AB II).

Fehler können, wie oben bereits erwähnt, bei der Erkennung und Berücksichtigung der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe auftreten und zu falscher Wahl aus den möglichen Antworten führen. Hier helfen einerseits Veranschaulichungen (wie: „Der Würfel hat kein Gedächtnis“) und vor allem das Durchführen konkreter Zufallsexperimente. Bei Schülerinnen und Schülern, die im Unterricht noch keine Wahrscheinlichkeiten bestimmt haben, können bereits Probleme bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „gerade Augenzahl“ auftreten.

Eine **Diagnose** anhand der Antworten ist kaum möglich, da verschiedene Fehlerquellen zu denselben Falschantworten führen können. Erst eine Diskussion in der Klasse oder schriftliche Begründungen der Antworten können die eventuellen Fehlvorstellungen veranschaulichen.

Anregungen für den Unterricht

In dieser Alterstufe ist ein handelndes Vorgehen, d.h. das Durchführen bzw. die Simulation von Zufallsexperimenten, empfehlenswert. Dabei ist es günstig, die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen oder in Tandems arbeiten und die Ergebnisse anschließend zusammentragen zu lassen. Eine mögliche Aufgabenstellung könnte sein:
Führt das Zufallsexperiment ‚Dreimal hintereinander Würfeln’ 50-mal durch und protokolliert die Ergebnisse.
Wertet diese nach folgenden Gesichtspunkten aus:

- Gesamtanzahl der geworfenen Einser,
- Gesamtanzahl der geraden Augenzahlen,
- Auswahl der Tripel, bei denen die ersten beiden Würfe gerade Augenzahlen ergeben haben, und Bestimmung der Anzahl der geraden Augenzahlen beim dritten Wurf (K6, AB III).

Eine Auswertung über alle Ergebnisse der Gruppen bringt im Allgemeinen gute Näherungswerte für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Zudem wird den Schülerinnen und Schülern durch das eigene Erleben die Struktur des untersuchten Zufallsexperiments bewusster.
Statt Würfeln bieten sich auch andere einfach durchzuführende Zufallsexperimente an wie der Münzwurf.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** bieten sich die folgenden Aufgaben an:
„Die Wahrscheinlichkeit von Augensummen“ (Vgl. /1/, S. 69.) und
Aufgabe 21 „Grüngelber Würfel“.

Um aufzuzeigen, dass die verschiedenen Stufen nicht bei allen mehrstufigen Zufallsexperimenten unabhängig voneinander sind, ist es lehrreich, ein entsprechendes Beispiel durchzuspielen. Eine Möglichkeit wäre z.B. eine Urne mit zwei schwarzen und einer weißen Kugel, aus der zweimal ohne Zurücklegen gezogen wird. Dabei ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse beim zweiten Ziehen deutlich in Abhängigkeit vom ersten Ziehen.

Aufgabe 23

Schrauben

In einer Firma, in der Schrauben hergestellt werden, wird am Ende des Produktionsprozesses eine Endkontrolle durchgeführt. Eine überprüfte Kiste enthält 10000 Schrauben. Aus dieser Kiste werden zufällig 200 Schrauben ausgewählt und überprüft. 10 dieser Schrauben lagen außerhalb der Norm.

Wie viele Schrauben, die nicht der Norm entsprechen, sind ungefähr in der ganzen Kiste enthalten?

Kreuze an.

- ☐ 20
- ☐ 50
- ☐ 200
- ☐ 500
- ☐ 2000

Aufgabe 23

Lösung

500

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst den Text der Aufgabe verstehend lesen (K6). Es wird hier ein Vorgang beschrieben, dessen Ausgang zufällig ist (Zusammensetzung der Stichprobe zur Bestimmung der Anzahl der nicht normgerechten Schrauben). Daher müssen die Schülerinnen und Schüler eine Modellierung (K3) vornehmen, die im Rahmen der Aufgabenstellung eine bestmögliche Prognose für die Zusammensetzung der Gesamtheit (Anzahl der nicht normgerechten Schrauben in der Kiste) zulässt. Die Bestimmung des Ergebnisses (K5) kann über unterschiedliche Ansätze erfolgen:

- über Dreisatz / Proportionalität (Unter 200 Schrauben sind 10 nicht normgerecht, unter 10000 = 50 · 200 können es 50 · 10 = 500 sein.)
- über die Verwendung der relativen Häufigkeit in der Stichprobe als Schätzung für die der Gesamtheit ($\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$ von 10000 sind 500).

Die Mehrschrittigkeit der vorzunehmenden Überlegungen begründet die Zuordnung zu AB II.

Fehler weisen neben der nicht sachgerechten Zuordnung der Größen häufig darauf hin, dass es nicht gelungen ist, ein geeignetes Modell zu entwickeln (z.B. 200 : 10 = 20; 10000 : 200 = 50).

Aus der richtigen Angabe des Ergebnisses kann nicht entschieden werden, in welchem Umfang stochastisches Denken (im Sinne von Entscheidungsfindung unter Unsicherheit) bei den Schülerinnen und Schülern entwickelt ist. Hier ist neben der **Diagnose** zu den genannten Fehlern auch die Beachtung stochastischen Denkens bei einzufordernden Beschreibungen des Vorgehens nötig.

Anregungen für den Unterricht

Bei einer Besprechung bzw. Aufarbeitung dieser Aufgabe sollte deutlich werden, dass der Wert von 500 nicht normgerechten Schrauben in diesem Aufgabenkontext eine recht gute Vorhersage für einen Näherungswert ist, in dessen Nähe der wirkliche Wert liegt. Im Extremfall sind aber alle Werte zwischen 10 (alle nicht normgerechten Schrauben in der Stichprobe) und 9810 (alle normgerechten Schrauben in der Stichprobe) möglich. Es muss an dieser Stelle deutlich werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 500 nicht normgerechte Schrauben in der Kiste sind, verglichen mit allen anderen Anzahlen recht gering ist. Mit Simulationen und grafischen Darstellungen (siehe unten) kann man der Gefahr begegnen, dass die reine Berechnung (z.B. über Dreisatz) die Unsicherheit des Ergebnisses nicht berücksichtigt.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es sinnvoll, Vereinfachungen vorzunehmen. Die Wahl eines einfachen Modells (Urne mit Kugeln in zwei Farben) und die Reduzierung der Anzahlen ermöglichen das mehrfache Nachvollziehen der Stichprobenentnahme in einer realen Situation.

Beispiel:
Zusammensetzung A: Urne mit 50 roten und 50 blauen Kugeln.
Zusammensetzung B: Urne mit 45 roten und 55 blauen Kugeln.
Zusammensetzung C: Urne mit 80 roten und 20 blauen Kugeln.
Es werden 20 Stichproben zu je 10 Kugeln entnommen (mit Zurücklegen jeweils nach der Entnahme von 10 Kugeln).

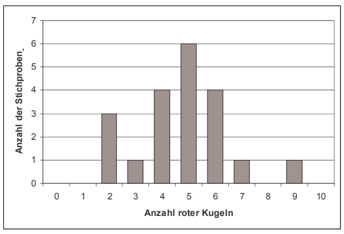
Beispielergebnisse einer Durchführung:

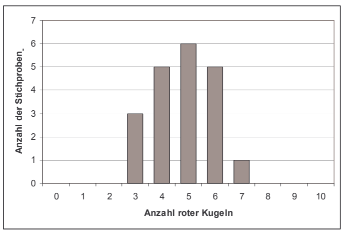
Anzahl k der roten Kugeln je Stichprobe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Stichproben mit k roten Kugeln bei Ziehung aus A	0	0	3	1	4	6	4	1	0	1	0
Anzahl der Stichproben mit k roten Kugeln bei Ziehung aus B	0	0	0	3	5	6	5	1	0	0	0
Anzahl der Stichproben mit k roten Kugeln bei Ziehung aus C	0	0	0	0	0	1	2	4	8	3	2

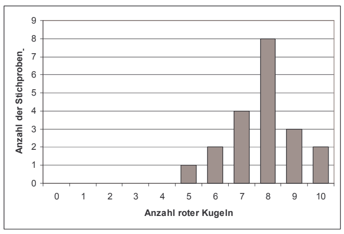
An den Ergebnissen erkennt man, dass

- bei der Zusammensetzung A eine Stichprobe 5 rote Kugeln enthalten kann (bei 10 Ziehungen sind 5 Kugeln rot entsprechen dem Verhältnis roter und blauer Kugeln in der Zusammensetzung A), aber auch eine andere Anzahl roter Kugeln sind möglich,
- umgekehrt aus einer Stichprobe mit 5 roten Kugeln keinesfalls mit Sicherheit darauf geschlossen werden kann, dass in der Zusammensetzung 50 % der Kugeln rot sind,
- dennoch aufgrund der Stichprobe eine, wenn auch mit Unsicherheit behaftete, Schätzung möglich ist.

Für viele Schülerinnen und Schüler sind entsprechende grafische Darstellungen einsichtiger:







Der Einsatz rechnergestützter Simulationen bietet einerseits die Möglichkeit, die Unsicherheit der Vorhersage weiter zu verdeutlichen. Andererseits kann hierbei sowohl die Gesamtanzahl als auch die Anzahl der Stichproben erhöht werden, wobei die Idee der sachgerechten Prognose veranschaulicht wird.

Auch für viele **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben,** stellen obige Betrachtungen eine angebrachte Vertiefung dar. Genauere Untersuchungen des Einflusses einer größeren Gesamtheit, auch bezüglich der Stichprobenentnahme (Ziehen mit / ohne Zurücklegen), bieten sich als weiteres Angebot genauso an wie andere, komplexere Aufgaben (z.B. in /1/, S. 69 ff).

Aufgabe 24

Temperatur

In dieser Tabelle stehen Temperaturangaben , die jeweils zu festen Uhrzeiten gemessen wurden.

Temperaturen in Grad Celsius						
	6 Uhr	**9 Uhr**	**12 Uhr**	**15 Uhr**	**18 Uhr**	**21 Uhr**
Montag	13,5°	17,0°	21,5°	22,5°	21,0°	17,5°
Dienstag	14,0°	19,0°	25,0°	27,0°	25,5°	20,5°
Mittwoch	15,5°	19,5°	25,5°	28,0°	26,0°	19,5°
Donnerstag	14,5°	15,5°	19,0°	19,5°	16,0°	13,5°

24.1: Wann wurde die niedrigste Temperatur gemessen? Kreuze **alle** richtigen Antworten an.

- ☐ Donnerstag um 9 Uhr
- ☐ Montag um 6 Uhr
- ☐ Mittwoch um 15 Uhr
- ☐ Donnerstag um 21 Uhr
- ☐ Dienstag um 6 Uhr

24.2: Welcher Tag war der wärmste? Begründe deine Entscheidung mit den Temperaturangaben aus der Tabelle.

Lösung

24.1: Montag um 6 Uhr und Donnerstag um 21 Uhr

24.2: Antwort „Mittwoch“ mit angemessener Begründung

- Die Durchschnittstemperatur war am Mittwoch am höchsten. (wobei hier das arithmetische Mittel jeden Tages berechnet werden muss oder in einer korrekten Form argumentiert werden muss, dass die Durchschnittstemperatur am Mittwoch am höchsten war – Durchschnittstemperaturen: Mo 18,83 °C… Di 21,83 °C…
Mi 22,3 °C… Do 16,3 °C…)

Aufgabe 24

- Am Mittwoch war es tagsüber bei jeder Messung am wärmsten. Nur abends war es am Dienstag wärmer.
- Am Mittwoch wurde die höchste Temperatur gemessen.

Antwort „Dienstag“ mit angemessener Begründung

- Dienstag ist der einzige Tag, an dem die Temperatur zu vier Messzeitpunkten über 20 °C betrug.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee		**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	24.1	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4**
	24.2	**Mathematisch argumentieren (K1)** **Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen** **Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	24.1	**AB I**
	24.2	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Aus einer Tabelle entnehmen die Schülerinnen und Schüler, wann die niedrigste Temperatur gemessen wurde. Dabei haben sie die Uhrzeiten und den Wochentag zu beachten (L5, K4). Das Herausfinden der niedrigsten Temperatur bei Teilaufgabe 1 wird den Schülerinnen und Schülern kaum Probleme bereiten (AB I). Ihre Suchstrategie könnte durch eigene Alltagserfahrungen auf die Spalte mit der frühesten bzw. spätesten Uhrzeit gerichtet sein und sie so schnell zum Ergebnis führen.

Häufig auftretender **Fehler** wird vermutlich sein, dass die Schülerinnen und Schüler nur eine Antwort ankreuzen.
Bei Teilaufgabe 2 ist zur Begründung der Schülerentscheidung eine Argumentation zu entwickeln (K1). Diese anspruchsvolle Aufgabe führt zu zwei verschiedenen Lösungen. Auch die Begründungen für die Lösungen können verschieden erfolgen. Der Lösungsweg ist nicht offensichtlich, so dass eine Strategie zur Findung der Lösungsidee entwickelt werden muss (K2, AB II). Für die Schülerinnen und Schüler stellt sich zunächst das Problem, woran man erkennt, dass ein Tag der wärmste ist. Sie überlegen mit welchen mathematischen Mitteln sie dieses Problem lösen können (K3). Möglichkeiten bieten sich an über

- das Berechnen des Mittelwertes der Temperaturen (K5) der einzelnen Tage und die Bestimmung des Tages mit dem höchsten Mittelwert oder
- den Vergleich der gemessenen Tagestemperaturen und das Identifizieren des Tages, an dem die höchsten Temperaturen gemessen wurden.

Häufiger **Fehler** wird sein, dass die Argumentation der Schülerinnen und Schüler nicht schlüssig ist.

Anregungen für den Unterricht

Eine Vertiefung für **Schülerinnen und Schüler, die bei der Lösung der** Teilaufgabe 1 **Schwierigkeiten hatten,** ist vielfältig denkbar durch Aufgaben, wie:

- Wann wurde die höchste Temperatur gemessen?
- Zu welcher Uhrzeit wurde am Donnerstag die niedrigste Temperatur gemessen?
- Berechne den Mittelwert der Temperaturen am Montag.
- Berechne den Mittelwert der Temperaturen an den ausgewählten Tagen um 18.00 Uhr.

Da das Problem bei Teilaufgabe 2 sehr wahrscheinlich beim Finden der Lösungsidee und beim Formulieren der Begründung liegen wird, sollten im Unterricht häufiger verschiedene Lösungswege und Lösungen, ggf. mit zugehörigen Argumentationen, diskutiert werden.
Für Schülerinnen und Schüler, könnte die gegebene Aufgabe wie folgt vereinfacht werden:

- Warum ist Mittwoch der wärmste Tag? Begründe.
- Finde eine Erklärung dafür, dass Dienstag der wärmste Tag ist.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben gelöst haben, können aufgefordert werden, die Tabellenwerte in einem geeigneten Diagramm darzustellen und die Fragen der gegebenen Aufgabe mit Hilfe des Diagramms zu beantworten. Ein Vergleich der Aussagekraft von Tabelle und Diagramm bietet sich in diesem Zusammenhang an.
Fächerübergreifend können sich die Schülerinnen und Schüler auch über Unterschiede bei der Berechnung von Tagesmitteltemperaturen informieren und verschiedene Modelle vergleichen.

Aufgabe 25

Internetnutzung
56% der Internetnutzer sind täglich oder fast täglich online.

Die Nutzung des Internets hat in Deutschland weiter zugenommen. Fast zwei Drittel der Personen ab zehn Jahren (65 %) nutzten im ersten Quartal 2006 das Internet. Dies geht aus der aktuellen Auswertung der Befragung privater Haushalte zur Nutzung von Informations- und Kommunikationstechnologien hervor. […] Innerhalb der Gruppe der Internetnutzer ging im ersten Quartal 2006 mehr als die Hälfte (56 %) täglich oder fast täglich online, ein Jahr zuvor waren es noch 50 % der Internetnutzer.

(Statistisches Bundesamt Deutschland)

Welcher Prozentsatz der Personen ab 10 Jahren ging damit im ersten Quartal 2006 täglich oder fast täglich online?
Kreuze an, welcher Wert deinem Ergebnis am nächsten liegt.

- ☐ 36 %
- ☐ 56 %
- ☐ 65 %
- ☐ 86 %
- ☐ 121 %

Lösung

36 %

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Der anspruchsvolle Aufgabentext beschreibt eine Datenerhebung zur Internetnutzung und stellt Ergebnisse für das erste Quartal 2006 dar (L5). Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, die im Text enthaltenen Informationen zu erfassen und in einen neuen Zusammenhang zu bringen (K3). Der Aufgabentext enthält mehr Informationen als zum Finden der Lösung notwendig sind, insofern müssen die Schülerinnen und Schüler eine Auswahl treffen (K6). Sie wenden ein Lösungsverfahren an, um einen Anteil von einem Anteil zu berechnen (K5). Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert mehrere Schritte (AB II).

Fehler können in der Auseinandersetzung mit dem Aufgabentext liegen (unübersichtlich, viele Informationen mit teilweisen Dopplungen). Dies kann zur Entnahme fehlerhafter oder nicht ausreichender Informationen führen. Lösungsantworten wie 56 % oder 65 % lassen erkennen, dass die Notwendigkeit des Verknüpfens von Prozentangaben nicht erkannt wurde. Die ebenfalls falschen Antwortmöglichkeiten 86 % bzw. 121 % geben einen Hinweis darauf, dass eine Verknüpfung erkannt wurde, aber am Zusammenhang vorbei vorgenommen wurde. In der Phase der Auswertung zu dieser Aufgabe sollte den Schülerinnen und Schülern ausreichend Raum zur Darstellung und Begründung ihrer Lösungsschritte und der von ihnen getroffenen Auswahl gegeben werden. Dabei ist Wert darauf zu legen, dass sich Schülerinnen und Schüler immer bewusst sind, welches der in der jeweiligen Situation zutreffende Grundwert ist.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten den Aufgabentext gründlich und mehrmalig lesen. Zu empfehlen ist das Vermitteln und Einüben hilfreicher Techniken, wie Unterstreichen, Herausschreiben oder neu Anordnen. Eine aktive Auseinandersetzung mit dem Text kann auch durch strukturierte Kommunikation in der Lerngruppe befördert werden. Die Schüler sollten Möglichkeiten bekommen, ihre Version des Textverständnisses zu präsentieren und auf Darstellungen von Mitschülern einzugehen (K6). Hilfreich kann auch die Diskussion über das Zustandekommen falscher Antworten sein (z.B. Antwortmöglichkeit 121 %).
Auf zahlreichen Verpackungen von Lebensmitteln findet man Angaben zu Inhaltsstoffen und deren prozentualen Anteilen in diesen Lebensmitteln. Solche Informationen lassen sich für weitere Aufgaben zu Anteilen von Anteilen auswerten und nutzen.

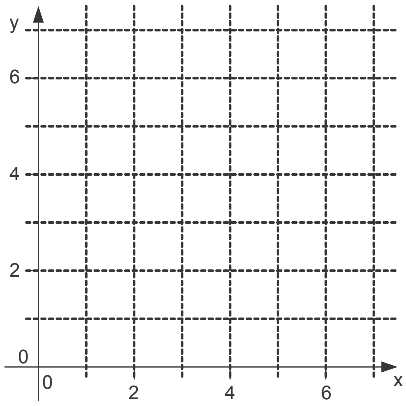
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können die Ausführungen zur Internetnutzung in Beziehung zum konkreten Nutzungsverhalten der Schülerinnen und Schüler einer bestimmten Lerngruppe setzen und entsprechende Vergleiche anstellen. Es bieten sich so Möglichkeiten zur grafischen Darstellung oder zur weiteren vertiefenden Recherche der Internetnutzung anderer Alters- oder Personengruppen.
Bei entsprechenden unterrichtlichen Voraussetzungen können die Informationen im Aufgabentext in einem Baumdiagramm dargestellt werden und bieten damit Anlass mit Hilfe der Pfadregeln weitere Betrachtungen und Variationen zur Aufgabe vorzunehmen. Darüber hinaus können zum Thema „Anteile von Anteilen“ durch Schülerinnen und Schüler selbstständig Aufgaben formuliert werden.

Aufgabe 26

Koordinatensystem

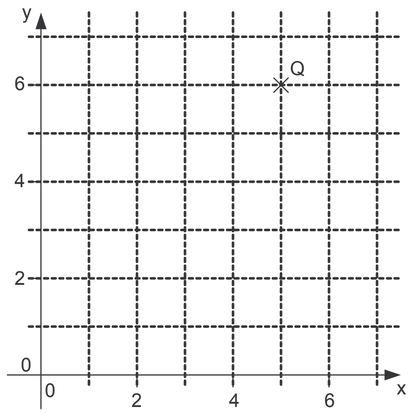
26.1

Zeichne den Punkt P (2 | 3) in das Koordinatensystem ein .



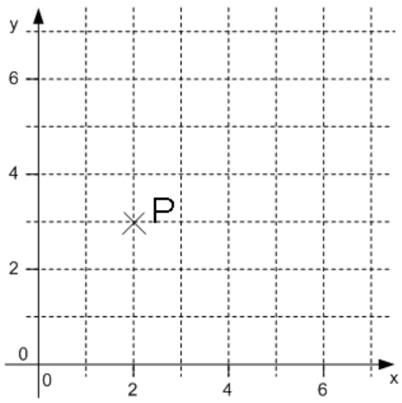
26.2

Trage die Koordinaten des Punktes Q ein . **Q (|)**



Lösung

26.1



26.2

Q (5 | 6)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

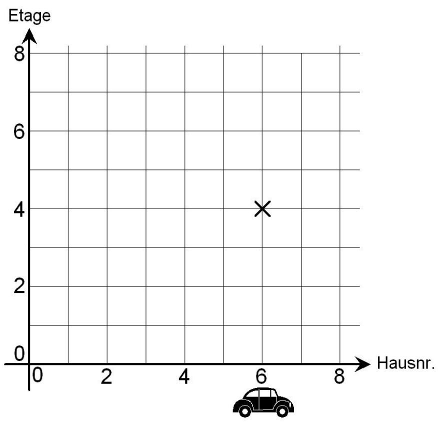
Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das Arbeiten im ersten Quadranten (Gitternetz, Quadratgitter) eines Koordinatensystems ist geübt und insofern vertraut (L3, K4, AB I).

Das Lösen beider Aufgaben verlangt Grundvorstellungen über die Darstellung der Lage von Punkten in der Ebene durch Koordinaten (Datenpaare) und die konsequente Beachtung und Einhaltung der zugehörigen Konventionen: Durch den Punkt werden Parallelen zu den Achsen gezogen (evtl. gedanklich) und deren Schnittpunkte mit den Achsen als Werte auf zwei Zahlenstrahlen gedeutet. Zuerst wird der x – Wert eines Punktes berücksichtigt, danach der y – Wert. Weitere **Fehler** entstehen bei vorhandenem Grundverständnis vermutlich meist durch Konzentrationsprobleme. Falsches Abzählen, auch bedingt durch die Tatsache, dass die Achsenbeschriftung jeweils in Zweierintervallen vorgegeben ist, kann eine Rolle spielen.

Anregungen für den Unterricht

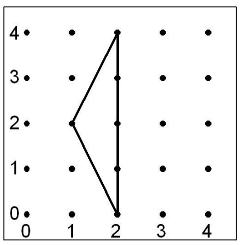
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, haben möglicherweise die Grundidee eines Koordinatensystems nicht verstanden oder die oben benannte Konvention (x ; y) nicht eingehalten. Dem sollte beispielsweise durch das Arbeiten im inhaltlichen Kontext „Paketboten-Modell" („Pizzaservice-Modell") begegnet werden.



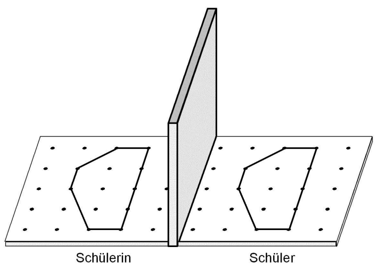
Familie Müller wohnt in der Lindenstraße 6 in der vierten Etage. Paketbote Jan soll dort ein Paket zustellen.
Er fährt erst vom Postamt (0,0) zum Haus mit der Nummer 6 (nach rechts). Dann begibt er sich in die vierte Etage (nach oben). Die Umkehrung dieser Handlungsabfolge ist für alle Lernenden einleuchtend sinnlos.

Sehr wichtig und das Verständnis klärend, sind dabei Interpretationen von Punkten auf den Achsen. Innerhalb des Modells wird dann sehr deutlich, dass auch diese Punkte einen x- <u>und</u> einen y-Wert benötigen, sollen sie präzise geortet werden können.
Zu empfehlen sind weiterhin für alle Schülerinnen und Schüler „Punkt-Diktate". Die von der Lehrkraft genannten Koordinaten benennen Punkte (Nägel) am Geo-Brett. Die umspannten Figuren lassen sich zur schnellen Ergebniskontrolle exakt beschreiben (z.B. „ein gleichschenkliges Dreieck steht auf einer Ecke"). Diese Übung lässt sich dann in der Partnerarbeit (s. Abb.) sinnvoll fortsetzen.

Lehrerdiktat

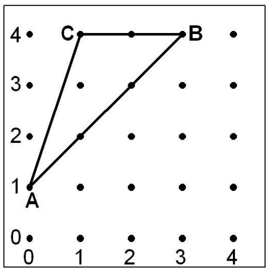


Partnerdiktat in Abwechslung



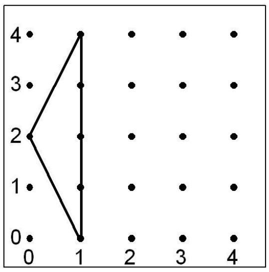
Aufgabe 26

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können durch Aufgabenstellungen wie die folgenden gefördert werden:



Karin sollte ein Dreieck mit den Punkten A (1|0), B (4|3) und C (4|1) aufspannen.

- Was hat sie falsch gemacht?
- Spanne du nun das Dreieck richtig auf.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem von Karin. Welche geometrische Beziehung besteht zwischen beiden Spannbildern?
- Kann man dies verallgemeinern? (AB III)



Um welche Nägel muss das Gummiband zusätzlich gespannt werden, damit

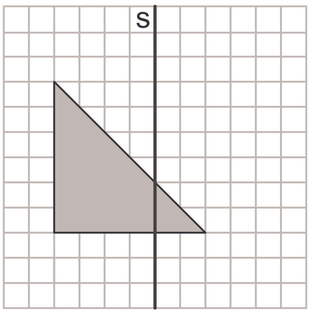
- eine Raute
- ein Drachenviereck
- ein rechtwinkliges Trapez
- ein symmetrisches (gleichschenkliges) Trapez

entsteht?
Nenne jeweils die Koordinaten der zusätzlichen Punkte. (AB II)

Aufgabe 26

Aufgabe 27

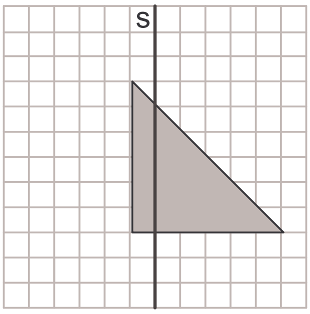
Spiegelung

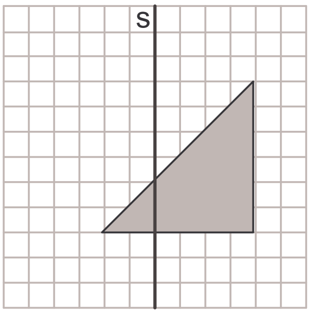


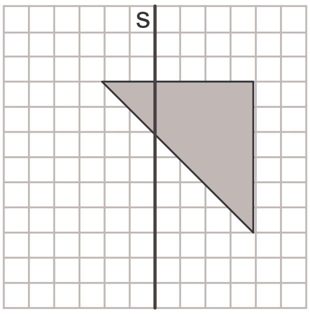
Das graue Dreieck wird an der Achse s gespiegelt.

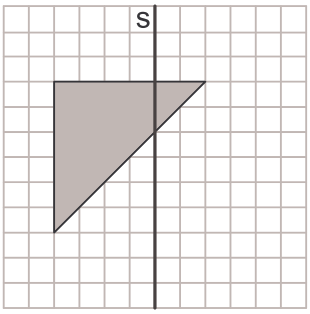
Welche der Figuren stellt das Ergebnis der Spiegelung dar?

Kreuze an.









Lösung

Nur das 2. Kästchen (rechts oben) wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das von einer Achse geschnittene Dreieck soll an dieser gespiegelt werden (L3, K4). Zur Lösung gelangen die Schülerinnen und Schüler, indem sie ihre (intuitiven) Vorstellungen von einer Spiegelung auf das Original und die (als möglich) gegebenen Bilder anwenden. D.h. sie untersuchen, ob das Bild „seitenverkehrt" zum Original ist oder sie wenden ihre Kenntnisse über die Spiegelung an, indem sie prüfen, ob die entsprechenden Original- und Bildpunkte, z.B. die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke, jeweils den gleichen Abstand zu s haben, auf verschiedenen Seiten von s liegen und ihre Verbindungsgerade senkrecht zu s ist. Sie können auch ein gleichschenkliges Dreieck benutzen und versuchen, durch Spiegeln an einer Geraden wie s eines von den Antwortangeboten zu erhalten. Mit der Aufgabe wird ein bekannter Sachverhalt bearbeitet (AB I).

Fehler können entstehen, wenn die Schülerinnen und Schüler die Achsenspiegelung mit einer Drehung (und Verschiebung) wie bei der 3. und 4. Antwort bzw. mit einer Verschiebung wie bei der 1. Antwort verwechseln. Da Original- und Bild-Dreieck nicht in ein und derselben Zeichnung dargestellt sind, können auch Fehler bei der Überprüfung der Eigenschaften der Spieglung entstehen. Da das Original von der Spiegelachse geschnitten wird, können die Schülerinnen und Schüler zwar mit der Handlung „den Spiegel an die Achse halten" in der Vorstellung operieren, aber erhalten kein vollständiges Bild.

Fehler können genauer **diagnostiziert** werden, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege erklären bzw. die Achsenspiegelung in ihren Heften durchführen.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet sich an, den Schwierigkeitsgrad wie folgt zu reduzieren:

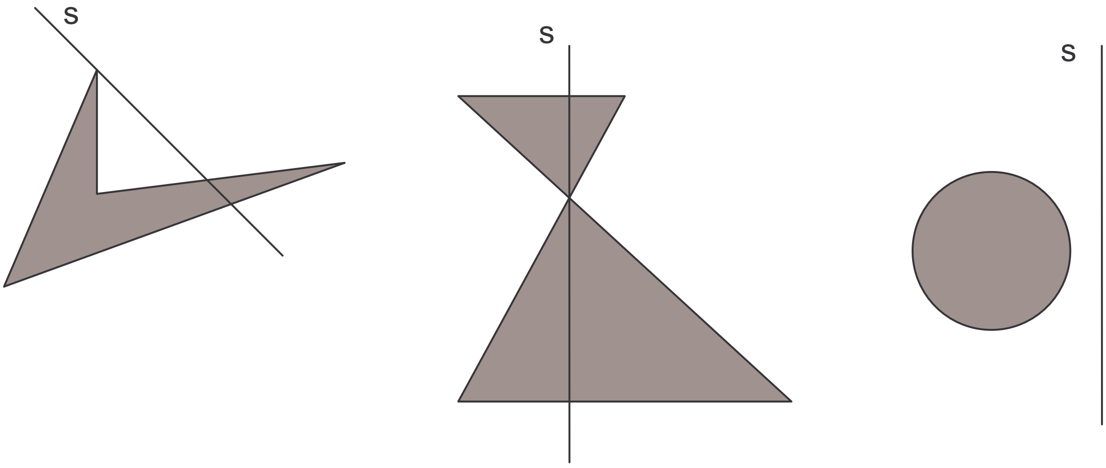
- Es werden zunächst einfache geometrische Figuren an einer Achse gespiegelt wie Punkte und Geraden.
- Die Spiegelachse ist außerhalb der zu spiegelnden Figur.

Alternativ können achsensymmetrische Objekte (z.B. Verkehrszeichen, Landesflaggen) auf ihre Spiegelachsen untersucht werden. Auch Buchstaben eignen sich für diese Übung, wie die folgende Aufgabe zeigt:
Welche der folgenden 15 Buchstaben sind achsensymmetrisch? Kreise sie ein und zeichne alle Spiegelachsen ein.

A B C D E F G H I J K L M N O

Schülerinnen und Schüler, die bei der Bearbeitung der Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, spiegeln komplexere geometrische Figuren als die gegebene, wie:

Spiegele die Figur an der Gerade s.



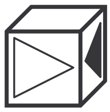
Darüber hinaus sollten auch reale ebene Figuren auf Achsensymmetrie untersucht werden wie Fotografien oder Kunstwerke.
Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen beschreiben, können sich anschließen, wie:

- Beschreibe, wie du vorgehst, wenn du überprüfst, ob zwei gegebene Kreise achsensymmetrisch zu einer Gerade s sind.

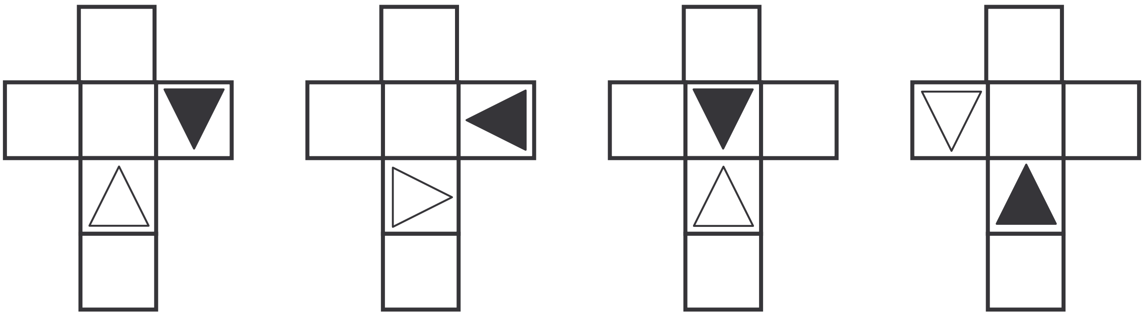
Aufgabe 27

Aufgabe 28

Würfelnetze



Welches der vier Netze ergibt beim Zusammenfalten den oben abgebildeten Würfel?
Kreuze an.



□ □ □ □

Lösung

Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen dem gegebenen Schrägbild eines Würfels das passende Netz zuordnen (L3). Dazu müssen sie entsprechende Beziehungen zwischen der Lage der Seitenflächen in der räumlichen und der ebenen Darstellung erkennen (K4, AB II).
Da alle abgebildeten Netze die gleiche Form haben, muss nur die korrekte Lagebeziehung zwischen der Seitenfläche mit dem weißen und der mit dem schwarzen Dreieck herausgefunden werden. Entspricht die gemeinsame Kante im Schrägbild einer Faltkante im Netz, so müssen die Spitzen der beiden Dreiecke aufeinander zuzeigen.

Fehler dürften fast immer auf ein nicht ausreichendes räumliches Vorstellungsvermögen zurückzuführen sein.

Aufgabe 28

Anregungen für den Unterricht

Zur Verbesserung des räumlichen Vorstellungsvermögens bieten sich für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten,** folgende Fördermaßnahmen an:

- Der in der Aufgabe vorgegebene Würfel wird (ausgehend von der Form der in der Aufgabe abgebildeten Netze) aus Papier bzw. mit Hilfe von Steckplättchen gebastelt. Einhergehend werden Falt- und Klebe- bzw. Steckkanten zugeordnet.
- Durch Zerschneiden bzw. Zerlegen der gebastelten Würfel werden möglichst viele verschiedene Netze hergestellt. Anschließend wird die Lage der Seitenflächen zueinander verglichen. (Zur Unterscheidung empfiehlt sich die optische Kennzeichnung der einzelnen Seitenflächen des Würfels.)
- Von einem als Anschauungsobjekt vorliegenden Spielwürfel werden mögliche Netze gezeichnet, wobei die Augenzahl jeder Seitenfläche in der korrekten Lage dargestellt wird.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** bietet sich folgende Aufgabenstellung an: „Ein gegebener Würfel wird zur Hälfte in Farbe getaucht. Zeichne mögliche zu diesem Würfel gehörige Netze.“

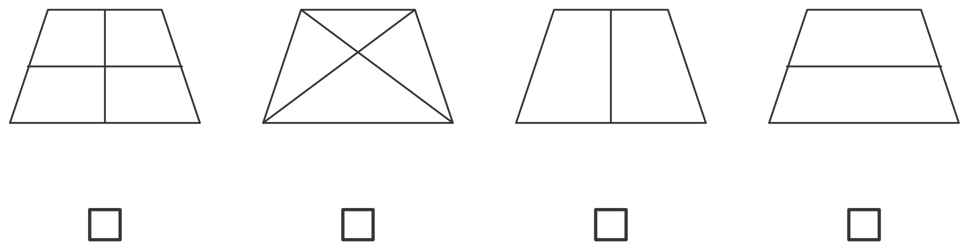
Es empfiehlt sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 33 „Würfel drehen“ und Aufgabe 35 „Quadernetze“.

Aufgabe 29

Symmetrieachsen im Trapez

Welche Zeichnung zeigt **alle** Symmetrieachsen eines gleichschenkligen (symmetrischen) Trapezes?

Kreuze an.



Lösung

Nur das dritte Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung des Items kommt es darauf an, eine geometrische Grundvorstellung von Achsensymmetrie anzuwenden (L3), um die Darstellungen der gegebenen Auswahlantworten zu prüfen (K4). Da vertraue und geübte Darstellungen gegeben sind, wird AB I zugeordnet.

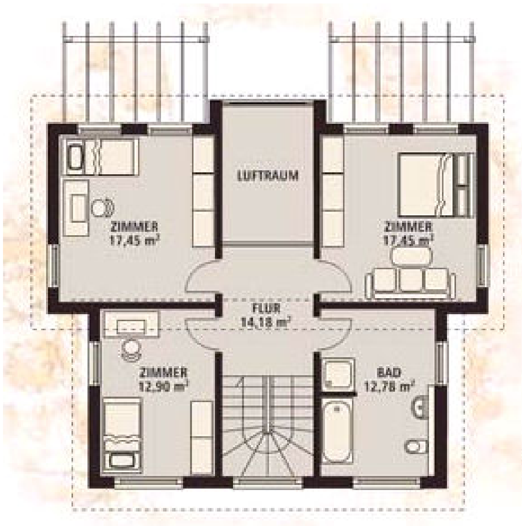
Fehler werden häufig das Ankreuzen des ersten und vierten Kästchens sein, wenn die Mittelparallele des Trapezes mit der Symmetrieachse verwechselt wird. Wird das zweite Kästchen angekreuzt, fehlt vermutlich die Grundvorstellung von Achsensymmetrie.

Anregungen für den Unterricht

Die Symmetrie ist eine besondere und fundamentale mathematische Eigenschaft. Grundlegende – lange ungelöste Probleme der Mathematik – wurden im 19. und 20. Jahrhundert durch konsequentes Verwenden der Idee der Symmetrie elegant und überraschend gelöst. Dies kann in einer 8. Klasse natürlich bestenfalls angedeutet werden, dennoch sollte im Unterricht nicht nur der technische Aspekt des Symmetriebegriffs verdeutlicht werden.

Symmetrien reduzieren die Komplexität von mathematischen Problemstellungen, z.B. das Ausmessen oder Konstruieren einer Figur oder den Rechenaufwand bei algebraischen Problemen mit symmetrischer Struktur. Auch die Erzeugung komplexer ästhetischer Muster (z.B. Weihnachtssterne) mit Papierfalten und Schereneinsatz basiert auf der Idee der Symmetrie. Im Mathematikunterricht sollte bis in die Oberstufe hinein (auch bei Funktionsbetrachtungen) die Idee der Symmetrie immer wieder als Denkwerkzeug aktiviert werden.

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht gelöst haben, sollten zunächst weitere Beispiele und Gegenbeispiele von achsensymmetrischen Figuren vorgelegt werden. Zum Beispiel kann die Symmetrieeigenschaft mit einem auf die vermutete Symmetrieachse senkrecht zur Zeichenebene gehaltenen Taschenspiegel überprüft werden. Bei Achsensymmetrie einer ebenen Figur entspricht jedem Punkt der Figur außerhalb der Symmetrieachse ein „Partnerpunkt“. Dies kann präzisiert werden und sollte dann sowohl zur Konstruktion symmetrischer Figuren als auch zur Analyse mathematischer Problemstellungen verwendet werden. Eine sinnvolle und schöne Aufgabe besteht z.B. darin, eine mehr oder weniger komplexe technische Zeichnung (vgl. nebenstehende Abbildung) zu bemaßen und dabei vorhandene Symmetrien auszunutzen.



Symmetrische Phänomene gibt es auch außerhalb der Geometrie, z.B. bei der Bestimmung aller Teiler einer natürlichen Zahl, wo es zu jedem Teiler den dazu „symmetrischen“ (komplementären) Teiler gibt, wie:
Teiler von 12 sind: 1 und 12, 2 und 6 sowie 3 und 4.

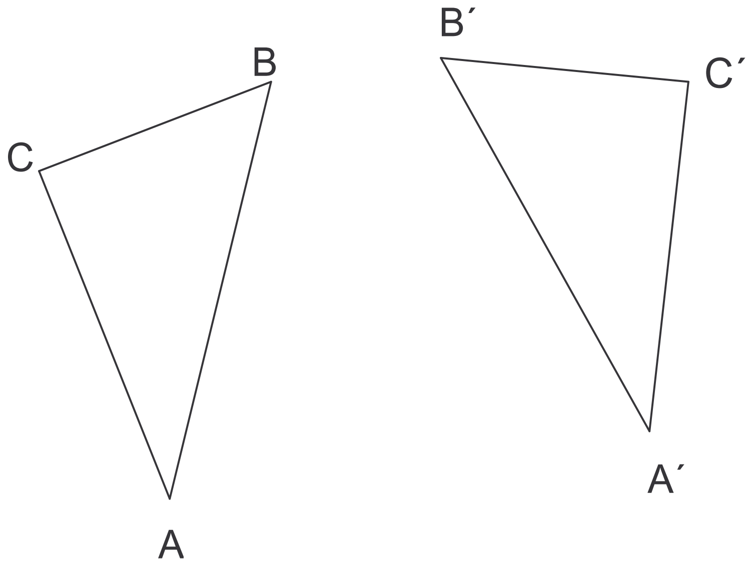
Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe lösen konnten, können in diesem Zusammenhang der Frage nachgehen, wie viele und welche „Testteiler“ man überprüfen muss, um festzustellen, ob eine natürliche Zahl eine Primzahl ist, z.B.: Für 41 sind nur die Teiler bis 7 zu prüfen, da $7 \cdot 7 = 49$.

Aufgabe 30

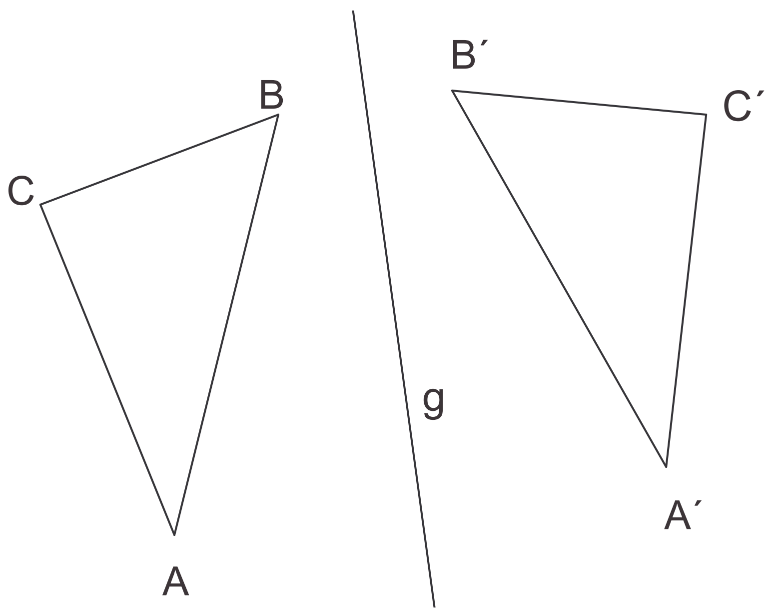
Spiegelachse

Das Dreieck A´B´C´ ist das Ergebnis einer Achsenspiegelung des Dreiecks ABC.

Zeichne die Spiegelachse g ein .



Lösung



Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Beim Betrachten der achsensymmetrischen Darstellung wird zunächst die (gedankliche) Zuordnung von Bildpunkten zu Originalpunkten in der Darstellung erwartet (K4). Unterschiedliche Strategien (K2, AB II) sind für das Bestimmen der Spiegelachse denkbar:

- Anwenden von Alltagswissen bzw. Grundvorstellungen, dass Bild und Original denselben Abstand zur Spiegelachse haben und sich genau gegenüberliegen. In diesem Fall ergibt sich die Lösung allein aus Halbieren der Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ (bzw. $\overline{CC'}$) und der Verbindung der Halbierungspunkte bzw. durch Interpretation "von genau gegenüber liegend" als "mittel - senkrecht sein" von Original-Bild-Strecke zur Spiegelachse (vgl. unten).
- Anwenden der geometrischen Eigenschaften der Spiegelung. Hier wäre nur einmal ein Originalpunkt mit dem dazugehörigen Bildpunkt durch eine Strecke zu verbinden (oder umgekehrt) und darauf die Mittelsenkrechte zu konstruieren.

Dazu sind mathematische Werkzeuge (Geodreieck, Zirkel und Lineal oder ggf. Geometrie-Software) zu nutzen (K5), deren Einsatz in diesen Situationen bereits geübt wurde.

Fehler entstehen, wenn

- eine geschätzte, augenscheinliche Symmetrieachse eingezeichnet
- ungenau gezeichnet
- mathematische Werkzeuge fehlerhaft genutzt
- die Halbierungs- oder Orthogonalitätsbedingung nicht beachtet

wurde(n).

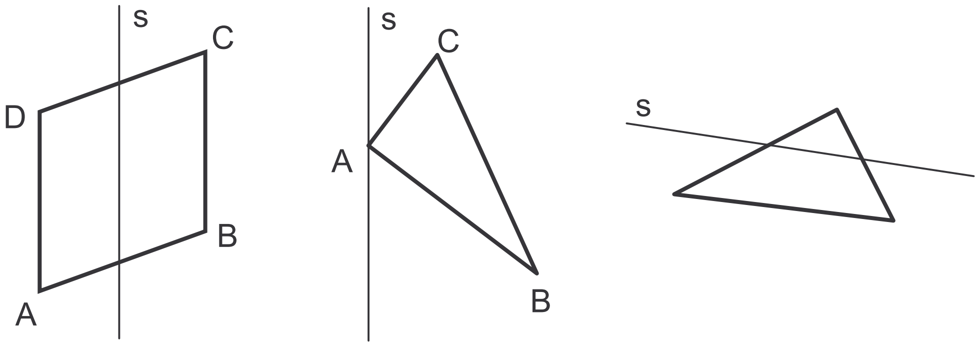
Zur **Diagnose** kann die Lehrkraft die Bearbeitung der Darstellung heranziehen. Weiteren Aufschluss kann eine Beschreibung der Vorgehensweise geben.

Anregungen für den Unterricht

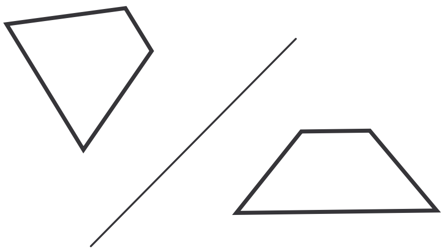
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollen zunächst ein Dreieck oder eine andere ebene Figuren an einer vorgegebenen Achse spiegeln. Dazu ist der Einsatz des Geodreiecks sinnvoll. Es ermöglicht das eigenständige Finden von Eigenschaften der Geradenspiegelung. Anschließend ist das Besprechen von Strategien zur Bearbeitung sinnvoll. Eventuell ist der Umgang mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeugen durch Üben vorher abzusichern.

Als weitere Aufgaben sind solche wie die folgenden zu empfehlen:

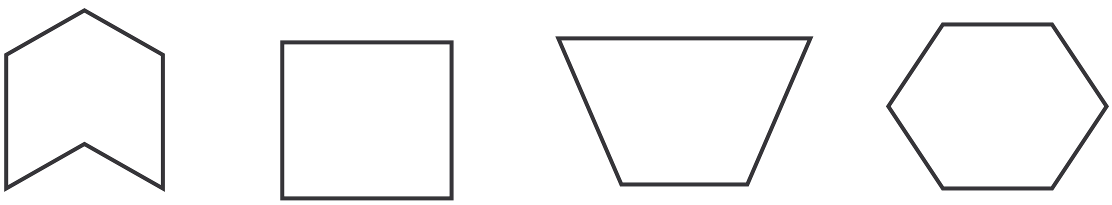
- Spiegle jede Figur an der Spiegelachse s.



- Ist die Gerade s Spiegelachse der gegebenen Figuren? Begründe deine Entscheidung.



- Folgende Figuren sind durch eine Achsenspiegelung entstanden. Zeichne alle möglichen Spiegelachsen in jede Figur ein.



Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, können sich im Aufschreiben von Handlungsanweisungen zum Finden einer Symmetrieachse bei ebenen Figuren üben. Dabei sollte bewusst werden, dass diese Vorgehensweise zugleich zur Überprüfung der Achsensymmetrie genutzt werden kann.

Aufgabe 31

Parallelogramme
Welche dieser Aussagen, die für alle Parallelogramme gelten sollen, ist **FALSCH**?

Kreuze an.

- ☐ Gegenüberliegende Seiten sind parallel.
- ☐ Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
- ☐ Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
- ☐ Es gibt genau eine Spiegelachse.
- ☐ Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

Lösung

Es gibt genau eine Spiegelachse.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler die in den Auswahlantworten verwendeten mathematischen Begriffe in die natürliche Sprache übersetzen (K5) und verstehen (K6). Sie analysieren daraufhin ein Parallelogramm gedanklich oder anhand einer Skizze (L3).

Bei der ersten und letzten Aussage wird die Anzahl der Fehlentscheidungen gering sein. Hier sind häufig verwendete und leicht vorstellbare Eigenschaften des Parallelogramms benannt. **Fehler** bei der Wahl der anderen Aussagen lassen sich erörtern, indem ein passendes Gegenbeispiel zur 4. Antwort gefunden oder bei der 2. und 3. Antwort die Gültigkeit begründet wird.

Um Sicherheit über mögliche Fehlerquellen zu erhalten – auch bei anderen Fehlentscheidungen der Schülerinnen und Schüler – sollten schriftliche oder mündliche Begründungen für eine **Diagnose** eingefordert werden.

Anregungen für den Unterricht

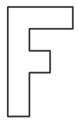
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst auf Skizzen oder Zeichnungen als wichtiges Hilfsmittel hingewiesen werden. Bei (exakten) Zeichnungen können die angegebenen Eigenschaften nachgemessen und so im Rahmen der Messgenauigkeit überprüft werden.
Die Diskussion zu allen Auswahlantworten ist nicht zu vernachlässigen. Dabei müssen auch die Spezialfälle (Rechteck, Quadrat, Raute) betrachtet werden. Diese Sonderfälle haben mehrere Spiegelachsen, das allgemeine Parallelogramm keine. Im Unterricht kann auch dynamische Geometriesoftware eingesetzt werden, um Parallelogramme zu variieren und die gegebenen Aussagen an Beispielen zu prüfen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können eine Umkehraufgabe dazu lösen, nämlich zu jeweils einer gegebenen Eigenschaft ein Viereck anzugeben, welches diese Eigenschaft erfüllt, und eines, welches diese nicht erfüllt. Anspruchsvoller ist es, wenn mehrere Eigenschaften vorgegeben werden, zu denen passende Vierecke gefunden werden sollen. Hier können auch evtl. sich ausschließende Vorgaben gemacht werden. Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware ist möglich.

Aufgabe 32

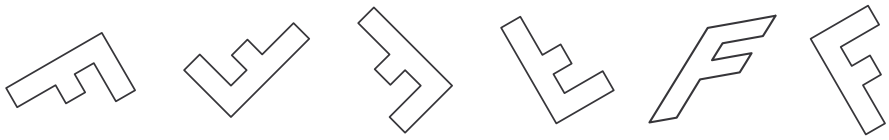
Kongruente Figuren

Gegeben ist eine Figur .



Welche der unten stehenden Figuren ist nicht kongruent (deckungsgleich) zu der oben gegebenen Figur ?

Kreuze an.



☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Lösung

Nur die fünfte Figur wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erkennen einfache zueinander deckungsgleiche (kongruente) Figuren in der gegebenen Darstellung (L3, K4). Die Aufgabenstellung ist aus dem Unterricht vertraut (AB I).

Ein häufig zu erwartender **Fehler** könnte das Überlesen von „nicht" in der Aufgabenstellung sein. In der vierten Figur wurde der gegebene Buchstabe F gespiegelt. Auch hier werden häufig Fehlantworten auftreten. Da die falsche Darstellung als einzige verzerrte Figur aus dem Rahmen fällt, kann die Aufgabe auch richtig bearbeitet sein, ohne dass Kenntnis über Deckungsgleichheit (Kongruenz) vorliegt. In diesem Fall wurde aus dem Verständnis von Deckungsgleichheit im Alltag entschieden. Um eine **Diagnose** zu ermöglichen, ist eine schriftliche oder mündliche Kommentierung erforderlich.

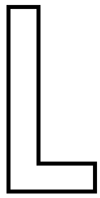
Anregungen für den Unterricht

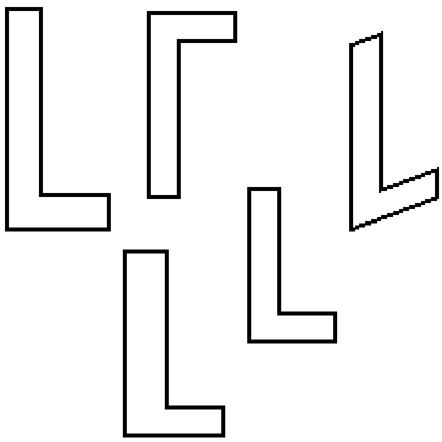
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben, können sich die Deckungsgleichheit veranschaulichen, indem sie die gegebene geometrische Figur ausschneiden und versuchen, diese mit den gegebenen Auswahlantworten zur Deckung zu bringen. Sie sollten auch angehalten werden, zu überlegen, mit welcher Bewegung die gegebene Figur in jede der angebotenen (bis auf die verzerrte) Darstellung überführt werden kann.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können die zu Grunde liegenden Bewegungen (Kongruenzabbildungen) angeben, mit denen man vom Urbild zu einem der deckungsgleichen Bilder kommt (evtl. auch Angabe von Drehzentrum und -winkel und Spiegelachsen).

Als weitere Aufgabe kann die folgende angeboten werden, die zusätzlich die Relation „ähnlich zu" berücksichtigt:

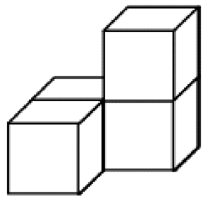
Gegeben ist die nebenstehende Figur.
Welches der unten stehenden Bilder ist
zu dieser deckungsgleich (kongruent)?





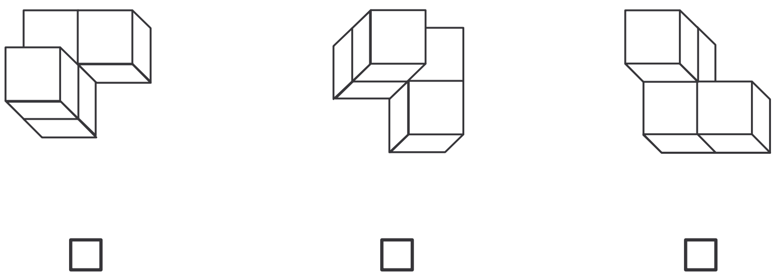
Aufgabe 33

Würfel drehen
Dieser Körper wird in eine andere Lage gedreht.



Welches der folgenden Bilder zeigt den gedrehten Körper ?

Kreuze an.



Lösung

Nur das dritte Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

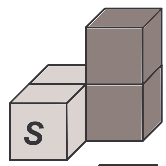
Zur Bearbeitung der Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler räumliche Vorstellungen des gegebenen Körpers (L3) aktivieren. Wenn dies nicht rein intuitiv geschieht, ist es entscheidend, eine geeignete Herangehensweise zu entwickeln und zu verwenden (K2), damit die in der Vorstellung gedrehten Varianten des Ausgangskörpers mit den Körpern in den Auswahlantworten verglichen werden können. Denkbar ist zum Beispiel, nach einer geeigneten Bewegung zu suchen und diese gedanklich auszuführen, damit der gegebene Körper in einen, der als Antwort dargestellt ist, überführt werden kann (K4). Dabei ist die Lage der kleinen Würfel zueinander bedeutsam. Die Bearbeitung ist mehrschrittig (AB II).

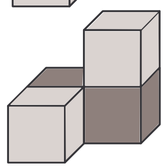
Die Ursachen für **Fehler**, lassen sich aus den angebotenen Antworten vermuten: Beispielsweise wurde bei der ersten Auswahlantwort nicht beachtet, dass bei Drehung des Körpers der "Turm" an einer anderen Stelle des Zweierblocks steht. Eine detaillierte Diagnose ist im folgenden Unterricht möglich, wenn Schülerinnen und Schüler versuchen, ihre Antworten zu begründen.

Anregungen für den Unterricht

Um die hier geforderte Kompetenz auszubilden, ist der Umgang mit konkreten Körpern der abgebildeten oder ähnlicher Art (z.B. dem Soma-Würfel) sinnvoll. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler Vermutungen über die Lage eines Körpers nach einer bestimmten Bewegung äußern bzw. zu vorgegebenem Original und Bild eines Körpers Vermutungen über die entsprechende Bewegung äußern und dies jeweils durch gegenständliches Handel überprüfen. So erleben sie, ob ihre Vorstellung richtig ist. Das könnte insbesondere denjenigen **Schülerinnen und Schülern** helfen**, die die Aufgabe nicht lösen konnten**. Geeignet sind auch Computeranimationen bzw. entsprechende Spiele.

Für **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe gelöst haben,** ist es sinnvoll, einen systematischen Zugang zur Lösung dieses und verwandter Probleme zu gewinnen. Ein möglicher Weg besteht darin, sich eine bestimmte Teilfigur des Ausgangskörpers (gedanklich) „herzunehmen“, z.B. einen Quader aus zwei Würfeln.





Man „sieht“ dann entweder
- zwei solche Quader, die „aneinander geklebt“ sind und in ihren Längsrichtungen senkrecht zueinander stehen, oder
- einen solchen Quader in der Mitte mit vorne und hinten je einer angeklebten „Nase“ (Würfel), die „in Richtungen zeigen“ die senkrecht zueinander sind.

Beispielhaft wird hier die erste Sichtweise eingenommen:
Man versucht, einen der beiden Quader in eine Standardlage (z.B. die in der gegebenen Aufgabe dargestellte) zu bringen. Dazu betrachtet man seine einzige „freie“ Stirnseite ***S*** (Quadrat), legt diese nach vorn und dreht sie - und damit die ganze Figur - so, dass der angeklebte Quader rechts (hinten) liegt. Dann ragt er bei der Ausgangsfigur und ebenso bei dem dritten Distraktor jeweils nach oben heraus, bei den drei anderen – somit „falschen“ - Distraktoren ragt er demgegenüber nach unten heraus.
Streng genommen muss man sich noch überzeugen, dass dieses Verfahren unabhängig davon ist, welchen der beiden Quader man sich ausgesucht hat. Man wird dabei erkennen, dass alle abgebildeten Körper eine Symmetrie haben, die realisiert wird, wenn man die beiden freien Quadrate ineinander überführt.

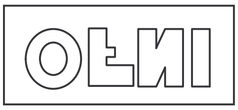
So ist auch zu erkennen, dass der hier betrachtete Körpertyp genau zwei Varianten zulässt. Die drei „falschen“ Distraktoren realisieren deshalb - wie auch das beschriebene Verfahren zeigt – gegenüber dem Ausgangskörper die gleiche andere Variante.
Hinter dieser Lösungsstrategie steckt eine allgemeine Idee, um verschiedene (mathematische) Objekte zu vergleichen: Man definiert eine „Standardlage“, damit Objekte in verschiedener Lage vergleichbar werden.
Die hier beschriebene Begründung ist nur beispielhaft für eine von sehr vielen möglichen.
Ein lebendiger Unterricht kann entstehen, wenn Schülerinnen und Schüler versuchen, ihre Auswahl auf andere Weise zu begründen. Dann wird auch die allgemeine Kommunikationskompetenz (K6) in starkem Maße geübt.

Aufgabe 34

Spiegelschrift

Du hältst dieses Schild so vor dich, dass jeder es lesen kann und stehst vor einem Spiegel. Was siehst du?
Kreuze an.

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Lösung

Nur das 5. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der vorliegenden Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler Eigenschaften dargestellter geometrischer Objekte bezüglich einer Spiegelung (Spiegelbild) erkennen und anwenden (L3). Sie müssen über gute Raumvorstellungen verfügen, da die dargestellte Situation nicht der den Schülerinnen und Schülern bekannten Darstellung in der Ebene entspricht (K3, K4). Die Zuordnung zum Anforderungsbereich II erklärt sich aus der Mehrschrittigkeit bei der Lösungsfindung.
Neben der oben genannten Möglichkeit kann ohne Kenntnisse der Eigenschaften der Spiegelung eine Lösung gefunden werden, indem das Blatt gegen das Licht gehalten wird.
Auch ein Ausschlussverfahren ist möglich. Ein lesbares Schild steht nicht auf dem Kopf (sichtbar beim Buchstaben F) und die einzelnen Buchstaben ändern auf dem Schild selbst nicht ihre Ausrichtung (das F öffnet sich zum „O“ und nicht zum „N“). In diesem Fall käme die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ auch zum Tragen.
Denkbar ist ebenfalls, dass Schülerinnen und Schüler ihr Alltagswissen einsetzen, etwa wenn sie sich an die spiegelbildliche Aufschrift an Rettungswagen oder Feuerwehr erinnern.

Zu erwartende **Fehler** können u.a. entstehen durch
- Nichtberücksichtigung eines Teilschrittes (v.a. „dass jeder es lesen kann“), da die Schülerinnen und Schüler das Schild selbst ja nicht mehr lesen können.
- Vorgabe der Lösungsobjekte in der Ebene, weil dort ein gedankliches Operieren erfolgen kann, bei dem die Längskante des Schildes bzw. eine Parallele dazu als Spiegelachse dient (Ankreuzen des ersten Kästchens).

Die Bearbeitungsstrategie und eventuelle fehlerhafte oder defizitäre Vorstellungen werden deutlich, wenn die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen erklären (**Diagnose**).

Anregungen für den Unterricht

Die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens geschieht durch den Umgang mit konkreten Figuren oder Körpern. Vor allem das genaue Beschreiben einfach strukturierter Figuren (z.B. nur der Buchstabe F oder die Kombination FO) vor und nach einer Änderung der Blickrichtung (Spiegelung) hilft Schülerinnen und Schülern, sich zunehmend gezielt auch gedanklich im Raum zu bewegen. Diesem Ziel dienen ebenfalls entsprechende Computerspiele.

Mit **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte die Lehrkraft im Unterrichtsgespräch zunächst klären, inwieweit die Aufgabe verstanden wurde (u.a. wie das Schild zu halten ist). Dienlich erscheint gegebenenfalls das Nachstellen der Aufgabe in der realen Situation.

Können die betreffenden Schülerinnen und Schüler die Aufgabe dennoch nicht bearbeiten, sollte ihre Raumvorstellung durch vielfältige zum Handeln anregende Unterrichtssituationen geschult werden. Weitergeführt wird dieser Lernvorgang durch zeichnerische Darstellungen, indem Figuren und Körper in der Ebene „bewegt" werden und dies zu beschreiben ist, ggf. mit Anregungen, wie:
In welche Richtung wird gedreht?
Wo befindet sich die Spiegelachse?

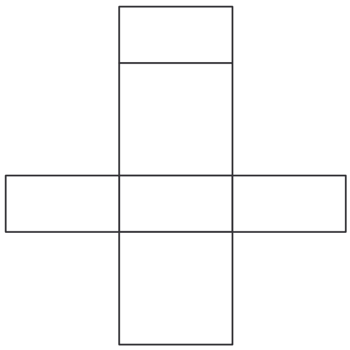
Für Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, kann der Auftrag gestellt werden, in Spiegelschrift zu schreiben oder zu zeichnen, so dass es im Spiegel richtig erscheint. Daneben regen Fragestellung der Art „Was siehst du bei zwei entsprechend gestellten Spiegeln?" zu weiteren Vorstellungen und vertieftem Nachdenken an.

Aufgabe 35

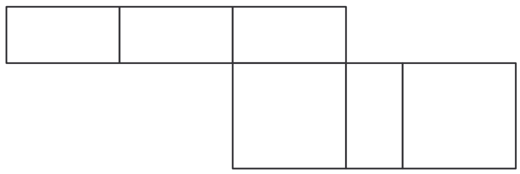
Quadernetze

Welches der vier Netze ergibt beim Zusammenfalten **keinen** Quader?

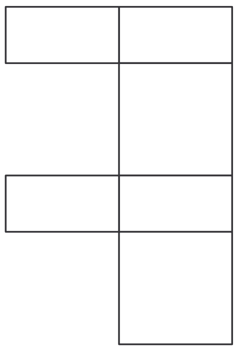
Kreuze an.



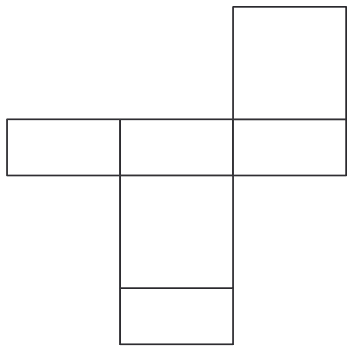
☐



☐



☐



☐

Lösung

Es wurde nur das 3. Kästchen angekreuzt (links unten).

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Aufgabe 35

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler untersuchen die vier dargestellten Körpernetze, um festzustellen, welches davon kein Quadernetz ist (K4). Dazu müssen sie mit den unterschiedlich angeordneten Flächen gedanklich operieren (L3) und von der ebenen zur räumlichen Darstellung des Körpers wechseln (AB II). Der Quader wird dabei nicht so häufig im Unterricht verwendet, wie etwa der Würfel und verlangt wegen der unterschiedlichen Rechteckflächen höhere Aufmerksamkeit.

Auftretende **Fehler** entstehen, wenn das gedankliche Falten des Quaders unsystematisch verläuft oder weil der Begriff „Körpernetz" völlig unbekannt ist.

Eine **Diagnose** ist ohne Nachfrage nicht möglich. Deshalb sollte die Lehrkraft in jedem Fall nach dem Vorgehen bzw. der verwendeten Strategie fragen.

Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht sollte sowohl durch tatsächliches Abwickeln verschiedener Körper wie auch durch das Zusammenbauen aus „Schnittmusterbögen" der Wechsel zwischen Körper und Körpernetz begreifbar gemacht werden.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, obwohl sie den Begriff „Körpernetz" kennen, benötigen Strategien für ihr Handeln, wie:

- Beschriften der einzelnen Flächen des Netzes mit „unten", „vorn", „oben", „hinten", „links" und „rechts" zur Zuordnung für die Flächen des Quaders.
- Körpernetze von vorgegebenen Quadern mit farbig markierten Seiten zeichnen.
- Gedankliches Zusammenfalten, indem die Fläche markiert wird, die Standfläche des Körpers sein soll.

Die Ergebnisse des gedanklichen Operierens mit den gegebenen Körpernetzen sollten durch Ausschneiden und Falten überprüft werden.

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, sollten

- ihre Lösungsstrategie vortragen oder in Partnerarbeit erklären,
- Netze von Körpern selbst entwerfen (z.B. Pyramide mit regelmäßigem Sechseck als Grundfläche, Pyramidenstumpf, dreiseitiges Prisma),

ggf. auch eine ähnliche Aufgabe wie die gegebene formulieren.

Aufgabe 36

Gleichschenklige Dreiecke
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
Kreuze an.

Jedes gleichschenklige Dreieck ...	wahr	falsch
besitzt drei gleich lange Seiten.	☐	☐
besitzt mindestens eine Symmetrieachse.	☐	☐
hat immer einen rechten Winkel.	☐	☐
hat mindestens zwei gleich große Winkel.	☐	☐

Lösung

falsch
wahr
falsch
wahr

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der vorliegenden Aufgabenstellung sind Aussagen zu Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke in einer Tabelle gegeben, die die Schülerinnen und Schüler erfassen (L3, K6), hinsichtlich ihrer Richtigkeit überprüfen und als „wahr" oder „falsch" einordnen müssen (K5). Dabei ist die Allgemeingültigkeit („Jedes gleichschenklige Dreieck …") zu beachten. Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Voraussetzung für die erfolgreiche Lösung der Aufgabe ist, dass die Schülerinnen und Schüler über das nötige Fachwissen hinsichtlich der im Text vorkommenden Begriffe und eine ausreichende formenkundliche Vorstellungskraft verfügen.

Ein zu erwartender **Fehler** ist, dass die Schülerinnen und Schüler eine Aussage nur oberflächlich erfassen und für die Richtigkeit der Aussage entscheidende Wörter (z.B. „Jedes", „mindestens", „immer", …) nicht berücksichtigen.

Zur gezielten **Diagnose** empfiehlt es sich, die Überlegungen verbalisieren zu lassen.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben,** bietet es sich an, neben der Wiederholung der in der Aufgabe vorkommenden Fachbegriffe das Vorgehen bei der Beurteilung von (All-)Aussagen zu thematisieren. Hierzu eignet sich die Betrachtung einfacher Alltagsbeispiele:

- „Jedes Jahr hat 12 Monate."
- „Jedes Jahr hat mindestens 365 Tage."
- „Jedes Jahr hat immer den 1. Januar als Jahresbeginn."
- „Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr."
- …

Zur anschaulichen Untersuchung der in der vorliegenden Aufgabe beschriebenen Eigenschaften und zur Demonstration der Vielfalt gleichschenkliger Dreiecke ist neben dem Zeichnen der Einsatz eines dynamischen Geometrieprogramms geeignet.

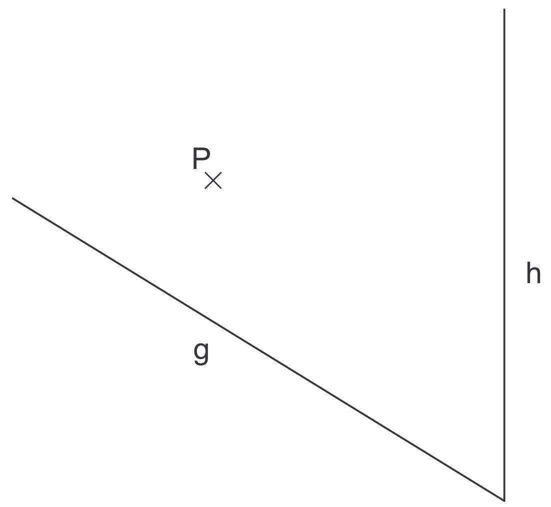
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, könnten selbst ähnliche Aufgaben, z.B. zu gleichseitigen Dreiecken oder speziellen Vierecken, entwerfen.

Es empfiehlt sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 38 „Dreieck".

Aufgabe 37

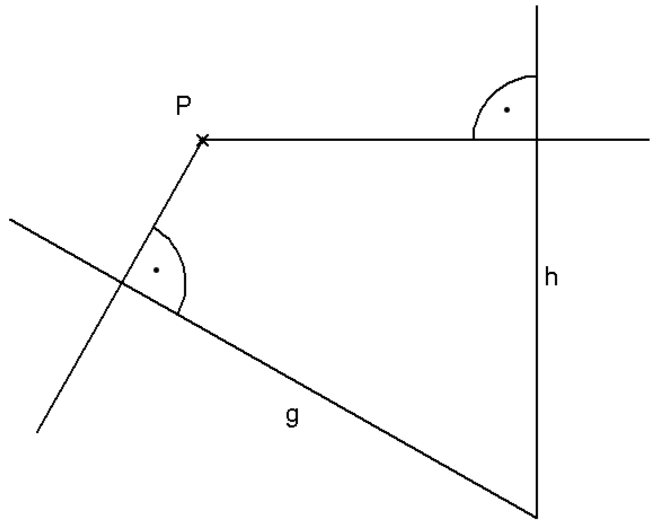
Punkte und Abstände

Gegeben sind zwei Halbgeraden g und h und ein Punkt P .



Zeichne eine Senkrechte durch den Punkt P auf die Halbgerade g und eine Senkrechte durch den Punkt P auf die Halbgerade h.

Lösung



Abweichungen von 1° bezüglich der Winkel werden akzeptiert.
Anmerkung: Hier ist keine Konstruktion erforderlich! Zeichnung mit Hilfe von Geodreieck, Lineal, etc. ist erlaubt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

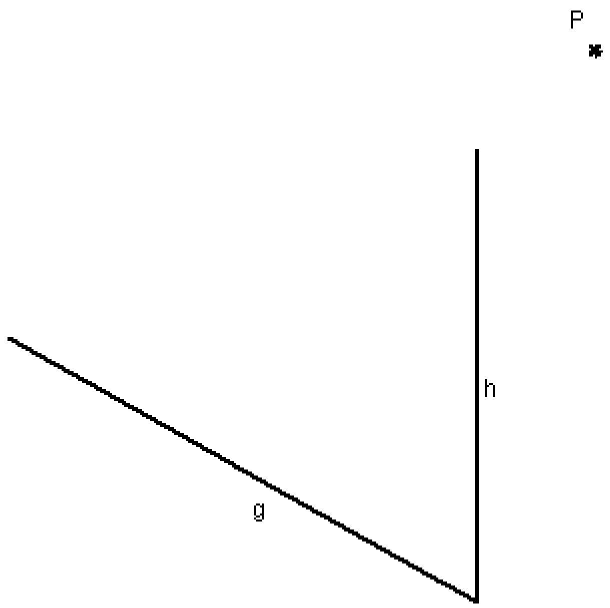
Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler zwei Senkrechten durch ein und denselben Punkt auf jede der zwei Halbgeraden zeichnen (L3, K4) und dabei mathematische Hilfsmittel wie das Geodreieck sachgerecht anwenden (K5). Da diese Aufgabenstellung zu den Routinehandlungen in Jahrgangsstufe 8 gehört, wird der Anforderungsbereich AB I zugeordnet. Verschiedene Wege zur Lösung sind möglich. Das Anlegen des Geodreiecks auf der Halbgeraden und seine Verschiebung bis die Senkrechte durch den Punkt P geht, ist sicher die schnellste Variante für eine genaue Lösung. Ebenso denkbar ist, dass Schülerinnen und Schüler mit einem einfachen Lineal versuchen, eine Senkrechte zu zeichnen und mit etwas Glück auch hier zu einer noch akzeptablen Lösung kommen. Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal wird eher die Ausnahme bei der Lösungsfindung sein.

Zu erwartende **Fehler** können entstehen, wenn Schülerinnen und Schüler keine konkrete Vorstellung vom Begriff der Senkrechten haben (rechter Winkel) oder das Zeichnen bzw. Konstruieren der Senkrechten durch einen gegebenen Punkt nicht durchgeführt werden kann. Auch ungenaue Ausführungen sind oftmals Grund dafür, die Aufgabe als fehlerhaft zu werten.

Anregungen für den Unterricht

Bei **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten,** muss zuerst sichergestellt werden, dass begriffliche Vorstellungen einer Senkrechten vorhanden sind. Nach Übungen zum Erkennen zueinander senkrecht stehender Geraden mit Kennzeichnung des rechten Winkels, wäre ein weiterer Schritt das Zeichnen einer Senkrechten zu einer Gerade. Im Mittelpunkt steht hierbei das sichere Anlegen des Geodreiecks. Eine Thematisierung, dass Zeichnungen mit einem einfachen Lineal nur selten zu einer korrekten Lösung führen können, sollte in diesem Zusammenhang erfolgen. Das Verschieben des Geodreiecks, damit die Senkrechte durch einen bestimmten Punkt geht, dürfte nun keine Probleme mehr bereiten.
Eine vereinfachte Variante könnte sein, auf jeder Halbgerade einen Punkt vorzugeben und durch jeden dieser Punkte zu den Halbgeraden Senkrechten zu zeichnen. Parallel zu der inhaltlichen Erarbeitung sollte durchgehend Wert auf eine saubere Darstellung gelegt werden.

Bei **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, bietet sich an, die Aufgabe nicht als Zeichnung sondern als Konstruktion im Unterricht zu behandeln. Auch wenn dies über die Anforderungen der Aufgabe hinausgeht, bedeutet es doch eine weitere Möglichkeit zur Lösung zu kommen.
Durch Verändern der Lage des Punktes P lässt sich die Schwierigkeit der Aufgabe leicht variieren.



Aufgabe 38

Dreieck
In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis doppelt so lang wie die Höhe. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

Lösung

45°, 45° und 90°

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Ausgehend von der beschriebenen Eigenschaft eines gleichschenkligen Dreiecks sollen die Schülerinnen und Schüler die Maße der zugehörigen Innenwinkel angeben (L3). Dazu müssen sie die formale Beschreibung gedanklich oder zeichnerisch umsetzen und die gesuchten Winkelmaße durch Messen (K5) oder logische Folgerungen (K2) ermitteln. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen geht jeweils über die Anwendung eines Routineverfahrens hinaus (AB II).
Um die Aufgabe erfolgreich lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler über das nötige Fachwissen hinsichtlich der im Text vorkommenden Begriffe verfügen. Ob sie dann bei ihren Überlegungen von der Basis oder der zur Basis gehörenden Höhe ausgehen, spielt für die Ermittlung der in der Aufgabenlösung angegebenen Winkelmaße keine Rolle. Ebenso kann die Betrachtung eines konkreten Beispiels (selbst gewählte Basislänge bzw. Höhe) erfolgen.

Ein möglicher **Fehler** wird sein, dass die Schülerinnen und Schüler nicht alle drei Winkelmaße, sondern nur das Maß eines oder zweier Winkel des Dreieckes angeben.
Die Aufgabenstellung hat in der vorliegenden Form mehrere Lösungen.
Eindeutig lösbar ist die folgende Aufgabenstellung:
„In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis doppelt so lang wie die <u>zugehörige</u> Höhe. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten,** sollten die im Text vorkommenden Begriffe „gleichschenklig“, „Basis“ und „Höhe“ wiederholt werden. Dazu empfiehlt sich die formenkundliche Klassifizierung verschiedener vorgegebener Dreiecke mit einhergehender Zuordnung der jeweiligen Fachbegriffe.
Im Anschluss daran bietet sich das Zeichnen von Dreiecken ausgehend von gegebenen Seitenlängen und/oder Winkelmaßen bzw. anderen beschriebenen Eigenschaften an.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe zeichnerisch und durch Messen der entsprechenden Winkelmaße **lösen konnten,** sollten versuchen, die gefundene Lösung durch logisches Argumentieren (K1) zu begründen. Darüber hinaus könnten die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Angabe der Aufgabenlösung („45°, 45°, 90°.“, „Das Maß der Basiswinkel beträgt 45°, der dritte Innenwinkel hat das Maß 90°.“, „Das Maß des dritten Innenwinkels ist doppelt so groß wie das Maß der Basiswinkel.“, …) thematisiert werden, ebenso wie eine weitere Lösungsmöglichkeit der Aufgabe (statt von der zur Basis gehörenden Höhe wird von einer der beiden – gleich langen – anderen Höhen ausgegangen: Die Winkelmaße der drei Innenwinkel betragen dann 30°, 30° und 120°.)

Bei der vorliegenden Aufgabe bietet sich die gekoppelte Bearbeitung mit Aufgabe 36 „Gleichschenklige Dreiecke“ an.