Material zur Weiterarbeit
zum
Lernstand im Fach Mathematik in der Klassenstufe 8

Adressaten sind die Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie Fachkonferenzen oder andere Lehrkräfte und innerschulische Gruppen. Sie sollen durch das Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, die vor allem in der individuellen Förderung liegen.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Umfang und Tiefe richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich am rechten Rand ersichtlich.
Eine Kommentierung zu einer Aufgabe schließt folgende Teile ein:

- Begründungen für die Zuordnung der Standardeigenschaften[1] zu einer Aufgabe (und damit Ausweisen von didaktischem Potential der Aufgabe),
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler (u.a. häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose),
- Anregungen für den Unterricht.

An verschiedenen Stellen werden Bezüge zur Veröffentlichung „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ des IQB hergestellt, da hierin eine große Anzahl von Aufgaben mit ausgewiesenen Standardbezügen und Unterrichtsanregungen vorgestellt werden.

Bezüge zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter kann von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben für ein Testheft nur die „hinführende“ Teilaufgabe ausgewählt werden und es muss auf mathematisch interessantere verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen, solche Teilaufgaben aufzugreifen und weitere Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung des Materials ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen Lehrkräfte u.a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann, damit über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden kann. Im vorliegenden Material wird daher für jede Aufgabe die Zuordnung der

[1] Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss, Beschluss der KMK vom 04.12.2003, S.7 – 15 bzw. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Beschluss der KMK vom 15.10.2004, S. 7 - 14.

Standardmerkmale (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen kann deutlich gemacht werden, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zur mathematischen Kompetenz bestimmt.

Überlegungen, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können , sind Teil jeder Kommentierung. Betrachtet werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und zu erwartende häufige Fehler sowie Möglichkeiten zur Diagnose. Dies soll die Lehrkräfte auch in ihrer Individualdiagnose unterstützen und helfen, Ansätze zur individuellen Förderung aufzudecken. Darauf aufbauend wird für jede Aufgabe vorgeschlagen, wie diese verändert oder variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Solche Anregungen beinhalten die Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, den Umgang mit verschiedenen Lösungen, eine Diskussion zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegeben Sachverhalts, den Einsatz von Aufgabenvariationen u.a.m. Dabei wird auch deutlich, wie sich Testaufgaben und Unterrichtsaufgaben bzw. Aufgaben in Lernstanderhebungen für die eigene Klasse unterscheiden können.

An der Weiterentwicklung des Materials wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. So wird angestrebt, im nächsten Jahr die Kommentierungen zu den einzelnen Aufgaben in Form einer Online-Datenbank anzubieten. Hinweise zum vorliegenden Material, beispielsweise zur gewählten Präsentationsform, und zu Ergänzungen können an (entw8@thillm.thueringen.de) gerichtet werden. Sie werden gern entgegengenommen.

Literatur:
/1/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006
/2/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss Beschluss der KMK vom 04.12.2003
/3/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss Beschluss der KMK vom 15.10.2004

Aufgabe 1

Rapido
Aus der Preistabelle des Paketdienstes „Rapido" kann man zu jedem Paketgewicht den zugehörigen Preis ablesen.

Bis 1 kg	3,50 €
Über 1 kg bis 2 kg	4,00 €
Über 2 kg bis 3 kg	4,50 €
Über 3 kg bis 5 kg	5,00 €
Über 5 kg bis 8 kg	5,50 €
Über 8 kg bis 10 kg	6,00 €

Beantworte mit Hilfe der Tabelle folgende Fragen:

1.1: Wie viel kostet ein Paket, das 9 kg wiegt?
Kreuze die richtige Lösung an.
- ☐ 5,50 €
- ☐ 6,00 €
- ☐ 9,00 €
- ☐ 13,50 €

1.2: Wie schwer darf ein Paket sein, für das man 5,00 € bezahlt?
Kreuze die richtige Lösung an.
- ☐ Genau 4 kg
- ☐ Höchstens 10 kg
- ☐ Über 3 kg bis 5 kg
- ☐ Über 5 kg bis 8 kg

Lösung

1.1: 6,00 €
1.2: Über 3 kg bis 5 kg

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen aus der Tabelle den Zusammenhang zwischen dem Paketgewicht und dem zugehörigen Preis erkennen (L4), und zwar vom Paketgewicht auf den Preis und umgekehrt vom Preis auf mögliche Paketgewichte schließen. Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch richtiges Ablesen des Preises für das Paketgewicht von 9 kg in der Tabelle für Aufgabenteil 1 bzw. durch richtiges Ablesen möglicher Gewichte bei vorgegebenem Preis von 5,00 € für Aufgabenteil 2 (K4, AB I).

Zur **Diagnose** von Zuordnungsfehlern, sollte im Unterricht durch die betreffenden Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise beschrieben werden.

Anregungen für den Unterricht

Ähnliche Fragestellungen können zu verschiedenen funktionalen Zusammenhängen aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler gestellt werden (z.B. zu Eintrittspreisen, die nach Zeiten oder Kategorien gestaffelt sind).
Daran anknüpfend kann ein Wechsel der Darstellungsformen im Unterricht thematisiert werden, nämlich von den Tabellenwerten zur graphischen Darstellung bzw. umgekehrt, und der Nutzen für die Beantwortung der betreffenden Fragestellung diskutiert werden.

In einem Parkhaus ist folgende Preistafel zu sehen:

I. Maria fährt mit ihren Eltern um 11.00 Uhr in das Parkhaus. Sie verlassen es um 13.45 Uhr. Wie viel Parkgebühren müssen sie für diese Zeit bezahlen?
II. Wie lang könnten sie für 5 Euro ihr Auto in dem Parkhaus lassen?

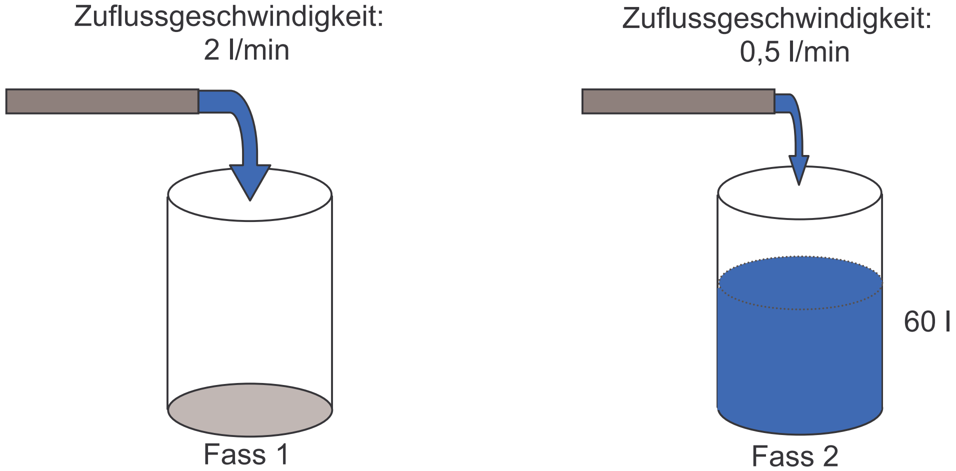
Parkgebühren	
Erste Stunde:	1,00 €
Jede weitere angefangene Stunde:	0,70 €

Bei Ableseproblemen kann auch die Aufgabe 13 genutzt werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 2.1

Zwei Fässer



Jedes der beiden dargestellten Fässer fasst genau 100 l. Sie werden mit Wasser gefüllt. Zu Beginn des Füllvorgangs enthält Fass 2 bereits 60 l. Fass 1 wird mit 2 l/min gleichmäßig gefüllt, Fass 2 mit 0,5 l/min.

Stimmt es, dass Fass 2 zuerst überläuft? Schreibe auf, wie du zu deiner Entscheidung gekommen bist.

Aufgabe 2.1

Lösung

Richtige Antwort: Nein
und
Erklärung, z.B.:

Wertetabelle, z.B.:

Zeit (Minuten)	Fass I (Liter)	Fass II (Liter)
0	0	60
10	20	65
20	40	70
30	60	75
40	80	80
50	100	85

(Kleinere Rechenfehler sind in der Tabelle erlaubt – wichtig ist aber, dass grundsätzlich die eine Spalte jeweils um 20 und die andere um 5 zunimmt.)

Oder:
Berechnung des Zeitpunktes, an dem die Fässer überlaufen,
z.B. funktional:

Fass I: $2x = 100 \mid :2$
$x = 50$ => Fass I läuft nach 50 Min. über.

Fass II: $0{,}5x + 60 = 100 \mid -60 \mid :0{,}5$
$x = 80$ => Fass II läuft nach 80 Min. über.

Oder:
Graphische Lösung

Oder:
Sonstige richtige Antworten mit richtiger Begründung;
z.B.: Fass 2: 40l für 80min und Fass 1: 160l für 80min

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

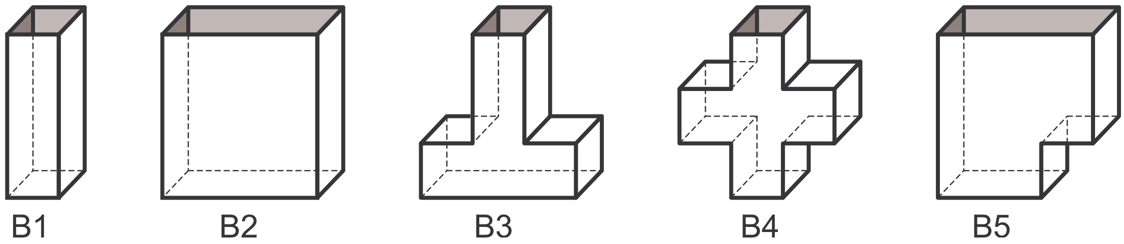
Die Aufgabe ist auf den funktionalen Zusammenhang zwischen Zeit und Füllstand bezogen (L4). Dieser soll auf Grund der Beschreibung und der Darstellung (K4) erfasst werden.
Die Schülerinnen und Schüler analysieren die Aufgabe, um aus den Angaben des Sachzusammenhanges eine Lösungsidee zu entwickeln (K2). Dabei stoßen Sie auf „Restmengen“ (100l und 60l), auf die sich die Füllvorgänge funktional (konkret: linear) beziehen (K3). Die größere Restmenge wird schneller gefüllt, so dass der gefragte Vergleich nur durch ein differenziertes Vorgehen beantwortet werden kann. Die obige Lösung zeigt mögliche Wege, die aus den verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten entstehen. Auf einen soll näher eingegangen werden, weil sowohl Rückwärts- als auch Vorwärtsarbeiten möglich ist. Die Bestimmung der Füllzeiten ist ein Umkehrproblem, was zusätzlich die Schwierigkeit der Aufgabe ausmacht, aber zumindest bei Fass1 auch intuitiv relativ leicht gelöst werden kann (100 Liter werden in 50 Minuten gefüllt). Statt Fass 2 entsprechend zu behandeln, kann auch vorwärts überprüft werden, ob es in 50 Minuten schon übergelaufen ist oder nicht. Man kann natürlich auch entsprechend mit dem Fass 2 beginnen, das in 80 Minuten überläuft und diesen Wert auf das Fass 1 beziehen.
Die auszuführenden Rechnungen bedingen K5.
Schließlich muss das gewählte Vorgehen noch dokumentiert werden (K6).

Man kann in der Aufgabe auch eine „Falle“ sehen, die zu einem kurzschlüssigen **Fehler** führt: Die „Restmenge“ im Fass 2 ist ja viel kleiner, also läuft das Fass 1 auch zuerst über.

Anregungen für den Unterricht

Füllprobleme sind ein sehr geeignetes Feld, um funktionales Denken zu entwickeln, zu schulen und zu festigen. Dabei kann man auch Querschnitte eines Gefäßes (z.B. einer geschwungenen Vase) und dessen Höhe variieren und die Füllhöhe (bei gleichmäßigem Zulauf) als Funktion der Zeit betrachten, wie:

Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.

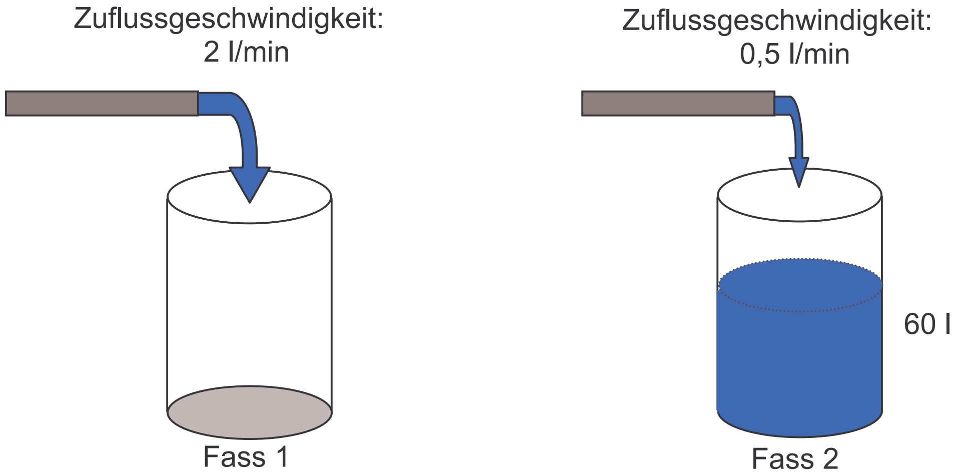


Gib die Höhe h des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Füllzeit t an. Qualitative Betrachtungen und Konstruktionen der Füllgraphen bieten sich hier an. (Vgl. auch /2/, S. 34 Aufgabe 14)

Ebenso können die Schülerinnen und Schüler zu vorgegebenen Graphen entsprechende Gefäßformen zeichnen.

Aufgabe 2.2

Zwei Fässer



Jedes der beiden dargestellten Fässer fasst genau 100 l. Sie werden mit Wasser gefüllt. Zu Beginn des Füllvorgangs enthält Fass 2 bereits 60 l. Fass 1 wird mit 2 l/min gleichmäßig gefüllt, Fass 2 mit 0,5 l/min.

Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem das Wasser in beiden Fässern gleich hoch steht? Schreib auf, wie du zu deiner Antwort kommst.

Lösung

Richtige Antwort: Ja
und
Erklärung, z.B.:

- Ablesen aus der (zu Aufgabe 2.1.) erstellten Wertetabelle
  z.B.: Nach 40 min steht das Wasser in beiden Fässern gleich hoch.

Oder:

- Funktionale Lösung, z. B. durch Aufstellen der Funktionsgleichungen für beide Fässer
  y - Füllmenge und x - Zeit:
  I $y = 2x$
  II $y = 0{,}5x + 60$
  Durch Gleichsetzen folgt:
  $2x = 0{,}5x + 60$
  $1{,}5x = 60$
  $x = 40$
  $y = 2 \cdot 40 = 80$
  Nach 40 Min. Gleichstand bei 80 Litern.

Oder:

- „Stetigkeitsargument“: Der Wasserstand in Fass 1 muss den Wasserstand in Fass 2 „überholen.“ Eine Angabe des Zeitpunktes ist ja nicht explizit verlangt.

Oder:

- Graphische Lösung

Oder:

- Sonstige richtige Antworten mit richtiger Begründung

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Frage, die hier beantwortet werden soll, bezieht sich auf den funktionalen Zusammenhang zwischen Zeit und Füllstand (L4). Die Schülerinnen und Schüler analysieren die Aufgabenstellung an Hand des Textes und der Abbildung (K2, K4), um die Angaben des Sachzusammenhanges mathematisch handhabbar zu machen. Dabei stoßen Sie auf „Füllstände“, die funktional von der Zeit abhängen. Sie können die gegebene Situation unterschiedlich modellieren (K3). (Vgl. die verschiedenen Lösungswege unter 2.1.)
In jedem Fall müssen die Schülerinnen und Schüler mit symbolischen, formalen bzw. technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5). Bei der Dokumentation des Lösungsweges wird ein komplexer mathematischer Sachverhalt dargestellt (K6, AB III).
Die unterschiedlichen Lösungswege aktivieren die angesprochenen Kompetenzen in unterschiedlicher Intensität.
Bei dieser Aufgabenstellung sind auch Trivialantworten möglich, wie:
„Ja, nach z.B. 100 Stunden.“

Anregungen für den Unterricht

Vergleiche die Kommentierung zu Aufgabe 2.1.

Das Entwickeln und Ausschärfen des Funktionsbegriffs und der verständnisvolle Umgang mit diesem ist bekanntlich eines der anspruchsvollsten und auch wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I. Alle drei genannten Darstellungsformen Tabelle, Funktionsterm und Funktionsgraph sollten im Unterricht immer wieder zur Anwendung kommen und in ihren gegenseitigen Beziehungen von den Schülerinnen und Schülern erfahren werden.

Erfahrungsgemäß ist die Verbindung von funktionalen Grundvorstellungen zu abstrakten Funktionstermen bzw. Funktionsgleichungen für viele Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten verbunden. Häufig wird die Abstraktion nicht vollzogen, die in der Verwendung der Argumentvariablen liegt. Hier sollte man auch immer wieder Verbalisierungen der Funktionsvorschrift den formalen Darstellungen gegenüberstellen.

Aufgabe 3

Nachbarschaftshilfe
Drei Schüler erledigen für einen kranken Nachbarn die Gartenarbeit. Fritz hat viel Zeit und fängt schon um 14 Uhr an zu arbeiten. Hans kommt um 15 Uhr und Max um 15:30 Uhr. Um 17 Uhr ist die Arbeit für alle drei erledigt. Der Nachbar gibt den Schülern 50,- € mit der Bitte, das Geld möglichst entsprechend der jeweils geleisteten Arbeitszeit zu verteilen.

Lösung

Fritz :	23,07 €
Hans:	15,38 €
Max:	11,54 €

Rundungsfehler nach unten erlaubt:
Toleranzbereich für die Summe der Arbeitslöhne: 49,4 – 50 €

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Lösen dieser Aufgabe ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen dem zu verteilenden Geldbetrag und der geleisteten Arbeitszeit erkennen (L4). Das setzt ein Sinn entnehmendes Erfassen des Textes (K6) sowie ein Erkennen und Nutzen von proportionalen Zuordnungen (K3) voraus. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II). Es sind Lösungsverfahren auszuführen (K5).

Viele **Fehler** ergeben sich möglicherweise bereits bei der Modellierung, insbesondere beim Beschreiben des proportionalen Zusammenhangs und der Zuordnung der Gesamtarbeitszeit zu 50 €.
Außerdem können Rechenfehler bzw. grobe Ungenauigkeiten in den Ergebnissen auftreten.

Zur weitergehenden **Diagnose** sollten Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg beschreiben.

Anregungen für den Unterricht

Für Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht gelöst haben, können folgende Unterstützungen hilfreich sein:

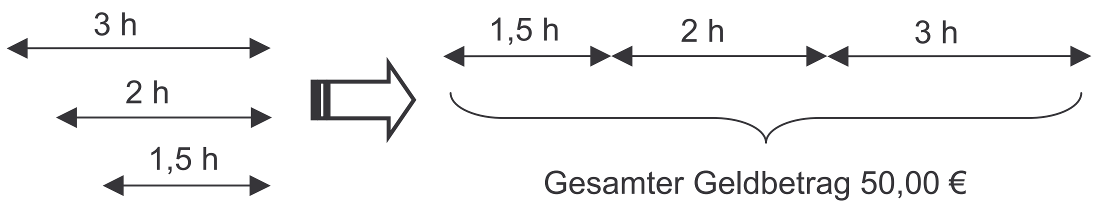
- Veränderung des Geldbetrages (z.B. 135 oder 65 anstatt 50), so dass ein offensichtlicher Zugang entsprechend des proportionalen Zusammenhangs eröffnet wird.
- Darstellung der Aufgabe in Tabellenform

6,5 Stunden	50 €
3 Stunden	
2 Stunden	
1,5 Stunden	

- Bei Schülerinnen und Schülern, die sehr große Schwierigkeiten haben, bieten sich Zahlen an, die das Finden des Lösungsansatzes gegenüber der gegebenen Aufgabe vereinfachen.

5 Stunden	50 €
2,5 Stunden	
1 Stunde	

- Darstellung durch ein Schaubild



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, beschreiben selbst einen ähnlichen Sachverhalt, der dann von allen bearbeitet werden kann. Es bietet sich auch an, den gegebenen Sachverhalt komplexer zu gestalten, so dass die Modellierung anspruchsvoller wird. Das ist möglich, wenn unterschiedlich schwere Gartenarbeiten ausgeführt werden, wie Rasenmähen, Umgraben oder Gießen, und dies bei der Höhe der Bezahlung berücksichtigt werden soll.

Aufgabe 4.1

Verknüpfungen

Für zwei Zahlen x und y soll gelten $x + y = 1$.

Kreuze die richtige Aussage an.

- ☐ Wenn x negativ ist, dann ist auch y negativ.
- ☐ Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.
- ☐ Weder x noch y können negativ sein.
- ☐ Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y positiv.
- ☐ x und y müssen verschiedene Vorzeichen haben.

Lösung

Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y positiv.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Aussagen und damit mathematikhaltige Texte verstehen (K6) und in Beziehung zu der gegebenen Gleichung setzen. Um die geforderte Zuordnung zu finden, können die Schülerinnen und Schüler verschiedene heuristische Strategien anwenden (K2).

In vielen Fällen wird es sich hierbei um das Untersuchen von Beispielen und / oder systematisches Probieren handeln (K5). In der konkreten Durchführung muss mit Termen bzw. Gleichungen gearbeitet werden. Aufgrund der mehrschrittigen Vorgehensweise ergibt sich eine Zuordnung zu AB II.

Insbesondere die Suche nach Beispielen, die zeigen, dass die jeweilige Aussage falsch ist, führt bei den Auswahlantworten zu folgenden Überlegungen:

A1: Wahl einer negativen Zahl a für x ergibt mit $y = 1 - a$ eine positive Zahl. Die Aussage ist also falsch.

A2: Wahl einer Zahl a mit $a > 1$ ergibt mit $y = 1 - a$ eine Zahl kleiner als Null, die Aussage ist also falsch.

A3: Wahl einer negativen Zahl a für x ergibt mit $y = 1 - a$ eine Lösung für a (vgl. A1). Die Aussage ist also falsch.

A4: Wahl einer Zahl a mit $a < 1$ ergibt mit $y = 1 - a$ eine positive Zahl. Auch die Wahl weiterer Zahlen a mit $a < 1$ ergibt mit $y = 1 - a$ eine positive Zahl. Die Aussage ist also möglicherweise richtig.

A5: Wahl einer ganzen Zahl a mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ für x ergibt mit $y = 1 - a$ eine Zahl mit einem von a verschiedenen Vorzeichen. Erst eine Wahl mit $0 < a < 1$ ergibt eine Zahl mit demselben Vorzeichen.

Diese Auflistung zeigt, dass ohne das Vorliegen von Aussagen der Schülerinnen und Schüler **keine Diagnose** der zugrunde liegenden **Fehler** möglich ist. Neben der falschen Interpretation der Aussagen liegen andere häufig auftretende Fehler sicher auch in Mängeln im Umformen der Gleichung oder in Fehlern in der Berechnung begründet. Auch grundsätzliche Fehlvorstellungen, wie:

A1: Verwechselung Summe-Produkt,

A2: Verwechselung Zahl-Betrag der Zahl,

A3: eine Summe ist nur positiv, wenn die Summanden positiv sind,

A5: Betrachtung ausschließlich von ganzen Zahlen

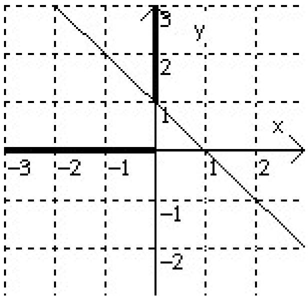
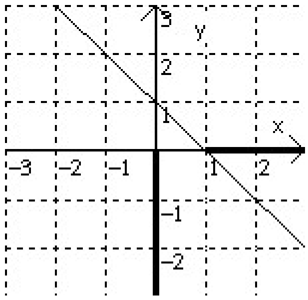
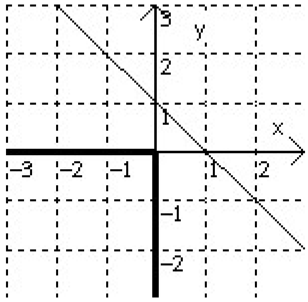
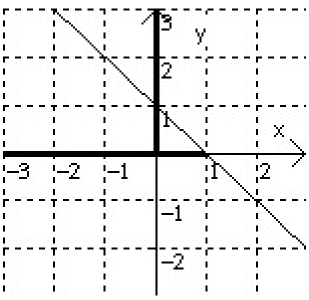
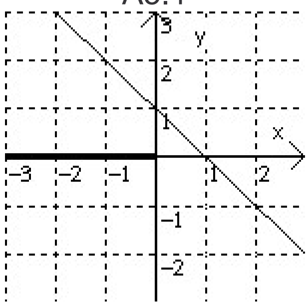
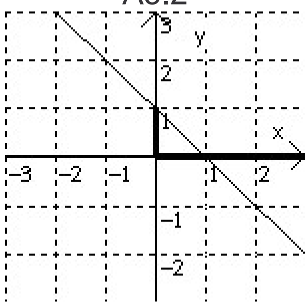
können zu falschen Antworten führen.

Anregungen für den Unterricht

Wenn auch einfache Variationen der Aufgabenstellung (geringfügige Änderungen der Gleichung, z.B. in $x + y = 2$, $x - y = 1$, $x + 2y = 1$ usw.; Hinzufügen einer weiteren Auswahl „Keine der anderen Aussagen ist zutreffend.“) weitere Informationen zur Kompetenzentwicklung liefern können, führen erst Aufträge wie „Begründe deine Entscheidung.“ zu Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die bei falschen Antworten, teils auch bei richtigen Antworten auf Defizite schließen lassen.

Neben möglichen Mängeln im Bereich des Umgangs mit Gleichungen und Termen bietet es sich im Kontext dieser Aufgabe an, Problemlösestrategien aufzuzeigen. Hier ist insbesondere der Übergang vom Untersuchen von Beispielen über das systematische Probieren hin zum allgemeinen Nachweis aufzuzeigen. Aber auch logische Verknüpfungen wie „weder x noch y", „x oder y", „x und y" können hier genauso wie beweislogische Aspekte thematisiert werden.
Dabei sollten sich die Betrachtungen gerade bei dem hier gegebenen Bezug zu funktionalen Zusammenhängen nicht auf die Untersuchung des Terms beschränken.

Insbesondere zur Beschreibung der Allgemeingültigkeit einer Aussage liefert die grafische Darstellung für viele **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, wichtige Hilfen. So liefert die ursprüngliche Aufgabe den durch $y = 1 - x$ gegebenen Zusammenhang. Die Auswahlantworten A1 bis A5 lassen sich wie folgt darstellen:

A1	A2	A3
 Für $x < 0$ gibt es Funktionswerte mit $y > 0$.	 Für $x > 1$ gibt es Funktionswerte mit $y < 1$.	 Sowohl für $x < 0$ als auch für $y < 0$ gibt es entsprechende Werte.
A4	**A5.1**	**A5.2**
 Für alle $x < 1$ ist $y > 0$.	 Für negative x gibt es keine entsprechenden y-Werte.	 Für $0 < x < 1$ ist auch $0 < y < 1$.

Aufgabe 4.2

Verknüpfungen

Für zwei Zahlen x und y soll gelten $x \cdot y = 1$.

Kreuze die richtige Aussage an.

- ☐ Wenn x negativ ist, dann ist y positiv.
- ☐ Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.
- ☐ Weder x noch y können negativ sein.
- ☐ Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ.
- ☐ x und y müssen dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgabe 4.2

Lösung

x und y müssen dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Aussagen und damit mathematikhaltige Texte verstehen (K6) und in Beziehung zu der gegebenen Gleichung setzen. Um die geforderte Zuordnung zu finden, können die Schülerinnen und Schüler verschiedene heuristische Strategien anwenden (K2). In vielen Fällen wird es sich hierbei um das Untersuchen von Beispielen und / oder systematisches Probieren handeln (K5).

In der konkreten Durchführung muss mit Termen bzw. Gleichungen gearbeitet werden, wie aus $x \cdot y = 1$ folgt $x = \frac{1}{y}$. Aufgrund der mehrschrittigen Vorgehensweise ergibt sich eine Zuordnung zu AB II.
Wie in der Kommentierung zu der ähnlichen Aufgabe 4.1 beschrieben, führt z.B. die Suche nach Beispielen, die zeigen, dass die jeweilige Aussage falsch ist, weiter und schließlich zur Lösung.

Häufig auftretende **Fehler** liegen in der falschen Interpretation der Aussagen und sicher auch in Mängeln im Umformen der Gleichung oder in Fehlern in der Berechnung begründet. Wird eine der ersten drei Auswahlantworten gewählt, so liegt vermutlich eine grobe Fehlvorstellung bezüglich der Multiplikation rationaler Zahlen vor. Wenn die Auswahlantwort 4 (Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ.) gewählt wird, so lässt dies in vielen Fällen darauf schließen, dass ausschließlich im Bereich der ganzen Zahlen nach (Gegen-)Beispielen gesucht wurde.

Auch hier ist häufig eine **weitere Diagnose** (siehe unten) notwendig.
(Vgl. auch Kommentar zu Aufgabe 4.3.)

Anregungen für den Unterricht

Ebenso wie bei Aufgabe 4.1 können einfache Variationen der Aufgabenstellung (geringfügige Änderungen der Gleichung, z.B. in $x \cdot y = -1$, $x \cdot 2y = 1$ usw., Hinzufügen einer weiteren Auswahl „Keine der anderen Aussagen ist zutreffend.“) weitere Informationen zur Kompetenzentwicklung liefern. Aber erst Aufträge wie „Begründe deine Entscheidung.“ führen zu Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die Schlüsse auf zugrunde liegende Defizite erlauben.

Liegen die Defizite im Bereich der Multiplikation rationaler Zahlen, insbesondere der negativen, so bieten sich konkrete Übungen hierzu an. Weist die weitere Diagnose auf Probleme im Bereich des Problemlösens oder des Kommunizierens hin, so sind die Anmerkungen zu Aufgabe 4.1 entsprechend zu übertragen. Dies gilt insbesondere für die Veranschaulichung durch die grafische Darstellung des sich ergebenden funktionalen Zusammenhangs.

Aufgabe 4.3

Verknüpfungen

Für zwei Zahlen x und y (y ≠ 0) soll gelten $\frac{x}{y} = 1$.

Kreuze die richtige Aussage an .

- ☐ Wenn x negativ ist , dann ist y positiv .
- ☐ Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.
- ☐ Weder x noch y können negativ sein .
- ☐ Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ .
- ☐ x und y müssen verschiedene Vorzeichen haben .

Aufgabe 4.3

Lösung

Wenn x größer ist als 1, dann ist auch y größer als 1.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Aussagen und damit mathematikhaltige Texte verstehen (K6) und in Beziehung zu der gegebenen Gleichung setzen. Um die geforderte Zuordnung zu finden, können die Schülerinnen und Schüler verschiedene heuristische Strategien anwenden (K2). In vielen Fällen wird es sich hierbei um das Untersuchen von Beispielen und / oder systematisches Probieren handeln (K5).

In der konkreten Durchführung muss mit Termen bzw. Gleichungen gearbeitet werden, wie aus $\frac{x}{y} = 1$ mit ($x \neq 0$) folgt $x = y$.
Aufgrund der mehrschrittigen Vorgehensweise ergibt sich eine Zuordnung zu AB II.

Wie in der Kommentierung zu den ähnlichen Aufgaben (4.1 und 4.2) beschrieben, führt z.B. die Suche nach Beispielen, die zeigen, dass die jeweilige Aussage falsch ist, zu einer richtigen Lösung.

Neben der falschen Interpretation der Aussagen liegen andere häufig auftretende **Fehler** sicher auch in Mängeln im Umformen der Gleichung oder in Fehlern in der Berechnung begründet. Wird eine der Auswahlantworten 1, 3 oder 5 gewählt, so liegt vermutlich eine grobe Fehlvorstellung bezüglich der Division rationaler Zahlen vor. Liegt der **Fehler** jedoch in der Wahl der Auswahlantwort 4 (Wenn x kleiner ist als 1, dann ist y negativ.), so lässt dies in vielen Fällen darauf schließen, dass ausschließlich im Bereich der ganzen Zahlen nach Gegenbespielen bzw. Beispielen gesucht wurde.

Eine **Diagnosemöglichkeit** ergibt sich durch den Vergleich der Antworten zu den Aufgaben 4.1 bis 4.3. Dennoch wird häufig eine **weitere Diagnose** (siehe unten) notwendig sein.

Aufgabe 4.3

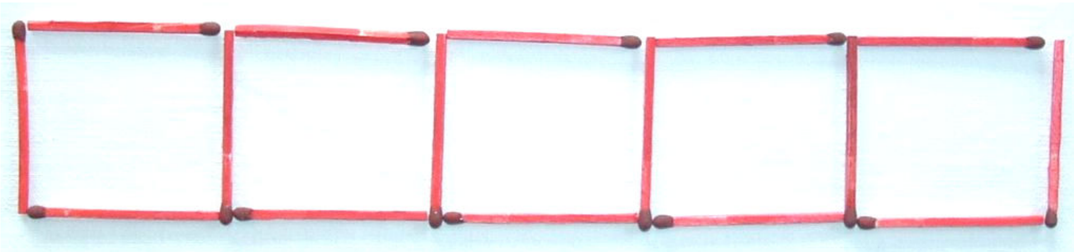
Anregungen für den Unterricht

Ebenso wie bei den Aufgaben 4.1 und 4.2 können einfache Variationen der Aufgabenstellung (geringfügige Änderungen der Gleichung, z.B. in $\frac{x}{y} = -1$, $\frac{x}{y} = 2$ usw., Hinzufügen einer weiteren Auswahl „Keine der anderen Aussagen ist zutreffend.“) weitere Informationen liefern.
Aber erst Aufträge wie „Begründe deine Entscheidung.“ führen zu Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die Schlüsse auf zugrunde liegende Defizite erlauben.

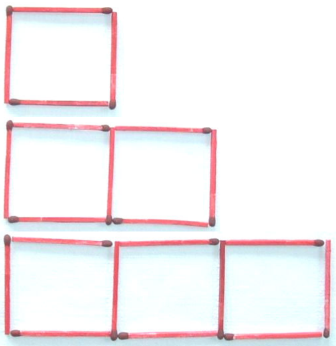
Liegen die Defizite im Bereich der Division rationaler Zahlen, so bieten sich konkrete Übungen hierzu an. Weist die weitere Diagnose auf Probleme im Bereich des Problemlösens oder des Kommunizierens hin, so sind die Anmerkungen zu Aufgabe 4.1 entsprechend zu übertragen. Dies gilt insbesondere für die Veranschaulichung durch die grafische Darstellung des sich ergebenden funktionalen Zusammenhangs.

Aufgabe 5.1

Streichholzkette
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



Schreib jeweils die Anzahl der benötigten Streichhölzer in die freien Kästchen.



Anzahl der Quadrate	Anzahl der Streichhölzer
1	4
2	7
3	
4	

Lösung

- bei 3 Quadraten: 10 Streichhölzer
- bei 4 Quadraten: 13 Streichhölzer

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In dieser Aufgabe soll erkannt werden, dass ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Quadrate in der Kette und der Anzahl der zum Legen notwendigen Streichhölzer besteht (L4). Die Schülerinnen und Schüler nutzen eine vertraute Darstellung zum Erfassen der wesentlichen Informationen (K4). Die Lösung kann durch einfaches Abzählen an der Zeichnung bzw. bei vier Quadraten durch gedankliches Ergänzen ermittelt werden (AB I).

Zu erwarten sind bei dieser Aufgabe entweder **Fehler** durch Flüchtigkeit (Verzählen) oder durch vorschnelles Schließen auf 4 Hölzchen je Quadrat.

Die letztgenannte **Diagnose** liegt nahe, wenn ausschließlich Vielfache von 4 als Anzahlen der Streichhölzer auftreten. Schülerinnen und Schüler sollten dann im Unterricht aufgefordert werden, ihre Gedankengänge zu verbalisieren.

Anregungen für den Unterricht

Das Erfassen von mathematischen Zusammenhängen muss vielfältig geübt werden. Es wird immer Schülerinnen und Schüler geben, die alle drei Ebenen des Erkenntnisprozesses durchlaufen müssen, um eine Erkenntnis verallgemeinert zu formulieren.
Als mögliche Variation dieser Aufgabe kann die geometrische Form verändert werden, z.B. Ketten mit Dreiecken oder Sechsecken.

Zur Differenzierung für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht gelöst haben**, kann zunächst erfragt werden, wie viele Hölzchen jeweils hinzukommen. Dazu sollen Hölzchen bereitgestellt werden, um eine Kette selbstständig legen zu können. Analog zur Aufgabenstellung sollen Vermutungen auch für 5, 6, ...Quadrate geäußert und konkret handelnd überprüft werden.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben**, sind folgende Variationen möglich:

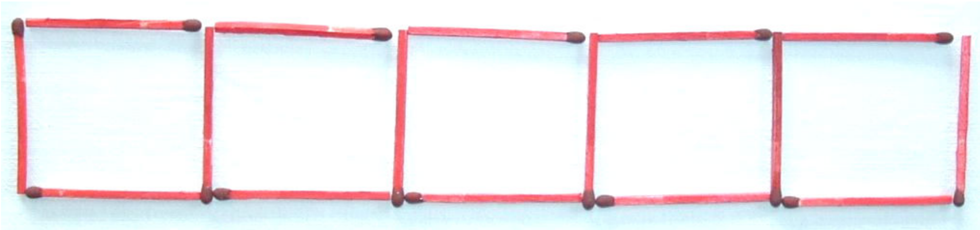
I. Vorgabe der Aufgabe als Wortvorschrift:
“Baue aus 10 gleichen Hölzchen eine Kette aus drei Quadraten.
Wie viele Hölzchen brauchst du für eine Kette aus vier (fünf, sechs, ...) Quadraten?“

II. Vorgabe einer Kette mit einer bestimmten Anzahl von Hölzchen:
“Stelle dir eine Kette mit Quadraten aus 13 Hölzern vor. Wie viele Quadrate gehören zur Kette?“

III. Öffnen der Aufgabe:
Erfinde neue „wachsende Streichholzmuster“ (eventuell in Partnerarbeit) und ordne jedem weiteren Schritt die Anzahl der Streichhölzer zu, die zum Anhängen der nächsten Figur benötigt wird.

Aufgabe 5.2

Streichholzkette
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



Wie viele Streichhölzer werden für 12 solche Quadrate benötigt?
Kreuze die richtige Antwort an.

- ☐ 23
- ☐ 24
- ☐ 36
- ☐ 37
- ☐ 48

Lösung

37

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In der Aufgabe muss der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Quadrate in der Kette und der Anzahl der zum Legen notwendigen Streichhölzer erkannt und genutzt werden (K5, L4). Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Darstellung Informationen zur Aufgabenstellung (K4). Die Lösung kann nicht durch einfaches Abzählen ermittelt werden; das Anwenden des erkannten Zusammenhangs ist notwendig (K2, AB II).

Bei dieser Aufgabe werden **Fehler** durch vorschnelles Schließen auf 4 Hölzchen für jedes hinzukommende Quadrat auftreten.

Diese Fehlvorstellungen sind durch die Lösungen 36 bzw. 48 zu identifizieren (**Diagnose**). Schülerinnen und Schüler sollten im Unterricht aufgefordert werden, ihre Überlegungen darzulegen. Systematisches Skizzieren kann helfen, den zentralen Lösungsgedanken zu finden.

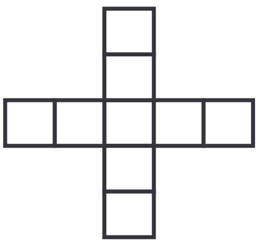
Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe nicht lösen konnten, sollten entsprechend angeregt werden, Zusammenhänge beim Bau der Kette selbst zu erkennen:

- Wie viele Hölzchen sind nötig, um immer wieder das nächste Quadrat anzulegen, wenn das erste bereits gelegt ist? Oder:
  Vervollständige. „Wenn das erste Quadrat mit _ Hölzchen gelegt ist, benötigt man noch _ Hölzchen für das nächste Quadrat, für das nächste wieder _ Hölzchen usw.“
- Vervollständige. „Wenn 12 Quadrate in einer Kette sein sollen, legt man zuerst das erste Quadrat mit Hilfe von _ Hölzchen. Dann wird noch 11 Mal ein Quadrat mit Hilfe von _ Hölzchen ergänzt. Zusammen sind es dann 4 + 11 x _ Hölzchen.“
- Vervollständige. „Eine Kette von 5 Quadraten (siehe Abb.) hat an den beiden langen Seiten je __ Holzstäbchen. Zwischen den beiden langen Seiten sind 1 + _ Holzstäbchen. Insgesamt sind es dann 5 + 5 + _ = __ Holzstäbchen.“
  Bilde die Sätze für 12 Quadrate.

Unterstützend kann die Streichholzkette systematisch bis zu den 12 Quadraten weiter gebaut oder gezeichnet werden. Die Anzahl der notwendigen Hölzer sollte solange in einer Tabelle protokolliert werden, bis die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang entdeckt haben.

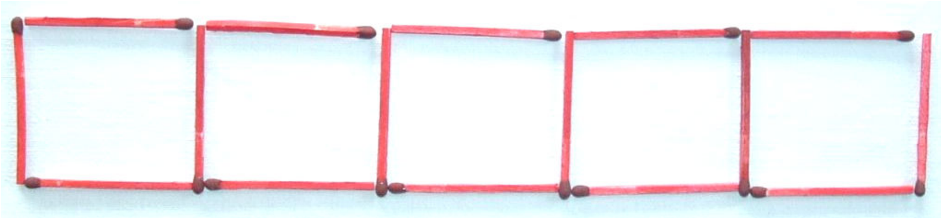
Schülerinnen und Schüler, die gegebene Aufgabe gelöst haben, können Umkehraufgaben zur gegebenen Aufgabe (ähnlich Aufgabe 5.1) gestellt werden. Es kann die Erweiterung auf komplexere Figuren erfolgen, wie:
Setze die Figur an allen vier Seiten des Ausgangsquadrates mit je einem Quadrat fort.
Wie viele Streichhölzer werden für jeweils eine solche Fortsetzung benötigt?
Gib die Anzahl der Streichhölzer in der gesamten Figur nach vier solchen Fortsetzungen an.



Dosenmauern oder sogar Dosenpyramiden bieten weitere Möglichkeiten für das Untersuchen und Erkennen derartiger Zusammenhänge.

Aufgabe 5.3

Streichholzkette
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



Gib eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl k der Quadrate und der Anzahl s der benötigten Streichhölzer allgemein beschreibt.

s = ______________________________

Lösung

$s = 3k + 1$

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Funktionaler Zusammenhang (L4)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler sollen bei der gegebenen Aufgabe den Zusammenhang zwischen der Anzahl k der Quadrate in der Kette und der Anzahl s der Hölzchen mit Hilfe einer Gleichung beschreiben (K2). Das kann mittels einer Tabelle oder an Hand der Abbildung (K4) vorbereitet werden. Erwartet wird die Erkenntnis, dass zum ersten Quadrat 4 und zu jedem weiteren Quadrat nur noch 3 Hölzchen erforderlich sind (also $4 + 3 \cdot (k - 1) = 3k + 1$) bzw. die beiden „Außen" - Längen mit jeweils k Hölzchen und die inneren k + 1 Hölzchen ergeben $k + k + k + 1 = 3k + 1$. Diese Verallgemeinerung rechtfertigt AB III.
Die eigene kritische Auseinandersetzung mit den Werten für k und s aus der Gleichung und aus der Abbildung erfordert Verstehen und Anwenden der formalen Sprache (K5).

Aufgabe 5.3

Die Ergebnisse lassen Rückschlüsse zu auf einige häufig zu erwartende **Fehler** in den Überlegungen von Schülerinnen und Schülern, wie:

- Jedes Quadrat hat vier Seiten, also gilt: „s = 4k“.
- „s = k : 4“, was zusätzlich durch falsche Zuordnung der Variablen zustande kommt.

Anregungen für den Unterricht

Durch die Aufforderung, dargestellte Zusammenhänge zu erkennen und durch Gleichungen auszudrücken, wird das Verallgemeinern geübt. Weitere vorgegebene oder von Schülerinnen und Schülern selbst gefundene Zuordnungen bei Figuren wie Dreiecken, Rechtecken oder Fünfecken bieten sich zur Differenzierung oder Weiterarbeit an. So lassen sich Terme, bezogen auf Figurenketten, nicht nur für Anzahlen, sondern auch für Längen, Umfänge oder Flächeninhalte aufstellen.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, werden aufgefordert, schrittweise zu addieren und rekursiv weitere Zahlenpaare (k; s) zu finden. Mögliche Wege sind u. a.:

- Mit 4 Hölzchen beginnen und immer 3 weitere anbauen
  → 4 + 3 + 3 + 3 +…+ 3.
- Mit 1 Hölzchen beginnen und immer 3 weitere anbauen
  → 1 + 3 + 3 + 3 +…+ 3.
- Immer 3 Hölzchen anbauen und am Ende noch 1 Holz hinzufügen
  → 3 + 3 + 3 + 3 +…+ 1.

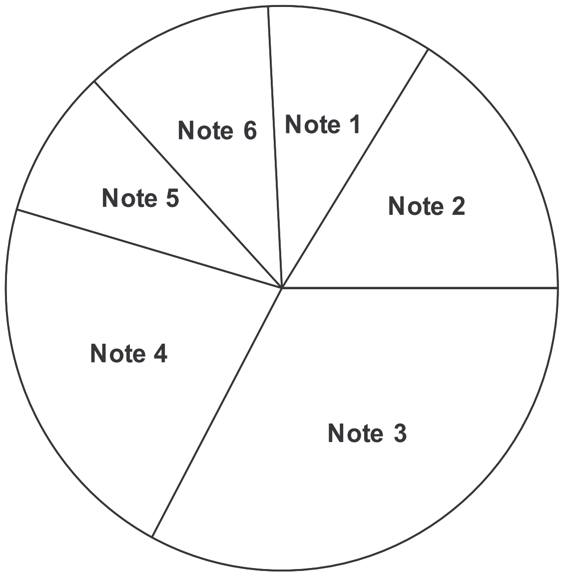
Zur Unterstützung des selbstständigen Verallgemeinerungsprozess sollten Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, vorgegebene Gleichungen zu analysieren und zu entscheiden, ob sie den Sachverhalt richtig widerspiegeln.
„s = 4 + (k – 1) · 3“ , „s = 1 + k · 3“ , „s = k · 3 + 1“ , „s = k · 4 – (k – 1)“ , „s = 4k“
Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme sollte abschließend die erwartete Lösung herbeigeführt werden. In jedem Fall sollte eine Legende (s ist die Anzahl der Hölzchen und k ist die Anzahl der Quadrate) die Verwechslung der Variablen ausschließen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Gleichung gefunden haben**, kann die Fragestellung umgekehrt werden, wie:
Wie viele Quadrate kann eine Streichholzkette höchstens haben, wenn 100 Streichhölzer dafür bereit liegen?
Wie viele Streichhölzer bleiben dann als nicht mehr nutzbarer Rest übrig?
(Vgl. auch Aufgabe 5.2 in diesem Heft.)

Aufgabe 6

Noten

Das Kreisdiagramm zeigt die Notenverteilung einer Prüfung im Fach Englisch.



Welche der folgenden Aussagen zu diesem Kreisdiagramm ist richtig?

Kreuze an.

- ☐ Es gibt öfter die Note 2 als die Note 4.
- ☐ Ein Drittel der Schülerinnen und Schüler hat die Note 1 oder die Note 2.
- ☐ Mehr als 50% der Schülerinnen und Schüler haben eine bessere Note als die Note 4.
- ☐ Weniger als ein Viertel der Schülerinnen und Schüler haben die Note 3.

Aufgabe 6

Lösung

Mehr als 50 % der Schülerinnen und Schüler haben eine bessere Note als die Note 4.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufbereitung von Daten in einem Kreisdiagramm und umgekehrt die Interpretation so aufbereiteter Daten (L5) ist ein unverzichtbarer Teilbereich der Leitidee „Daten und Zufall“. Dahinter steckt immer auch der Umgang mit Proportionalitäten.

Fehler können entstehen, wenn
- Kreisanteile nicht richtig in Beziehung zum Ganzen gesetzt werden können, also das Denken in Proportionalitäten nicht beherrscht wird oder
- Übersetzungsprobleme hinsichtlich "mehr als", "besser als", "weniger als", "oder", "öfter als" auftreten.

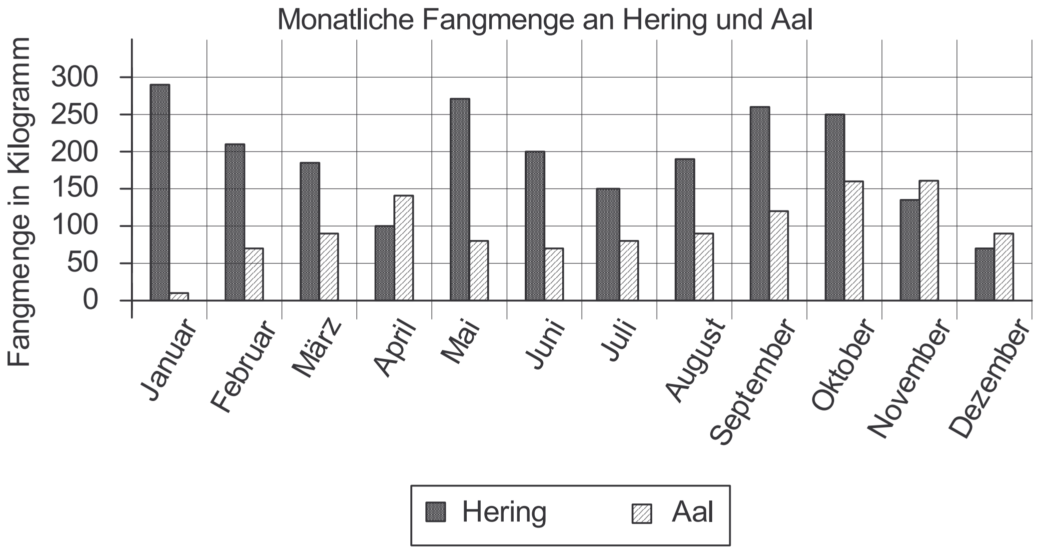
Anregungen für den Unterricht

Ausgehend von dem gegebenen Kreisdiagramm können Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, andere Darstellungen für diese Daten zu entwickeln. Hierfür sollten auch die Möglichkeiten von Tabellenkalkulationen genutzt werden.
Der Vergleich verschiedener so entstandener Darstellungsformen kann sich u.a. darauf beziehen, wie gut sie sich jeweils zur Prüfung der vorliegenden Auswahlantworten eignen.
Mit Bezug auf die gegebenen Auswahlantworten können Schülerinnen und Schüler auch aufgefordert werden, diese so zu verändern, dass wahre Aussagen entstehen (vgl. auch /1/, Seite 44 - 45).

Aufgabe 7

Fisch

Das Diagramm zeigt die Menge gefangenen Fischs in jedem Monat .



In welchem Zeitraum ist die monatliche Fangmenge an Aal im Vergleich zum Vormonat laut Diagramm prozentual am meisten angestiegen ?

Kreuze an.

☐ von März nach April

☐ von April nach Mai

☐ von September nach Oktober

☐ von Januar nach Februar

Lösung

von Januar nach Februar

Aufgabe 7

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Ausgehend von der Fragestellung sollen die für die Beantwortung relevanten Informationen aus dem Diagramm herausgelesen werden (L5, K4) und unter dem Gesichtspunkt des stärksten prozentualen Anstiegs bewertet werden (K5). Die vier vorgegebenen Antworten reduzieren den Aufwand. Das mehrschrittige Vorgehen (die benötigten Informationen sind auszuwählen, abzulesen und zu bewerten) bedingt (AB II).

Bei der Bearbeitung können vor allem folgende **Fehler** auftreten:

- Beim Ablesen der benötigten Informationen aus dem Diagramm können die Angaben für Hering und Aal verwechselt werden. Dies würde zum Ankreuzen des 2. Kästchens führen.
- Bei einer Verwechslung des absolut größten Wertes mit dem Wert des größten Anstiegs würde das 3. Kästchen angekreuzt werden.
- Die Verwechslung des absoluten Anstiegs mit dem prozentualen würde bei genauem Ablesen zur selben Antwort (4. Kästchen) führen, bei ungenauem Ablesen zum Ankreuzen des 1. Kästchens.

Zur **Diagnose** können aus den fehlerhaften Antworten, natürlich mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, wie oben erwähnt, die zugrunde liegenden Fehlvorstellungen vermutet werden und durch Nachfragen bzw. Aufforderungen zum Beschreiben des Bearbeitungsprozesses bestätigt oder widerlegt werden.

Anregungen für den Unterricht

Der Umgang mit Diagrammen und Statistiken stellt in der heutigen Zeit eine wichtige Fähigkeit dar und sollte im Unterricht immer wieder thematisiert werden. Während in den unteren Jahrgangsstufen der Sekundarstufe I die Erstellung und Analyse einfacher Diagramme im Vordergrund stehen wird, sollen sich in den folgenden Jahrgangsstufen die Schülerinnen und Schüler mit aufwendigeren statistischen Untersuchungen befassen und komplizierte Diagramme kritisch analysieren.
Es gibt zwei Schwerpunkte bei der Arbeit mit Diagrammen und Statistiken:

- Vorliegende Diagramme lesen und analysieren:
  Die Schülerinnen und Schüler sollen sich kritisch mit Diagrammen und Grafiken z.B. aus den Medien auseinandersetzen. Dabei geht es aber nicht nur darum, Verfälschungen zu erkennen, sondern zunächst um Verständnis.

- Statistische Untersuchungen planen, durchführen, auswerten und darstellen: Hierzu können die Schülerinnen und Schüler selbstständig z.B. die Freizeitgewohnheiten von Kindern und Jugendlichen in Bezug auf Alter oder Geschlecht statistisch untersuchen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es empfehlenswert, ähnliche Fragestellungen zu übersichtlicheren Diagrammen zu stellen. Dies könnten hier zum Beispiel Diagramme mit nur einer Fischart oder weniger Datenpunkten sein.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, formulieren selbst weitere Fragestellungen, die sie mit Hilfe des gegebenen Diagramms beantworten können, wie:
- Entwicklung der Fangmengen beider Fischarten.
- Berechnung und Interpretation der Quartalsfangmengen o.ä.

Weitere Aufgaben zum Thema Statistiken und Diagramme sind in /1/, S. 57 - S.68.

Ähnliche Aufgaben in diesem Heft sind Aufgabe 6 „Noten“ und Aufgabe 9 „Preisänderungen im Mobilfunk“.

Aufgabe 8

Schultaschen

Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 5a sitzen in Tischgruppen zu jeweils 5 oder 6 Schülerinnen und Schülern. Heute werden im Unterricht die Schultaschen gewogen.

Paul kommt zu spät. Die anderen aus seiner Tischgruppe haben bis dahin schon ihre Taschen gewogen: 3,7 kg, 4,6 kg, 4,8 kg, 5,2 kg, 5,3 kg.

Mit Pauls Schultasche ergibt sich in dieser Tischgruppe ein durchschnittliches Gewicht von 4,9 kg.

Welches Gewicht hat Pauls Schultasche?

_________ kg

Lösung

5,8 kg

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe beschreibt, dass eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern Daten erheben und diese durch die Bestimmung des arithmetischen Mittels auswerten (L5). Die Aufgabe bietet allerdings einen unrealistischen Kontext, denn in der Realität wird man in der Aufgabensituation Pauls Tasche einfach auswiegen. Daher wäre die Reduktion auf eine innermathematische Aufgabe "ehrlicher". Um die Aufgabe zu lösen, können Schülerinnen und Schüler verschiedene Strategien anwenden (K2), dementsprechend modellieren sie (K3) und führen Rechnungen aus (K5). Das führt zu unterschiedlichen Lösungswegen, die mehrschrittig sind (AB II):

- Rückwärtsrechnen mit der Formel zum arithmetischen Mittel:
  Um die Aufgabe so zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler das Verfahren zur Berechnung des arithmetischen Mittelwerts verstanden haben (K5), um es umkehren zu können. Nach der Multiplikation von 4,9 kg mit 6 erhalten sie das Gesamtgewicht von 29,4 kg, wovon die gegebenen 5 Einzelgewichte zu subtrahieren sind, um als Rest das gesuchte Gewicht von 5,8 kg zu erhalten.
- Systematische Probieren und Überprüfen:
  Aus den gegebenen Werten lässt sich abschätzen, dass Pauls Tasche relativ schwer sein muss. Eine Überprüfung mit Hilfe des Taschenrechners kann schnell erfolgen. Hier bietet es sich an, den gegebenen Mittelwert von 4,9 kg als auf eine Dezimalstelle gerundetes Ergebnis zu interpretieren. Vor dem Runden muss die Lösung im richtigen Intervall [4,85 ; 4,95) liegen; dies ist der Fall bei allen Werten von 5,5 kg bis 6,0 kg für Pauls Schultasche.

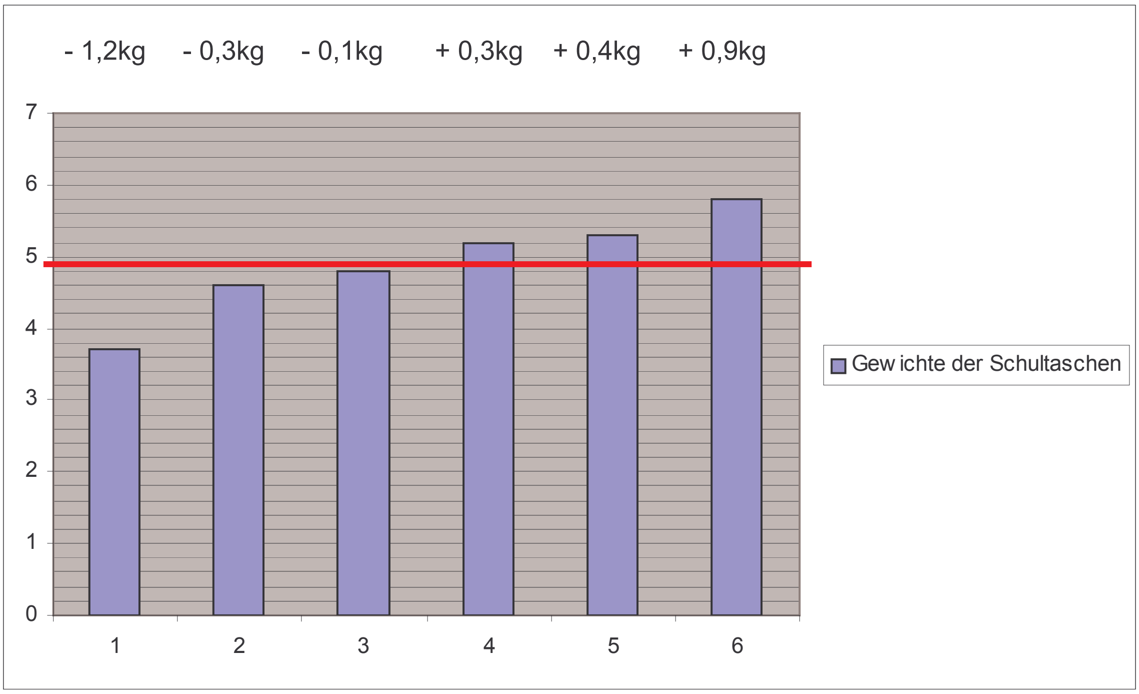
Gewicht von Pauls Schultasche	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1
Gesamtgewicht aller Schultaschen	29,0	29,1	29,2	29,3	29,4	29,5	29,6	29,7
Mittelwert (gerundet auf 2 Stellen)	4,83	4,85	4,87	4,88	4,9	4,92	4,93	4,95

- Berechnung der Abweichungen vom Mittelwert:
  Die ersten drei Gewichte sind zu klein, insgesamt fehlen 1,6 kg bis zum Mittelwert von 4,9 kg. Die beiden anderen sind zusammen 0,7 kg zu groß. Also muss das letzte Gewicht 0,9 kg größer sein als der Mittelwert, was insgesamt 5,8 kg ergibt. Dieser Ansatz erfordert einen flexiblen Umgang mit der Definition des Mittelwertes.
- Korrektur des Teil-Mittelwertes:
  Zunächst wird der Durchschnitt der 5 gegebenen Werte berechnet (4,72 kg). Die Abweichung zum angestrebten Mittelwert beträgt pro Schüler 0,18 kg. Für 5 Schüler sind das also 0,9 kg, die zur Erreichung des Mittelwertes fehlen und die daher zu den 4,9 kg addiert werden müssen. Das Defizit von 0,9 kg bei den ersten 5 gewogenen Schultaschen wird also gerade durch das entsprechende „Übergewicht“ von Pauls Schultasche aufgewogen.

Um **Fehler** relativ sicher **diagnostizieren** zu können, sollte eine (schriftliche oder mündliche) Dokumentation des Lösungsweges eingefordert werden.

Anregungen für den Unterricht

Bei Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, ist zunächst an einfachen Beispielen zu klären, ob das arithmetische Mittelwerte in seiner Bedeutung verstanden wird und das Verfahren zur Berechnung ausgeführt werden kann.
An grafischen Visualisierungen kann verdeutlicht werden, dass sich die Abweichungen nach oben und unten ausgleichen, so auch an der gegebenen Aufgabe.

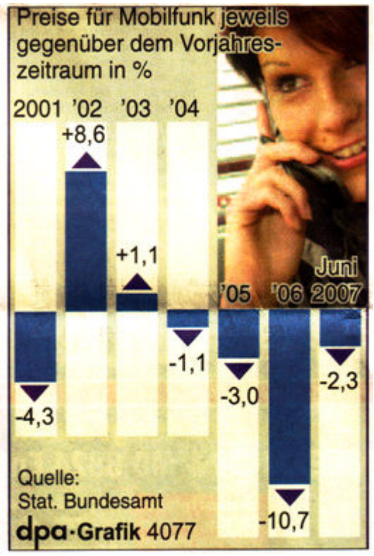


Auch die Modellierung mit direkter Anwendung der Formel führt zum Ziel: (3,7 + 4,6 + 4,8 + 5,2 + 5,3 + x) : 6 = 4,9 (vgl. oben erstgenanntes Lösungsverfahren). Die Strategien „Rückwärtsrechnen“ und „Umkehren des Rechenverfahrens“ sollten bewusst gemacht werden.
Beim systematischen Probieren sollte insbesondere auf eine nachvollziehbare Argumentation geachtet werden. Wenn durch ein Ausschlussverfahren zunächst die Anzahl der möglichen Lösungen so eingeschränkt wird, dass ein Probieren mit wenigen Schritten zum Erfolg führt, ist damit eine wichtige Lösungsstrategie erfasst. Im Unterricht kann hier auch eine Tabellenkalkulation eingesetzt werden.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe bearbeitet haben, können ihr Vorgehen erläutern und mit anderen vergleichen oder ein weiteres Lösungsverfahren finden.

Aufgabe 9

Preisänderungen im Mobilfunk



In dem Diagramm wird dargestellt, wie sich die Preise für Mobilfunk im Vergleich zum Vorjahr prozentual geändert haben. Zum Beispiel sind 2002 die Preise im Vergleich zu 2001 um 8,6 % angestiegen, während 2006 die Preise im Vergleich zu 2005 um 10,7 % gefallen sind.

9.1: Frau Neukirchen hatte im Jahr 2000 Mobilfunkkosten von 720 Euro. Was hätte sie nach den Angaben der Grafik für diese Rechnung in den Jahren 2001 und 2002 bezahlt?

9.2:
Um wie viel Prozent sind die Preise von 2002 gegenüber den Preisen von 2000 gestiegen?
Kreuze an.

- ☐ ca. 3,9 %
- ☐ ca. 4,3 %
- ☐ ca. 8,6 %
- ☐ ca. 12,9 %

9.3:
Marvin behauptet: „2004 waren die Preise genauso hoch wie 2002.“
Julia sagt: „Nein, sie waren niedriger.“
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

Aufgabe 9

Lösung

9.1:
2001: 689,04 Euro
2002: 748,30 Euro

9.2:
ca. 3,9 %

9.3:
Antwort: „Julia hat recht
und
nachvollziehbare Begründung.

Die Begründung muss explizit oder implizit beinhalten, dass der Grundwert zu Beginn des Jahres 2003 (vor der Preiserhöhung um 1,1 %) niedriger ist als im Jahre 2004 (vor der Preissenkung um 1,1 %).
Z.B.:
Julia hat recht, denn: Nach der Preiserhöhung 2003 liegt bei der Preissenkung um 1,1% in 2004 ein höherer Grundwert vor als im Jahre 2002 vor der Preiserhöhung um 1,1%. Es wird also mehr gesenkt als vorher angehoben. Demnach waren die Preise in 2004 niedriger als im Jahre 2002.
Oder:
Julia hat recht, denn $1 \cdot 1{,}01 \cdot 0{,}989 = 0{,}99889$.
Oder:
Auch die Berechnung eines Beispiels wird als richtig gewertet, z.B.:
Ich nehme an, dass Frau Neukirchen im Jahre 2002 eine Rechnung in Höhe von 100 € bezahlen musste. Dann betrug der Rechnungsbetrag 101 € (100 € · 1,01) im Jahr 2003 und 99,89 € (101 € · 0,989) im Jahr 2004. Demnach war der Rechnungsbetrag im Jahr 2004 geringer als im Jahr 2002.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee		**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	9.1 9.2 9.3	**Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)**
	9.3	zusätzlich: **Mathematisch argumentieren (K1)**
Anforderungsbereich		**AB II**

Aufgabe 9

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das Lösen dieser Aufgaben fordert, Text und Grafik Sinn erfassend gemäß der Fragestellungen zu lesen und die relevanten Angaben zu entnehmen (L5, K6). Die Auswertung der gegebenen realen Situation verlangt einen Modellierungsprozess mit Text und Grafik. Im Ergebnis werden die Prozentsätze und die zugehörigen Grundwerte sowie die erforderliche Rechenvorschrift erkannt (K3, K4). Beim Rechnen liegt eine besondere Schwierigkeit im Wechsel zwischen Verminderung und Erhöhung auf der Grundlage der gegebenen Prozentsätze (K5). Äußerungen zu mathematischen Inhalten sind bei Aufgabe 9.3 begründet zu bewerten (K1).

Häufig ist als **Fehler** zu erwarten, dass der für ein bestimmtes Jahr berechnete Betrag nicht als neuer Grundwert gedeutet wird. (Bei Aufgabe 9.1 ist es das Jahr 2001). Dieser Fehler zeigt sich bei Aufgabe 9.2 dann daran, dass das zweite Lösungskästchen angekreuzt wurde. Sind „ca. 8,6%" als Lösung angegeben, ist der Preisvergleich zum falschen Jahr, nämlich zu 2001, hergestellt worden. Beim Ankreuzen des letzten Lösungskästchens wurden die Beträge bezüglich der Veränderung addiert. Dabei bleibt unberücksichtigt, dass es sich zuerst um eine Verminderung und anschießend um eine Erhöhung des Prozentsatzes handelt.
Bei Aufgabe 9.3 ist wahrscheinlich häufig zu erwarten, dass die Argumentationskette nicht schlüssig ist.

Wenn Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen im nachfolgenden Unterricht beschreiben, kann die **Diagnose** bei den Aufgaben 9.1 und 9.2 mit größerer Sicherheit erfolgen. Bei Aufgabe 9.3 sollte die vorgenommene Argumentation zusätzlich erläutert werden.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben nicht gelöst haben, können zunächst anhand von weniger komplexen Diagrammen, Grafiken und Schaubildern im Unterricht das Entnehmen von Informationen üben. Dabei ist auch darauf zu achten, dass die Darstellungen klar, übersichtlich und somit gut lesbar sind. Sind darüber hinaus Schwierigkeiten im Bereich der Berechnung der jeweiligen Prozentwerte (vgl. oben) aufgetreten, ist besonderer Wert darauf zu legen, dass der jeweilige Grundwert, auf den sich die Aussage bezieht, von den betreffenden Schülerinnen und Schülern identifiziert werden kann. Wird dann zuerst mit „einfachen“ Prozentsätzen gerechnet, kann verstärkt am inhaltlichen Verständnis gearbeitet werden.
Um bei Aufgabe 9.3 ein tiefgehendes Verständnis des vorliegenden Sachverhaltes zu erreichen, sollte unter Rückgriff auf einfaches Zahlenmaterial das Argumentieren in den Vordergrund gestellt werden. Dabei spielt der hier vorgegebene Fall, nämlich die Erhöhung und Verringerung um denselben Prozentsatz, neben zahlreichen anderen Beispielen eine besondere Rolle.

Schülerinnen und Schüler, die bei den Aufgaben 9.1 und 9.2 keine Schwierigkeiten hatten, können den Sachverhalt in einer Excel-Tabelle darstellen und anschließend geeignete Grafiken als Übungsmaterial für die Mitschülerinnen und Mitschüler erstellen.
Schülerinnen und Schüler, die bei Aufgabe 9.3 keine Schwierigkeiten hatten, können als Lernpartner für Mitschülerinnen und Mitschüler zur Verfügung stehen, um auf der Basis der Sprache unter Gleichaltrigen und unter Rückgriff auf selbst gewählte Beispiele die eigene Erkenntnis anschaulich zu kommunizieren.

Aufgabe 10

Grüngelber Würfel
Jede der sechs Flächen eines Würfels ist entweder gelb oder grün angestrichen. Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, dass gelb oben liegt.

Kreuze an, wie viele Flächen grün sind.

- ☐ eine
- ☐ zwei
- ☐ drei
- ☐ vier
- ☐ fünf

Lösung

vier Flächen

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das einfache Würfeln ist als übliches Zufallsexperiment den Schülerinnen und Schülern auch aus dem Alltag vertraut. Sie müssen eine Grundvorstellung von der Angabe einer Wahrscheinlichkeit haben, um die gegebene Zahl $\frac{1}{3}\left(=\frac{2}{6}\right)$ richtig zu deuten (L5, K5). Die Frage ist allerdings auf das komplementäre Ereignis gerichtet. Dies erfordert ein zweischrittiges Vorgehen (AB II). Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Strategien, um das gegebene Problem zu bearbeiten (K2).

Der wahrscheinlich am häufigsten zu erwartende **Fehler** („zwei“) kann darauf zurückgeführt werden, dass die betreffenden Schülerinnen und Schüler die vorgegebene Wahrscheinlichkeit zwar richtig interpretiert (der Würfel hat zwei gelbe Felder), aber in der Fragestellung gelb mit grün verwechselt haben

(„Lesefehler“) oder einfach unkonzentriert antworten, ohne bis zum Ende überlegt zu haben. Dabei könnten sie durchaus in der Lage sein, komplementäre Ereignisse zu berechnen.
Eine andere Möglichkeit, die zum Fehler „zwei“ führt, ist, dass die Wahrscheinlichkeit für grün richtig mit $\frac{2}{3}$ bestimmt wird, dann aber der Zähler („günstige Fälle“) übernommen wird, ohne den Bruch entsprechend zu erweitern.
Die anderen Distraktoren lassen auf eine grundlegende Fehlvorstellung zum Begriff Wahrscheinlichkeit oder willkürliches Auswählen schließen.

Für eine detaillierte **Diagnose** ist ein Gespräch im nachfolgenden Unterricht geeignet.

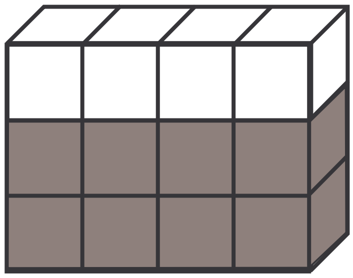
Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst einfache Würfelexperimente durchführen, um von relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeiten zu abstrahieren. Dann kann die Formel für die Wahrscheinlichkeit („günstige“ zu „mögliche“ Fälle) besprochen und nachvollzogen und dabei auf Komplementärereignisse eingegangen werden. Um an das Grundverständnis mit Brüchen anzuknüpfen, kann etwa die Aufgabe „Färbe $\frac{1}{3}$ der Felder“ in folgenden Bildern den Schritt zum Würfel über Würfelnetze nahe bringen:

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können zu gegebenen Wahrscheinlichkeiten weitere Simulationen angeben (auch mit anderen Zufallsexperimenten). Beispielsweise kann die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ simuliert werden durch Drehen eines passend eingefärbten Glücksrades, durch Würfeln mit einem Tetraeder oder Oktaeder, durch Ziehen von Karten aus einem Kartenspiel (vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo oder 4 Symbole), durch Ziehen von Kugeln aus einer passend gemischten „Urne“, durch zweifachen Münzwurf.

Um zusätzlich die Raumanschauung zu schulen, können aus Würfeln oder Quadern zusammengesetzte Körper benutzt werden, bei denen der Anteil gefärbter Flächen zu ermitteln ist (innen liegende Flächen bleiben ungefärbt).

Beispiel:
Der nebenstehende Körper wird mit den unteren beiden Dritteln in graue Farbe getaucht. Dann werden alle Teilwürfel voneinander getrennt und in eine Schale gelegt.
Ohne Hinzusehen wird ein Teilwürfel gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat dieser Teilwürfel keine / eine / zwei / drei / vier / fünf / sechs graue Seiten? Die innen liegenden „Klebeflächen" bleiben dabei ungefärbt.



Eine weitere Aufgabenstellung findet sich in /2/, S. 21, Aufgabe 4.

Aufgabe 11

Der sechste Wurf

Ein normaler Spielwürfel wird geworfen. In fünf aufeinander folgenden Würfen landet der Würfel jedes Mal so, dass eine gerade Zahl angezeigt wird. Nun wird der Würfel ein sechstes Mal geworfen. Welche der folgenden Aussagen trifft dann zu?

Kreuze an.

☐ Es ist wahrscheinlicher, dass der Würfel eine gerade Zahl zeigt, als dass er eine ungerade Zahl zeigt.

☐ Es ist wahrscheinlicher, dass der Würfel eine ungerade Zahl zeigt, als dass er eine gerade Zahl zeigt.

☐ Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.

☐ Der Würfel zeigt mit Sicherheit eine ungerade Zahl.

Lösung

Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In der Aufgabe muss die Unabhängigkeit von Ereignissen in einem mehrstufigen Zufallsexperiment erkannt und angewendet werden (L5). Dies muss – in Abhängigkeit vom betreffenden Bundesland - noch nicht Thema im Unterricht bis zur Jahrgangsstufe 8 gewesen sein. Dementsprechend muss bei den Schülerinnen und Schülern aus den ersten Erfahrungen im Unterricht und im Alltag ein Verständnis von Wahrscheinlichkeit angebahnt und ein Gespür für die Unabhängigkeit von Ereignissen entwickelt worden sein.

Die Falschantworten folgen einer weit verbreiteten Fehlvorstellung bzgl. bedingter Wahrscheinlichkeiten und der Abhängigkeit von Ereignissen. Das Erfassen der Aufgabenstellung erfordert genaues Lesen und ein gutes Textverständnis (K6). Das Zufallsexperiment „Einmal Würfeln“ kennen die Schülerinnen und Schüler aus dem Alltag und die Gleichwahrscheinlichkeit der sechs möglichen Ergebnisse ist im Allgemeinen geläufig. In dieser Aufgabe müssen sie die Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse „gerade Augenzahl“ und „ungerade Augenzahl“ begreifen. Die sechsmalige Hintereinanderausführung dieses Zufallsexperiments erfordert eine für die meisten Schülerinnen und Schüler ungewohnte Modellierung (K3), bei der das gegenseitige Nicht-Beeinflussen der einzelnen Würfe (Unabhängigkeit) erkannt werden muss (AB II).

Fehler können, wie oben bereits erwähnt, bei der Erkennung und Berücksichtigung der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe auftreten und zu falscher Wahl aus den möglichen Antworten führen. Hier helfen einerseits Veranschaulichungen (wie: „Der Würfel hat kein Gedächtnis“) und vor allem das Durchführen konkreter Zufallsexperimente. Bei Schülerinnen und Schülern, die im Unterricht noch keine Wahrscheinlichkeiten bestimmt haben, können bereits Probleme bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „gerade Augenzahl“ auftreten.

Eine **Diagnose** anhand der Antworten ist kaum möglich, da verschiedene Fehlerquellen zu denselben Falschantworten führen können. Erst eine Diskussion in der Klasse oder schriftliche Begründungen der Antworten können die eventuellen Fehlvorstellungen veranschaulichen.

Anregungen für den Unterricht

In dieser Alterstufe ist ein handelndes Vorgehen, d.h. das Durchführen bzw. die Simulation von Zufallsexperimenten, empfehlenswert. Dabei ist es günstig, die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen oder in Tandems arbeiten und die Ergebnisse anschließend zusammentragen zu lassen. Eine mögliche Aufgabenstellung könnte sein:
Führt das Zufallsexperiment ‚Dreimal hintereinander Würfeln’ 50-mal durch und protokolliert die Ergebnisse.
Wertet diese nach folgenden Gesichtspunkten aus:

- Gesamtanzahl der geworfenen Einser,
- Gesamtanzahl der geraden Augenzahlen,
- Auswahl der Tripel, bei denen die ersten beiden Würfe gerade Augenzahlen ergeben haben, und Bestimmung der Anzahl der geraden Augenzahlen beim dritten Wurf (K6, AB III).

Eine Auswertung über alle Ergebnisse der Gruppen bringt im Allgemeinen gute Näherungswerte für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Zudem wird den Schülerinnen und Schülern durch das eigene Erleben die Struktur des untersuchten Zufallsexperiments bewusster.
Statt Würfeln bieten sich auch andere einfach durchzuführende Zufalls-experimente an wie der Münzwurf.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** bieten sich die folgenden Aufgaben an:
„Die Wahrscheinlichkeit von Augensummen" (Vgl. /1/, S. 69.) und
Aufgabe 10 „Grüngelber Würfel".

Um aufzuzeigen, dass die verschiedenen Stufen nicht bei allen mehrstufigen Zufallsexperimenten unabhängig voneinander sind, ist es lehrreich, ein entsprechendes Beispiel durchzuspielen. Eine Möglichkeit wäre z.B. eine Urne mit zwei schwarzen und einer weißen Kugel, aus der zweimal ohne Zurücklegen gezogen wird. Dabei ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse beim zweiten Ziehen deutlich in Abhängigkeit vom ersten Ziehen.

Aufgabe 12

Schrauben

In einer Firma, in der Schrauben hergestellt werden, wird am Ende des Produktionsprozesses eine Endkontrolle durchgeführt. Eine überprüfte Kiste enthält 10000 Schrauben. Aus dieser Kiste werden zufällig 200 Schrauben ausgewählt und überprüft. 10 dieser Schrauben lagen außerhalb der Norm.

Wie viele Schrauben, die nicht der Norm entsprechen, sind ungefähr in der ganzen Kiste enthalten?

Kreuze an.

- ☐ 20
- ☐ 50
- ☐ 200
- ☐ 500
- ☐ 2000

Aufgabe 12

Lösung

500

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst den Text der Aufgabe verstehend lesen (K6). Es wird hier ein Vorgang beschrieben, dessen Ausgang zufällig ist (Zusammensetzung der Stichprobe zur Bestimmung der Anzahl der nicht normgerechten Schrauben). Daher müssen die Schülerinnen und Schüler eine Modellierung (K3) vornehmen, die im Rahmen der Aufgabenstellung eine bestmögliche Prognose für die Zusammensetzung der Gesamtheit (Anzahl der nicht normgerechten Schrauben in der Kiste) zulässt. Die Bestimmung des Ergebnisses (K5) kann über unterschiedliche Ansätze erfolgen:

- über Dreisatz / Proportionalität (Unter 200 Schrauben sind 10 nicht normgerecht, unter 10000 = 50 · 200 können es 50 · 10 = 500 sein.)
- über die Verwendung der relativen Häufigkeit in der Stichprobe als Schätzung für die der Gesamtheit ($\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$ von 10000 sind 500).

Die Mehrschrittigkeit der vorzunehmenden Überlegungen begründet die Zuordnung zu AB II.

Fehler weisen neben der nicht sachgerechten Zuordnung der Größen häufig darauf hin, dass es nicht gelungen ist, ein geeignetes Modell zu entwickeln (z.B. 200 : 10 = 20; 10000 : 200 = 50).

Aus der richtigen Angabe des Ergebnisses kann nicht entschieden werden, in welchem Umfang stochastisches Denken (im Sinne von Entscheidungsfindung unter Unsicherheit) bei den Schülerinnen und Schülern entwickelt ist. Hier ist neben der **Diagnose** zu den genannten Fehlern auch die Beachtung stochastischen Denkens bei einzufordernden Beschreibungen des Vorgehens nötig.

Anregungen für den Unterricht

Bei einer Besprechung bzw. Aufarbeitung dieser Aufgabe sollte deutlich werden, dass der Wert von 500 nicht normgerechten Schrauben in diesem Aufgabenkontext eine recht gute Vorhersage für einen Näherungswert ist, in dessen Nähe der wirkliche Wert liegt. Im Extremfall sind aber alle Werte zwischen 10 (alle nicht normgerechten Schrauben in der Stichprobe) und 9810 (alle normgerechten Schrauben in der Stichprobe) möglich. Es muss an dieser Stelle deutlich werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 500 nicht normgerechte Schrauben in der Kiste sind, verglichen mit allen anderen Anzahlen recht gering ist. Mit Simulationen und grafischen Darstellungen (siehe unten) kann man der Gefahr begegnen, dass die reine Berechnung (z.B. über Dreisatz) die Unsicherheit des Ergebnisses nicht berücksichtigt.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es sinnvoll, Vereinfachungen vorzunehmen. Die Wahl eines einfachen Modells (Urne mit Kugeln in zwei Farben) und die Reduzierung der Anzahlen ermöglichen das mehrfache Nachvollziehen der Stichprobenentnahme in einer realen Situation.

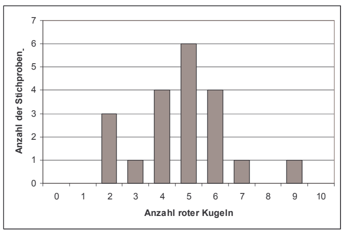
Beispiel:
Zusammensetzung A: Urne mit 50 roten und 50 blauen Kugeln.
Zusammensetzung B: Urne mit 45 roten und 55 blauen Kugeln.
Zusammensetzung C: Urne mit 80 roten und 20 blauen Kugeln.
Es werden 20 Stichproben zu je 10 Kugeln entnommen (mit Zurücklegen jeweils nach der Entnahme von 10 Kugeln).

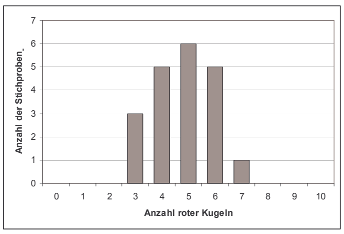
Beispielergebnisse einer Durchführung:

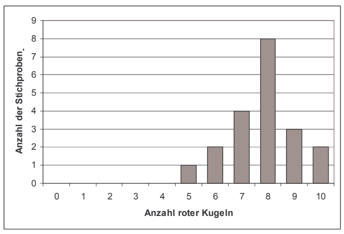
Anzahl k der roten Kugeln je Stichprobe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Stichproben mit k roten Kugeln bei Ziehung aus A	0	0	3	1	4	6	4	1	0	1	0
Anzahl der Stichproben mit k roten Kugeln bei Ziehung aus B	0	0	0	3	5	6	5	1	0	0	0
Anzahl der Stichproben mit k roten Kugeln bei Ziehung aus C	0	0	0	0	0	1	2	4	8	3	2

An den Ergebnissen erkennt man, dass
- bei der Zusammensetzung A eine Stichprobe 5 rote Kugeln enthalten kann (bei 10 Ziehungen sind 5 Kugeln rot entsprechen dem Verhältnis roter und blauer Kugeln in der Zusammensetzung A), aber auch eine andere Anzahl roter Kugeln sind möglich,
- umgekehrt aus einer Stichprobe mit 5 roten Kugeln keinesfalls mit Sicherheit darauf geschlossen werden kann, dass in der Zusammensetzung 50 % der Kugeln rot sind,
- dennoch aufgrund der Stichprobe eine, wenn auch mit Unsicherheit behaftete, Schätzung möglich ist.

Für viele Schülerinnen und Schüler sind entsprechende grafische Darstellungen einsichtiger:







Der Einsatz rechnergestützter Simulationen bietet einerseits die Möglichkeit, die Unsicherheit der Vorhersage weiter zu verdeutlichen. Andererseits kann hierbei sowohl die Gesamtanzahl als auch die Anzahl der Stichproben erhöht werden, wobei die Idee der sachgerechten Prognose veranschaulicht wird.

Auch für viele **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben,** stellen obige Betrachtungen eine angebrachte Vertiefung dar. Genauere Untersuchungen des Einflusses einer größeren Gesamtheit, auch bezüglich der Stichprobenentnahme (Ziehen mit / ohne Zurücklegen), bieten sich als weiteres Angebot genauso an wie andere, komplexere Aufgaben (z.B. in /1/, S. 69 ff).

Aufgabe 13

Temperatur

In dieser Tabelle stehen Temperaturangaben , die jeweils zu festen Uhrzeiten gemessen wurden.

Temperaturen in Grad Celsius						
	6 Uhr	**9 Uhr**	**12 Uhr**	**15 Uhr**	**18 Uhr**	**21 Uhr**
Montag	13,5°	17,0°	21,5°	22,5°	21,0°	17,5°
Dienstag	14,0°	19,0°	25,0°	27,0°	25,5°	20,5°
Mittwoch	15,5°	19,5°	25,5°	28,0°	26,0°	19,5°
Donnerstag	14,5°	15,5°	19,0°	19,5°	16,0°	13,5°

13.1: Wann wurde die niedrigste Temperatur gemessen? Kreuze **alle** richtigen Antworten an.

- ☐ Donnerstag um 9 Uhr
- ☐ Montag um 6 Uhr
- ☐ Mittwoch um 15 Uhr
- ☐ Donnerstag um 21 Uhr
- ☐ Dienstag um 6 Uhr

13.2: Welcher Tag war der wärmste? Begründe deine Entscheidung mit den Temperaturangaben aus der Tabelle.

Lösung

13.1: Montag um 6 Uhr und Donnerstag um 21 Uhr

13.2: Antwort „Mittwoch“ mit angemessener Begründung

- Die Durchschnittstemperatur war am Mittwoch am höchsten. (wobei hier das arithmetische Mittel jeden Tages berechnet werden muss oder in einer korrekten Form argumentiert werden muss, dass die Durchschnittstemperatur am Mittwoch am höchsten war – Durchschnittstemperaturen: Mo 18,83 °C… Di 21,83 °C… Mi 22,3 °C… Do 16,3 °C…)

Aufgabe 13

- Am Mittwoch war es tagsüber bei jeder Messung am wärmsten. Nur abends war es am Dienstag wärmer.
- Am Mittwoch wurde die höchste Temperatur gemessen.

Antwort „Dienstag" mit angemessener Begründung

- Dienstag ist der einzige Tag, an dem die Temperatur zu vier Messzeitpunkten über 20 °C betrug.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee		Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	13.1	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
	13.2	**Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	13.1	**AB I**
	13.2	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Aus einer Tabelle entnehmen die Schülerinnen und Schüler, wann die niedrigste Temperatur gemessen wurde. Dabei haben sie die Uhrzeiten und den Wochentag zu beachten (L5, K4). Das Herausfinden der niedrigsten Temperatur bei Teilaufgabe 1 wird den Schülerinnen und Schülern kaum Probleme bereiten (AB I). Ihre Suchstrategie könnte durch eigene Alltagserfahrungen auf die Spalte mit der frühesten bzw. spätesten Uhrzeit gerichtet sein und sie so schnell zum Ergebnis führen.

Häufig auftretender **Fehler** wird vermutlich sein, dass die Schülerinnen und Schüler nur eine Antwort ankreuzen.
Bei Teilaufgabe 2 ist zur Begründung der Schülerentscheidung eine Argumentation zu entwickeln (K1). Diese anspruchsvolle Aufgabe führt zu zwei verschiedenen Lösungen. Auch die Begründungen für die Lösungen können verschieden erfolgen. Der Lösungsweg ist nicht offensichtlich, so dass eine Strategie zur Findung der Lösungsidee entwickelt werden muss (K2, AB II). Für die Schülerinnen und Schüler stellt sich zunächst das Problem, woran man erkennt, dass ein Tag der wärmste ist. Sie überlegen mit welchen mathematischen Mitteln sie dieses Problem lösen können (K3). Möglichkeiten bieten sich an über

- das Berechnen des Mittelwertes der Temperaturen (K5) der einzelnen Tage und die Bestimmung des Tages mit dem höchsten Mittelwert oder
- den Vergleich der gemessenen Tagestemperaturen und das Identifizieren des Tages, an dem die höchsten Temperaturen gemessen wurden.

Häufiger **Fehler** wird sein, dass die Argumentation der Schülerinnen und Schüler nicht schlüssig ist.

Anregungen für den Unterricht

Eine Vertiefung für **Schülerinnen und Schüler, die bei der Lösung der** Teilaufgabe 1 **Schwierigkeiten hatten,** ist vielfältig denkbar durch Aufgaben, wie:

- Wann wurde die höchste Temperatur gemessen?
- Zu welcher Uhrzeit wurde am Donnerstag die niedrigste Temperatur gemessen?
- Berechne den Mittelwert der Temperaturen am Montag.
- Berechne den Mittelwert der Temperaturen an den ausgewählten Tagen um 18.00 Uhr.

Da das Problem bei Teilaufgabe 2 sehr wahrscheinlich beim Finden der Lösungsidee und beim Formulieren der Begründung liegen wird, sollten im Unterricht häufiger verschiedene Lösungswege und Lösungen, ggf. mit zugehörigen Argumentationen, diskutiert werden.
Für Schülerinnen und Schüler, könnte die gegebene Aufgabe wie folgt vereinfacht werden:

- Warum ist Mittwoch der wärmste Tag? Begründe.
- Finde eine Erklärung dafür, dass Dienstag der wärmste Tag ist.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben gelöst haben, können aufgefordert werden, die Tabellenwerte in einem geeigneten Diagramm darzustellen und die Fragen der gegebenen Aufgabe mit Hilfe des Diagramms zu beantworten. Ein Vergleich der Aussagekraft von Tabelle und Diagramm bietet sich in diesem Zusammenhang an.
Fächerübergreifend können sich die Schülerinnen und Schüler auch über Unterschiede bei der Berechnung von Tagesmitteltemperaturen informieren und verschiedene Modelle vergleichen.

Aufgabe 14

Internetnutzung
56% der Internetnutzer sind täglich oder fast täglich online.

Die Nutzung des Internets hat in Deutschland weiter zugenommen. Fast zwei Drittel der Personen ab zehn Jahren (65 %) nutzten im ersten Quartal 2006 das Internet. Dies geht aus der aktuellen Auswertung der Befragung privater Haushalte zur Nutzung von Informations- und Kommunikationstechnologien hervor. […] Innerhalb der Gruppe der Internetnutzer ging im ersten Quartal 2006 mehr als die Hälfte (56 %) täglich oder fast täglich online, ein Jahr zuvor waren es noch 50 % der Internetnutzer.

(Statistisches Bundesamt Deutschland)

Welcher Prozentsatz der Personen ab 10 Jahren ging damit im ersten Quartal 2006 täglich oder fast täglich online?
Kreuze an, welcher Wert deinem Ergebnis am nächsten liegt.

- ☐ 36 %
- ☐ 56 %
- ☐ 65 %
- ☐ 86 %
- ☐ 121 %

Lösung

36 %

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Der anspruchsvolle Aufgabentext beschreibt eine Datenerhebung zur Internetnutzung und stellt Ergebnisse für das erste Quartal 2006 dar (L5). Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, die im Text enthaltenen Informationen zu erfassen und in einen neuen Zusammenhang zu bringen (K3). Der Aufgabentext enthält mehr Informationen als zum Finden der Lösung notwendig sind, insofern müssen die Schülerinnen und Schüler eine Auswahl treffen (K6). Sie wenden ein Lösungsverfahren an, um einen Anteil von einem Anteil zu berechnen (K5). Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert mehrere Schritte (AB II).

Fehler können in der Auseinandersetzung mit dem Aufgabentext liegen (unübersichtlich, viele Informationen mit teilweisen Dopplungen). Dies kann zur Entnahme fehlerhafter oder nicht ausreichender Informationen führen. Lösungsantworten wie 56 % oder 65 % lassen erkennen, dass die Notwendigkeit des Verknüpfens von Prozentangaben nicht erkannt wurde. Die ebenfalls falschen Antwortmöglichkeiten 86 % bzw. 121 % geben einen Hinweis darauf, dass eine Verknüpfung erkannt wurde, aber am Zusammenhang vorbei vorgenommen wurde. In der Phase der Auswertung zu dieser Aufgabe sollte den Schülerinnen und Schülern ausreichend Raum zur Darstellung und Begründung ihrer Lösungsschritte und der von ihnen getroffenen Auswahl gegeben werden. Dabei ist Wert darauf zu legen, dass sich Schülerinnen und Schüler immer bewusst sind, welches der in der jeweiligen Situation zutreffende Grundwert ist.

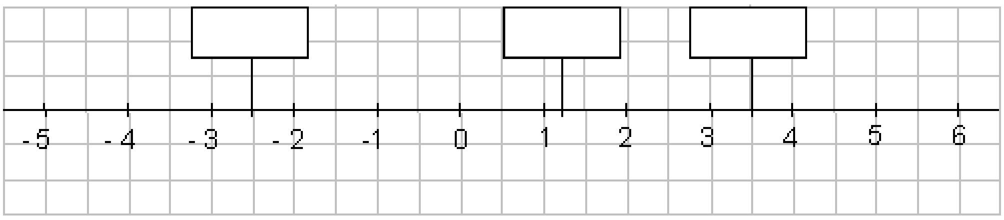
Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten den Aufgabentext gründlich und mehrmalig lesen. Zu empfehlen ist das Vermitteln und Einüben hilfreicher Techniken, wie Unterstreichen, Herausschreiben oder neu Anordnen. Eine aktive Auseinandersetzung mit dem Text kann auch durch strukturierte Kommunikation in der Lerngruppe befördert werden. Die Schüler sollten Möglichkeiten bekommen, ihre Version des Textverständnisses zu präsentieren und auf Darstellungen von Mitschülern einzugehen (K6). Hilfreich kann auch die Diskussion über das Zustandekommen falscher Antworten sein (z.B. Antwortmöglichkeit 121 %).
Auf zahlreichen Verpackungen von Lebensmitteln findet man Angaben zu Inhaltsstoffen und deren prozentualen Anteilen in diesen Lebensmitteln. Solche Informationen lassen sich für weitere Aufgaben zu Anteilen von Anteilen auswerten und nutzen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können die Ausführungen zur Internetnutzung in Beziehung zum konkreten Nutzungsverhalten der Schülerinnen und Schüler einer bestimmten Lerngruppe setzen und entsprechende Vergleiche anstellen. Es bieten sich so Möglichkeiten zur grafischen Darstellung oder zur weiteren vertiefenden Recherche der Internetnutzung anderer Alters- oder Personengruppen.
Bei entsprechenden unterrichtlichen Voraussetzungen können die Informationen im Aufgabentext in einem Baumdiagramm dargestellt werden und bieten damit Anlass mit Hilfe der Pfadregeln weitere Betrachtungen und Variationen zur Aufgabe vorzunehmen. Darüber hinaus können zum Thema „Anteile von Anteilen“ durch Schülerinnen und Schüler selbstständig Aufgaben formuliert werden.

Aufgabe 15

Zahlenstrahl



Trage in die leeren Kästchen die zugehörigen Zahlen ein.

Lösung

Die folgenden Zahlenwerte –2,5; 1,2; 3,5 sind mit einer Toleranz von +/– 0,05 richtig.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Das korrekte Eintragen der Zahlen setzt Kenntnisse im Bereich der Anordnung rationaler Zahlen auf der Zahlengeraden voraus (L1, K4). Die Darstellung ist sowohl aus dem Unterricht als auch aus dem Alltag (Temperaturskalen) vertraut (AB I).

Falsche Zahlenangaben (**Fehler**) sind wie folgt zu erwarten:
- Die Angaben (insbesondere für 1,2) liegen außerhalb der angegebenen Toleranzgrenzen.
- Im Bereich der negativen Zahlen wird das Vorzeichen vergessen.
- Statt –2,5 wird die Zahl –3,5 abgelesen.

Falsche Angaben deuten generell auf mangelnde Vorstellungen zur Anordnung rationaler Zahlen auf der Zahlengeraden bzw. auf ein mangelndes Zahlenverständnis im Dekadischen Positionssystem hin.
Die oben genannten Fehler lassen folgende weitere **Diagnose**möglichkeiten zu:
- Ablesen außerhalb der Toleranzgrenzen z.B. bei 1,2 deutet auf ein ungenaues Ablesen oder mangelndes Verständnis des Bruchbegriffs hin. (Diagnostische Fragestellungen sind beispielsweise: Welche Zahl liegt in der Mitte von 1 und 2? Welche Zahl liegt in der Mitte von 1 und 1,5? Kennzeichne zwischen 1 und 2 jeweils Abstände von $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{5}$).

  Wie heißen die dadurch markierten Zahlen?)

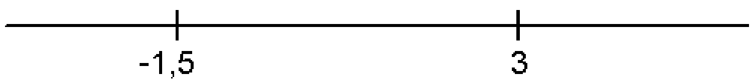
- Ein fehlendes Vorzeichen deutet auf mangelndes formales Verständnis bzw. unkonzentriertes Arbeiten hin. (Fragestellungen zum inhaltlichen Erfassen des Zusammenhanges sind zum Beispiel: Wie heißt die Zahl, die denselben Abstand wie 2 (5, 10, 100) auf der Zahlengeraden zu 0 hat?)
- Falsches Ablesen im Bereich der negativen Zahlen (statt –2,5 wird –3,5 eingetragen) deutet auf ein mangelndes Verständnis der Anordnung der negativen Zahlen auf der Zahlengeraden hin.
  (Diagnostische Fragestellungen wie oben.)

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können mit Fragen, wie den oben genannten zum besseren Verständnis der Zahlengeraden angeregt werden. Das kann weiter vertieft werden durch systematisches Ablesen an Skalen mit verschiedenen Einteilungen. Dabei sind sowohl das Ablesen von vorgegebenen Stellen (wie in der obigen Aufgabe) als auch das Eintragen von vorgegebenen Zahlen (Größen) auf der Zahlengeraden (Skalen) als grundlegende Fertigkeiten zu üben. Es sollten zunächst aus dem Alltag vertrauten Skalen (z.B. auf dem Thermometer), später auch Diagramme genutzt werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können in den folgenden Umkehraufgaben I. bis III. Skalen selbst entwickeln oder in den Aufgabenvarianten IV. und V. Grenzen des Einsatzes von linearen Skalen entdecken:

I. Trage die Null und die Eins auf der Zahlengeraden ein. Beschreibe deinen Lösungsweg.



II. Entwickle eine geeignete Skala, auf der man $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$ ablesen kann.

III. Stelle die folgenden Zahlen auf einer gemeinsamen Skala dar:
   a) 23, 49, 60 und 82
   b) 200, 300, 650, 900

IV. Peter will folgende Zahlen auf einer gemeinsamen Skala darstellen: 7, 83, 170, 512. Auf welche Probleme stößt er? Erkläre.

V. Informiere dich (z.B. im Internet) darüber, wie groß die Windgeschwindigkeit bei verschiedenen Windstärken ist. Lassen sich die jeweiligen Bereiche auf einer gemeinsamen Skala abbilden? Beschreibe, worin das Problem dabei liegt.

Aufgabe 16.1

Quersumme
Welches ist die kleinste vierstellige Zahl mit der Quersumme 12?

Kreuze an.

- ☐ 129
- ☐ 1002
- ☐ 1029
- ☐ 1119
- ☐ 1236

Lösung

1029

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe werden Zahlenvorstellungen und grundlegende Rechenfertigkeiten benötigt, sowie die Fähigkeit, die Quersumme einer Zahl zu berechnen (L1, AB I). Die gesuchte Zahl muss die drei Bedingungen erfüllen, kleinste, vierstellige Zahl mit der Quersumme 12 zu sein. Zur Bestimmung müssen sich die Schülerinnen und Schüler für ein Vorgehen entscheiden (K2).

Häufige **Fehler** können auftreten, wenn nicht alle drei Bedingungen der Zahl erfüllt wurden:

129	-	"vierstellig" nicht beachtet,
1119 bzw. 1236	-	"kleinste" nicht beachtet,
1002	-	Der Begriff Quersumme konnte nicht angewendet werden, die Ziffern 1 und 2 wurden einfach „zusammengefügt“.

Aufgabe 16.1

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten üben den sicheren Umgang mit dem Begriff Quersumme und das Beachten verschiedener Bedingungen durch Bearbeiten von Aufgabenvariationen, wie:

I. Aufgaben mit unterschiedlichen Lösungsstrategien

- Welche der folgenden Zahlen hat die größte Quersumme?
  19, 99, 109, 999, 1919 oder 10009
- Gibt es Zahlen mit der gleichen Quersumme wie die Zahl 2105?
  Begründe deine Antwort.

II. Umkehraufgaben

- Finde (... stellige) Zahlen, deren Quersumme ... ist.
- Wer findet die meisten Zahlen mit der Quersumme ... ?

Diese Aufgaben kann man bei einfachen Kopfrechenübungen (z.B. tägliche Übungen am Anfang einer Unterrichtsstunde) einbauen. Der Schwierigkeitsgrad lässt sich z.B. durch Erhöhung der Stellenanzahl steigern.
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können mit Aufgabenstellungen wie den folgenden zur Verallgemeinerung angeregt werden.

- Bestimme die kleinste Quersumme einer zweistelligen, dreistelligen und vierstelligen Zahl. Formuliere dann eine Aussage für alle mehrstelligen Zahlen und begründe diese.
- Eine Zahl hat n Stellen ($n \geq 1$). Schreibe auf, wie die größte Quersumme dieser Zahl berechnet werden kann.

Aufgabe 16.2

Quersumme
Sabine hat die Quersumme einer vierstelligen Zahl berechnet und als Ergebnis 38 erhalten. Nimm zu diesem Ergebnis Stellung.

Lösung

Sabine hat sich verrechnet.
und
korrekte Begründung (Die Grundidee, dass die Quersumme einer vierstelligen Zahl maximal 36 sein kann, muss aus der Begründung hervorgehen.),
z.B.: Die Quersumme einer vierstelligen Zahl besitzt das Maximum
9 + 9 + 9 + 9 = 36.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)** **Probleme mathematisch lösen (K2)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Für das Lösen der Aufgabe werden Sinn tragende Vorstellungen von natürlichen Zahlen benötigt (L1). Die Schülerinnen und Schüler können zur Überprüfung der Aussage systematisch probieren oder sie erkennen von vornherein, dass sie die größte mögliche Quersumme einer vierstelligen Zahl berechnen können (K2, AB **II**). In jedem Fall muss die Antwort mit einem Ergebnis dieser Bearbeitungsmöglichkeiten begründet werden (K1).

Eine mögliche **Fehler**ursache liegt im unvollständigen Erfassen der Aufgabenstellung. So können Zahlen mit mehr als vier Stellen genannt werden. Darüber hinaus kann das Fehlen der Begründung bei richtiger Entscheidung darauf hinweisen, dass die Schülerinnen und Schüler entweder geraten oder die Aufgabe nur durch Probieren gelöst haben, ohne die zu Grunde liegende Idee erfasst zu haben.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten,** finden sich Anregungen in der Kommentierung zu Aufgabe 16.1. Die dort aufgeführten Aufgabenbeispiele bieten sich bei entsprechender Ergänzung auch zum Üben des Begründens und Argumentierens an. Darüber hinaus sind weitere Begründungsaufgaben möglich, wie:
Begründe, warum die Quersumme einer dreistelligen Zahl nicht 30 sein kann.

Aufgabe 17.1

Zapfsäule

Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern" über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.
Wie viel erhält der Staat bei der dargestellten Tankfüllung an Steuern?
Kreuze die richtige Antwort an.

- ☐ 15,80 €
- ☐ 34,47 €
- ☐ 42,71 €
- ☐ 73,- €
- ☐ 90,45 €

Lösung

42,71 €

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Aufgabe 17.1

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten eine alltagsnahe Problemstellung, indem sie ihre Kenntnisse aus der Prozentrechnung bzw. Bruchrechnung sachgerecht anwenden (L1). Die Aufgabe ist überbestimmt, d.h. Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die für die Aufgabe relevanten Informationen dem Bild und dem Text entnehmen und dafür eine geeignete mathematische Darstellungsform finden (K3, K4). Zur Lösung der Aufgabe gelangen sie durch die Ausführung geeigneter Lösungs- bzw. Kontrollverfahren (K5), z.B. 58,51 € · 0,73 oder 58,51 € · $\frac{73}{100}$. Die Lösung der Aufgabe erfordert ein mehrschrittiges Vorgehen (AB II).

Zu erwarten sind folgende **Fehler**:

- Die Schülerinnen und Schüler multiplizieren statt mit 0,73 mit 0,27.
- Die Schülerinnen und Schüler rechnen mit dem falschen Grundwert. Sie führen 73 % Steuern von der Gesamtliterzahl (47,22 l) bzw. dem Preis pro Liter (123,9 ct) ab (Antwortoptionen 15,8 € und 90,45 €).
- Die Schülerinnen und Schüler setzen den Anteil mit dem abzuführenden Steuerbetrag in Euro gleich, also 73 € Steuerbetrag insgesamt. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass der Steuerbetrag nicht größer sein kann als der Gesamtbetrag für die Tankfüllung.

Fehler lassen sich **diagnostizieren**, indem im Einzelfall die Auswahlentscheidung begründet wird.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet es sich an, die Grundbegriffe der Prozentrechnung zu wiederholen und in Bezug zur Aufgabe zu setzen. Dabei ist es sinnvoll zu thematisieren, welche Informationen in der Aufgabenstellung enthalten sind und welche davon tatsächlich relevant zur Lösung der Aufgabe sind. Hilfreich kann die Erstellung einer tabellarischen Übersicht sein, in der die jeweilige Steuerabgabe dem zu zahlenden Gesamtbetrag zugeordnet wird.

Betrag	Steuern
1 €	1 € · 0,73 = 0,73 €
10 €	10 € · 0,73 = 7,30 €
100 €	100 € · 0,73 = 73,00 €
40 €	40 € · 0,73 = 29,20 €
58,51 €	58,51 € · 0,73 = 42,71 €

Zudem kann damit die Aufgabe auch ohne Kenntnisse in der Bruch- bzw. Prozentrechnung mit dem Verfahren Dreisatz gelöst werden. Wichtig ist allerdings, sich als Lehrkraft zu vergewissern, dass die Schülerinnen und Schüler die benötigten Daten der abgebildeten Zapfsäule entnehmen können.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich vielfältige vergleichbare Aufgabenstellungen aus dem Alltag zur Weiterarbeit an, die ihrer Lebenswelt stärker entsprechen, wie die Auswertung von Angaben auf Lebensmittelverpackungen. Entsprechende Fragestellungen können auch von Schülerinnen und Schülern aufgestellt werden, wie:
Folgende Angaben sind einer 1 Liter Milchverpackung zu entnehmen:
1 Glas fettarme Milch (250 ml) enthält 12,3 g Zucker, 3,8 g Fett und 2,5 g gesättigte Fettsäuren.
Wie viel Gramm Zucker, Fett und gesättigte Fettsäuren enthält ein Liter Milch?

Aufgabe 17.2

Zapfsäule

Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern“ über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.
Petra stellt fest: „Wenn der Staat überhaupt keine Steuern auf Benzin mehr erheben würde, würde der Benzinpreis auf etwa ein Viertel des jetzigen Preises sinken.“

Erkläre, wie Petra zu dieser Aussage kommt.

Lösung

Richtige Erklärung, bei der der Anteil der Steuern mit dem Benzinpreis in Beziehung gesetzt werden muss, z.B.:

- 1 Euro – 73 Cent = 27 Cent entspricht ca. 25 % bzw. $\frac{1}{4}$.

Oder:

- 73 Cent pro Euro bedeutet 73 % Steuern, also etwa $\frac{3}{4}$. Also etwa $\frac{1}{4}$ ohne Steuern.

Oder:

- Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabe 17.1:
  42,71 € Steuern, also etwa 15,80 € Rest, das ist etwa $\frac{1}{4}$ von 58,51 €.

Oder:

- $\frac{42{,}71\,€}{58{,}51\,€} = \frac{3}{4}$. Die Steuern machen somit ca. $\frac{3}{4}$ des Betrages aus. Ohne Steuern müsste man folglich nur $\frac{1}{4}$ des Betrages zahlen.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten eine alltagsnahe Problemstellung, indem sie ihre Kenntnisse aus der Prozentrechnung bzw. Bruchrechnung sachgerecht anwenden (L1). Die Aufgabe erlaubt verschiedene Lösungsstrategien (vgl. dazu die obigen Lösungsangaben), die die Schülerinnen und Schüler je nach Voraussetzungen einsetzen (K2, AB II). Dabei müssen sie den Anteil der Steuern mit dem Benzinpreis in Beziehung setzen (K3). Mittels Ausführung geeigneter Lösungs- und Kontrollverfahren und sinnvollem Abschätzen der Ergebnisse überprüfen die Schülerinnen und Schüler die Aussage von Petra und erklären anschließend ihren Lösungsweg, um Petras Aussage zu begründen (K5, K6).

Fehler sind zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen natürlicher Sprache (Text), den Angaben aus dem Foto und der Darstellung in einem mathematischen Modell nicht oder nur unvollständig herstellen können (z.B.: Grundwert, Prozentwert bzw. Prozentsatz sind falsch, falsche Zuordnung des „jetzigen Preises“ bzw. des Benzinpreises zum Preis ohne Steuerabgabe).

Eine **Diagnose** von Schülerfehlern ist aufgrund der vielfältigen Bearbeitungsmöglichkeiten und dem im Test gewählten Format in der Regel nur durch die Analyse der verwendeten Bearbeitungsansätze möglich.

Anregungen für den Unterricht

Durch einen geöffneten Unterricht, in dem sich Schülerinnen und Schüler einzeln oder in Gruppen selbstständig mit vergleichbaren Problemstellungen auseinandersetzen, ergeben sich häufig unterschiedliche Lösungswege. Diese sollten auch thematisiert und gewertet werden.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen** konnten, ist es sinnvoll, die Ausgangsbedingungen zu vereinfachen:

- Preise und Anteile können als Zahlenwerte in Petras Aussage angegeben werden, so dass für die Aufgabe relevante Informationen direkt aus dem Text entnommen werden können.

- Durch Änderung der Aufgabenstellung hin zu einer Bestimmungsaufgabe verändert sich der Anforderungsbereich, z.B.:
  Die Benzinrechnung ist 58,51 € hoch. Davon werden 73 % als Steuern an den Staat abgeführt. Wie viel Euro sind das? (AB I)
  Wenn keine Steuern abgeführt werden müssen, würde der Benzinpreis gegenüber dem jetzigen Preis niedriger sein. Wie hoch wäre dann die Benzinrechnung? (AB I)

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich weiterführende vertiefende Aufgabenstellungen an:

- Die Steuern setzen sich aus Mineralölsteuer, Ökosteuer und Mehrwertsteuer zusammen. Benzin unterliegt bei der Mehrwertsteuer dem vollen Steuersatz von 19 %. Wie hoch ist der gemeinsame Anteil von Mineral- und Ökosteuer am gegebenen Benzinpreis?

Für die Weiterarbeit siehe auch Kommentierung zu Aufgabe 17.1.

Aufgabe 18

Benzinverbrauch
Um die Angabe zum durchschnittlichen Benzinverbrauch eines Neuwagens auf 100 km in einem Werbeprospekt zu überprüfen, werden Fahrten auf der Autobahn, auf der Landstraße und in der Stadt durchgeführt. Dabei geht man jeweils von einem konstanten Verbrauch des Fahrzeugs aus.

Bei der Berechnung des durchschnittlichen Benzinverbrauchs eines Neuwagens auf 100 km werden dann zu gleichen Teilen der Verbrauch auf der Autobahn, in der Stadt und auf der Landstraße berücksichtigt.

Fahrten	Gefahrene Strecke in km	Kraftstoffverbrauch in l
Autobahn	450	32,4
Stadt	250	19,5
Landstraße	350	21,0

Berechne den durchschnittlichen Benzinverbrauch des Neuwagens auf 100 km.

Lösung

Es werden 7 Liter im Durchschnitt auf 100 km verbraucht.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch Modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst den Text der Aufgabe und die Informationen in der dazugehörigen Tabelle erfassen (K6, K4). Voraussetzungen der Modellierung sind die Annahme des konstanten Benzinverbrauches in den jeweiligen Fahrsituationen und die Berücksichtigung dieser zu gleichen Teilen (K3). Das Erfassen und Berechnen der proportionalen Zusammenhänge und des arithmetischen Mittels liefern die Lösung (L1, K5). Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Fehler entstehen durch unvollständige oder falsche Modellierungen sowie bei der Ausführung der erforderlichen Rechnungen.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht gelöst haben, sind möglicherweise bereits am Lösungsansatz gescheitert.
In diesem Fall ist die Lesekompetenz verstärkt zu üben (beispielsweise der inhaltliche Zusammenhang zwischen Text und Tabelle herauszuarbeiten) und eine Begriffsklärung („durchschnittlicher Verbrauch“ und „zu gleichen Teilen“) vorzunehmen. An zahlreichen Beispielen sollten die Schülerinnen und Schüler die Inhalte dieser Begriffe erfahren, wie:

- der durchschnittliche Wasserverbrauch meiner Familie an einem Tag.
- die jährliche Durchschnittstemperatur in Berlin.
- 4 Personen teilen sich zwei Äpfel zu gleichen Teilen.
  Welchen Anteil erhält jede Person?
- die Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit von Auto, Radfahrer und Wanderer, wenn folgende Messungen durchgeführt wurden:

	Gefahrene Kilometer	Benötigte Zeit
Auto	70 km	60 Minuten
Radfahrer	50 km	120 Minuten
Wanderer	20 km	180 Minuten

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die gegebene Aufgabe gelöst haben**, kann man durch zusätzliche Fragestellungen den gegebenen Kontext weiter ausloten.

- Wird in der Realität wirklich zu gleichen Teilen in der Stadt, auf der Landstraße oder der Autobahn gefahren?
- Wie wirkt sich eine Veränderung dieser Anteile bei den Fahrstrecken auf den Durchschnittsverbrauch aus?

Der Vergleich mit Herstellerangaben, die Einbeziehung von Daten aus dem familiären Umfeld usw. können Ausgang für weitere Überlegungen bis hin zu Empfehlungen für die Nutzung eines PKW sein.

Aufgabe 19

Primzahl
Begründe, dass die Summe von 4 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen keine Primzahl sein kann.

Lösung

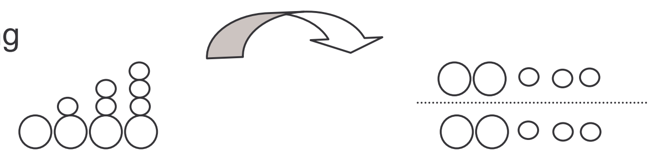
Angemessene Begründung

I. Algebraischer Ansatz
   Wenn n die erste dieser vier Zahlen ist, dann gilt:
   $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3)$; dies ist durch 2 teilbar und somit kann die Summe aus vier aufeinander folgender Zahlen keine Primzahl sein.

II. Inhaltlicher Ansatz
   Bei vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen werden zwei gerade und zwei ungerade Zahlen miteinander addiert. Die Summe zweier gerader Zahlen ergibt eine gerade Zahl und die Summe zweier ungerader Zahlen ergibt ebenfalls eine gerade Zahl. Die Summe dieser beiden Zahlen ergibt wieder eine gerade Zahl. Diese ist durch zwei teilbar, so dass die Summe von vier aufeinander folgenden Zahlen keine Primzahl sein kann.
   Viele andere adäquate inhaltliche Begründungen möglich.

III. Iterativer Ansatz
   $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ und 10 ist durch 2 teilbar (also keine Primzahl)
   $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ ist durch 2 teilbar (also keine Primzahl)
   und so weiter…
   Die Summe wächst jeweils um 4 und bleibt deswegen ständig durch 2 teilbar. Also kann die Summe aus vier aufeinander folgenden Zahlen keine Primzahl sein.

IV. Zeichnerische Lösung



   Links: Summe von vier aufeinander folgender nat. Zahlen
   Rechts: Summe von vier aufeinander folgenden nat. Zahlen, wobei hier deutlich wird, dass diese durch 2 teilbar ist und demnach keine Primzahl sein kann.
   Großer Kreis: beliebige natürliche Zahl
   Kleiner Kreis: steht für eine 1

   Oder andere denkbare Begründungen.

Keine oder ungenügende Begründung, z.B.:
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$, 10 ist durch 2 teilbar, also ist die Summe von vier aufeinander folgender natürlicher Zahlen immer auch durch zwei teilbar und somit keine Primzahl.

Aufgabe 19

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)** **Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB III**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Aufgabe erfordert von den Schülerinnen und Schülern, eine Verallgemeinerung zu begründen (AB III). Es ergeben sich hohe Anforderungen im Finden eines Lösungsweges (K2). Bei der Wahl eines iterativen oder algebraischen Lösungsweges liegt die Schwierigkeit im Bereich einer folgerichtigen Argumentation (K1) bzw. bei der Umformung von Termen (K5). Im Fall einer bildlichen Argumentation rückt die Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden" in den Vordergrund. Dieser Lösungsweg ist allerdings nur dann zu erwarten, wenn Schülerinnen und Schüler ein entsprechendes Vorgehen an einem ähnlichen Beispiel kennen gelernt haben.

Schon beim Erfassen der Aufgabenstellung können Schwierigkeiten und **Fehler** auftreten. Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass die Aussage für beliebige solcher Zahlen zu zeigen ist. Weiter wird der Begriff „Primzahl" benötigt, den erfahrungsgemäß nicht alle Schülerinnen und Schüler exakt kennen. Dies könnte als Anlass dienen, im Unterricht die Begriffe „Primzahl" und „Teilbarkeit" zu wiederholen.
Die Schülerinnen und Schüler können über Zahlenbeispiele („1+2+3+4" usw.) die Aufgabenstellung erfassen. Dabei ist aber zu beachten, dass ein Beispiel kein Beweis ist. Bei manchen Lösungswegen ist eine Zerlegung in Teilschritte sinnvoll.
Neben den Schwierigkeiten, einen geeigneten Einstieg in die Aufgabe zu finden, kann es Probleme in der Formulierung einer korrekten Argumentationskette geben. Dies könnte an ähnlichen Beispielen (vgl. /1/, S. 37 ff) im Unterricht aufgegriffen werden.

Da die Bearbeitung der Aufgabe schon häufig, wie bereits oben genannt, bei der Erfassung der Aufgabenstellung und beim Finden eines geeigneten Lösungsweges scheitern kann, ist in diesen Fällen eine **Diagnose** schwer möglich. Ist die Argumentationskette nicht schlüssig, sind entsprechende Schwächen individuell analysierbar, evtl. mit geeigneten Gegenbeispielen zu veranschaulichen. Bei einer richtig gelösten Aufgabe kann auf eine hohe Kompetenz im Bereich „Argumentieren" geschlossen werden.

Anregungen für den Unterricht

Für alle Schülerinnen und Schüler ist die Diskussion der unterschiedlichen Lösungswege anregend und aufschlussreich.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten einfachere und zur Problematik hinführende Aufgaben im Unterricht behandeln. Offene Fragestellungen wie „Was gilt für die Summe (oder auch Differenz bzw. Produkt) zweier aufeinander folgender (oder auch gerader bzw. ungerader) Zahlen?“ bieten sich hier an. Dabei kann sowohl formal als auch bildlich gearbeitet werden. Um die Notwendigkeit einer allgemeingültigen Beweisführung darzustellen, bietet es sich an, widerlegbare Behauptungen zu untersuchen, die aber für einige Zahlenbeispiele gelten. Ein Beispiel hierfür: „Der Termwert von 2^n+1 ist für jede ganze, nichtnegative Zahl n eine Primzahl.“ Diese Aussage gilt für n = 0, 1, 2, 3 und 4, aber nicht mehr für n = 5.
Als Steigerung der Schwierigkeit kann man die Aufgabe „Summen von Nachbarzahlen“ aus /1/, Seite 37, stellen, bei der die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen hinsichtlich der Teilbarkeit durch 3 untersucht wird.
Um den bildlichen Lösungsweg begreifbar zu machen, bietet sich ein handlungsorientiertes Vorgehen mit Plättchen oder Würfeln an.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** sind folgende weiterführende Fragestellungen empfehlenswert:
- Wann ist die Summe von 4 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch 3 teilbar?
- Was gilt für die Summe von n aufeinander folgenden Zahlen?

Aufgabe 20.1

Notendurchschnitt
Berechne den Notendurchschnitt der Noten der Klasse 9a.
Runde auf eine Stelle nach dem Komma.

Note	1	2	3	4	5	6	Durchschnitt
Anzahl	7	6	3	0	0	4	

Lösung

Durchschnitt: 2,6

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB I**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler haben zum Lösen der Aufgabe die Tabelle mit einer Häufigkeitsverteilung auszuwerten und daraus den Notendurchschnitt (arithmetisches Mittel) zu berechnen (K4, L5). Die Aufgabenstellung erfordert, ein vertrautes und direkt erkennbares Modell zu nutzen (K3). Ein Routineverfahren ist anzuwenden und mathematische Werkzeuge sind in geübten Situationen (K5, ABI) einzusetzen.

Fehler bei der Berechnung des arithmetischen Mittels können sowohl bei der Ermittlung des Dividenden als auch des Divisors für die erforderliche Quotientenbildung auftreten. Inwieweit diese inhaltlich begründet oder auf unaufmerksames Arbeiten oder Rechenfehler zurückzuführen sind, kann die unterrichtliche Auswertung auf Grund der Beschreibung der Bearbeitung durch die betreffenden Schülerinnen und Schüler zeigen.

Anregungen für den Unterricht

Die Angabe des arithmetischen Mittels von Zensuren als Dezimalbruch bietet Anlass zur Problematisierung dieses Themas im Unterrichtsgespräch. Das arithmetische Mittel ist neben dem geometrischen und dem harmonischen Mittel ein häufig verwendeter Mittelwert. Es ist eindeutig und leicht zu berechnen und ist eine Funktion der Größe jedes einzelnen Messwertes.

Bei ausreichend großem Stichprobenumfang liefert es einen zuverlässigen Schätzwert für die Grundgesamtheit. Andererseits sollte das arithmetische Mittel u.a. in den folgenden Fällen nicht berechnet werden:

- Die Verteilung ist mehrgipflig.
- Die Verteilung weist an den Enden offene Klassen auf.
- Die Daten sind nicht metrisch, sondern ordinalskaliert.
- Die Stichprobe ist sehr klein oder die Verteilung ist extrem asymmetrisch.

In solchen Fällen wird auf andere Möglichkeiten der Auswertung statistischer Daten zurückgegriffen, z.B. mit Hilfe des Medians (z.B. bei asymmetrischen Verteilungen oder ordinalskalierten Daten) oder des Modalwertes (z.B. bei mehrgipfligen Verteilungen). Aus mathematischer Sicht ist die Bildung von arithmetischen Mitteln aus Zeugnisnoten problematisch, da Zeugnisnoten eine Ordinalskala, aber keine metrische Skala bilden.
Vor diesem Hintergrund sollte mit allen Schülerinnen und Schülern diskutiert werden, dass der Abstand von Zensuren in Leistungserhebungen bzw. eine Differenz von Zensuren keinen exakt interpretierbaren Sinn hat. Fragwürdig ist beispielsweise, eine „gute“ Leistung und eine „ungenügende“ Leistung ohne entsprechende Verabredungen als „ausreichend“ zu mitteln. Im weiterführenden Unterricht der Stochastik sollte die korrekte Handhabung und Interpretation von Mittelwertberechnungen beachtet werden. Je nach inhaltlichen Vorgaben von Rahmenrichtlinien bzw. Lehrplänen kann auf andere statistische Kenngrößen wie Median und Spannweite eingegangen werden. Die vorliegenden Daten in der Tabelle können auch in einem Diagramm dargestellt werden (K4).

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten durch die Reduzierung der Anzahl von Wertepaaren auf zwei oder drei Einsicht in das generelle Vorgehen bei der Bestimmung des arithmetischen Mittels erhalten. Die Berechnung des Mittelwertes anderer Daten (z.B. Zeitdauer für den Schulweg, tägliche oder wöchentliche Dauer der Hausaufgabenerstellung) kann Gegenstand weiterer Übungen sein. Es sollte auch auf verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Daten in Diagrammen und Tabellen eingegangen werden.

Der Vergleich mit ebenfalls als Diagramm und Tabelle dargestellten Ergebnissen anderer Klassenarbeiten und Tests sollte **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, anregen, unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln (K4). Die Darstellung von Lösungswegen und Ergebnissen bietet darüber hinaus Möglichkeiten, mit allen Schülerinnen und Schülern weiter am Kommunizieren (K6) zu arbeiten. Dabei lässt sich problematisieren, dass gleiche Durchschnitte (arithmetische Mittel) sehr verschiedene Darstellungen im Diagramm zeigen können.

Aufgabe 20.2

Notendurchschnitt
Gib eine mögliche Notenverteilung für 20 Schüler/innen an, so dass der Notendurchschnitt genau 3,0 beträgt.

Note	1	2	3	4	5	6	Durchschnitt
Anzahl							3,0

Lösung

Beliebige richtige Lösungen (Ø 3,0 und Schülerzahl: 20)

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Daten und Zufall (L5)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Gegeben ist der Notendurchschnitt (arithmetisches Mittel) einer Klassenarbeit, zu der eine mögliche Häufigkeitsverteilung angegeben werden soll (L5). Die Schülerinnen und Schüler werden hier mit einer Fragestellung konfrontiert, die systematisches Probieren erfordert (K2). Sie berechnen jeweils das arithmetische Mittel und prüfen es mit Blick auf die Ausgangssituation (K3, K5). Beziehungen zwischen dem gegebenen Mittelwert und der auszufüllenden Tabelle sind herzustellen (K4). Ein mehrschrittiges Vorgehen zur Lösung der Aufgabe ist erforderlich (AB II).

Fehler können u.a. entstehen, wenn die korrekte Schülerzahl 20 nicht beachtet wird. Insbesondere dann, wenn Schülerinnen und Schüler zunächst beginnen, Häufigkeiten von einzelnen Zensuren einzutragen und dann feststellen, dass ein Einhalten der Schülerzahl von nicht möglich ist bzw. sich ein anderes als das zu erreichende arithmetisches Mittel ergibt. Hier sollte auf überlegtes Vorgehen orientiert werden, indem z.B. die Häufigkeiten so gewählt werden, dass ein „Ausgleich" in Bezug auf den Mittelwert erfolgt. Daneben sind Fehler im Berechnen des Notendurchschnitts möglich.
Im folgenden Unterricht besteht die Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsstrategie dokumentieren und erläutern. Das bietet Gelegenheit zur tiefer gehenden **Diagnose** der Schülerleistungen.
Es sind unterschiedliche Lösungsvarianten (z.B. durch mehr oder weniger systematisches Probieren) zu erwarten.

Anregungen für den Unterricht

Aus mathematischer Sicht ist die Bildung von arithmetischen Mitteln aus Zeugnisnoten problematisch, da Zeugnisnoten nicht metrisch, sondern ordinalskaliert sind. So hat beispielsweise der Abstand von Zeugnisnoten bzw. deren Differenz keinen interpretierbaren Sinn und damit auch der Mittelwert nicht. Eine „gute“ Leistung und eine „ungenügende“ Leistung können nicht ohne Modellierungsverabredungen als „ausreichend“ gemittelt werden. Im weiterführenden Unterricht der Stochastik sollte auf die korrekte Handhabung und Interpretation von Mittelwertberechnungen Wert gelegt werden.
Für die Weiterarbeit bietet die Aufgabe verschiedene Möglichkeiten zur Variation.

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten, kann ein erleichterter Zugang zur Aufgabe gegeben werden, indem bei einer äquivalenten Aufgabenstellung bereits einige absolute Häufigkeiten für Zensuren eingetragen sind. Darüber hinaus sollten die betreffenden Schülerinnen und Schüler zur Einsicht geführt werden, dass eine möglichst „symmetrische Verteilung“ der absoluten Häufigkeiten um den angestrebten Mittelwert schnell zu einer Lösung führt.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, kann bei der Diskussion verschiedener Lösungsvarianten auch auf „Grenzfälle“ eingegangen werden. So könnten z.B. alle Schüler die Zensur 3 erhalten haben. Beziehungen solcher Lösungen zu realen Ergebnissen von Klassenarbeiten lassen sich damit thematisieren und bieten Möglichkeiten, auf die Notwendigkeit verschiedener anderer statistischer Kennwerte (z.B. Spannweite, Median) einzugehen. Damit kann auch die Aussagekraft der bloßen Angabe eines Mittelwertes thematisiert und relativiert werden.
Weitere Variationsmöglichkeiten bieten sich durch Verändern der gegebenen Aufgabenbedingungen (z.B. Schüleranzahl, Notendurchschnitt).
Verschiedene Herangehensweisen und Lösungsvarianten bieten die Möglichkeit, im Unterricht an Kompetenzen im Bereich des Argumentierens (K2) und Kommunizierens (K6) zu arbeiten. Unterschiedliche Formen der Kommunikation (z.B. Arbeit in (Klein)Gruppen) können hier hilfreich sein. Die Effektivität gewählter Lösungswege sollte diskutiert werden.
Empfehlenswert ist eine gekoppelte Auswertung mit Aufgabe 20.1 in diesem Heft.

Aufgabe 21

Runden
Zwei verschiedene natürliche Zahlen werden auf Zehner gerundet. In beiden Fällen erhält man 20.

Um wie viele Einer können sich die beiden Zahlen **höchstens** unterscheiden? Kreuze an.

- ☐ Um 3 Einer
- ☐ Um 4 Einer
- ☐ Um 5 Einer
- ☐ Um 9 Einer
- ☐ Um 10 Einer

Lösung

„Um 9 Einer“

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler brauchen eine gute Vorstellung vom Dezimalsystem (L1) und Kenntnis der Rundungsregeln, um eine geeignete Lösungsidee zu entwickeln (K2). Sie bestimmen beispielsweise die kleinste und größte natürliche Zahl, die auf ganze Zehner zu 20 gerundet wird: 15 ist die kleinste natürliche Zahl, die auf ganze Zehner schon zu 20 aufgerundet wird, und 24 ist die größte natürliche Zahl, die auf ganze Zehner noch zu 20 abgerundet wird. Die Differenz beträgt 9. Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II) und erfordert einen formalen technischen Umgang mit Elementen der Mathematik (K5).

Der **Fehler**, hier überschlagsmäßig die Auswahlantwort 10 anzukreuzen, liegt nahe und lässt eine im Prinzip richtige Grundvorstellung vermuten, die entsprechend des oben Geschriebenen korrigiert werden sollte. Beim Ankreuzen von 4 oder 5 hat eine Schülerin oder ein Schüler wahrscheinlich nur entweder das Ab- oder das Aufrunden im Auge gehabt.

Anregungen für den Unterricht

Das Auf- und Abrunden von Zahlen im Dezimalsystem sollte eng mit der Frage nach einer sinnvollen Genauigkeit bei Zahlenangaben gesehen werden und dem Ziel, den Fehler in Rechnungen mit gerundeten Angaben zu minimieren. Auch Überschlagsrechnungen, das Schätzen von Größenangaben und das Bestimmen sinnvoller Näherungswerte gehören in diesen Kontext.

Mit **Schülerinnen oder Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten,** sind die Rundungsregeln zu wiederholen. Übungen sollten sich nicht nur auf das Runden an sich beschränken, sondern ebenfalls die jeweiligen Abweichungen vom exakten Wert einbeziehen. Auch die Betrachtung der umgekehrten Aufgabenstellung, d.h. ausgehend vom gerundeten Wert mögliche Ausgangswerte zu benennen, erzeugt Verständnis für die vorliegende Fragestellung.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe gelöst haben**, können Anfänge einer Fehler-(Verfolgungs-)Rechnung im Unterricht besprochen werden.
Auch die folgende Aufgabenstellung ist empfehlenswert:
„Wenn man eine Zahl mit vier Nachkommastellen auf eine Nachkommastelle rundet, erhält man 11,6. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Ausgangszahl?“

Aufgabe 22

Rabatt
Elektro-Meier will sein Verkaufssortiment erweitern. Das Geschäft möchte zukünftig auch MP3-Player mit verbesserter Speicherkapazität anbieten können.

Von einer Herstellerfirma bekommt Meier folgendes Angebot:

Der Einkaufspreis für einen MP3-Player beträgt 40,- €. Bei Abnahme von mindestens 50 Stück reduziert sich dieser Preis um 5 %, bei Abnahme von mindestens 100 Stück werden 10 % und bei Abnahme von mindestens 150 Stück 15 % Mengenrabatt gegeben.

Kreuze für jede Aussage an, ob sie zutrifft oder nicht.

Aussage	Richtig oder falsch?	
Kauft Elektro-Meier 35 Stück ein, so bekommt er insgesamt 140,- € Rabatt.	☐ Richtig	☐ Falsch
Wenn Elektro-Meier mindestens 50 aber höchstens 75 Stück einkauft, erhält er einen Rabatt von 2,- € pro Stück.	☐ Richtig	☐ Falsch

Aufgabe 22

Lösung

Aussage 1 ist falsch. Aussage 2 ist richtig.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Zahl (L1)**
Kompetenz	**Mathematisch modellieren (K3)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler verwenden bei dieser Aufgabe sachgerecht die Prozentrechnung (L1). Die Aufgabe enthält verschiedene Informationen, von denen die zur Lösung notwendigen auszuwählen sind (K6).

Um das Problem mit Realitätsbezug zu bearbeiten, ist von den Schülerinnen und Schüler zu modellieren (K3). Es sind entsprechende Berechnungen auszuführen (K5). Ein mehrschrittiges Vorgehen ist erforderlich (AB II). Zunächst sind die Stückzahlen von MP3-Playern aus der Tabelle zu entnehmen und in Relation zu den Mengenstaffeln des einleitenden Textes zu setzen. Dabei sollte erkannt werden, dass die Angaben, die sich auf eine Mindestzahl von 100 Playern beziehen, in keiner der beiden Aussagen zutreffen. Die erste Rabattstufe bei 50 Playern wird in der ersten Aussage ebenfalls nicht erreicht. Somit ist auch kein Rabatt zu erwarten, die erste Aussage ist falsch.
Die zweite Aussage erfüllt mit der Angabe eines Bereiches von mindestens 50 und höchstens 75 MP3-Playern die Bedingungen zum Erhalten eines Rabatts (Abnahme von mindestens 50 Stück). Der Einkaufspreis reduziert sich um 5 %, also um 2 € pro Player. Die Aussage ist richtig.

Schwierigkeiten, die zu **Fehlern** führen können, sind zunächst im Textverständnis zu erwarten. Verschiedene Formulierungen im Ausgangstext können zu Missverständnissen führen:

- „Elektro-Meier“ (1. Zeile) und „Meier“ (3. Zeile)
- „verbesserte“ Speicherkapazität (Geht es vielleicht um eine erhöhte Speicherkapazität, z.B. von 500 MB auf 1000 MB?)
- Der „Einkaufspreis“ verringert sich um 5 % bei Mindestabnahme von 50 Stück, ab 100 bzw. 150 Stück gibt es einen „Mengenrabatt“. Dieser Mengenrabatt könnte sich also auch auf den verringerten Einkaufspreis beziehen.

Häufige Fehler dürften darin bestehen, dass die Schülerinnen und Schüler, die für die Lösung entscheidenden Angaben nicht korrekt aus dem Text entnehmen, um sie dann an gegebenen Aussagen zu prüfen. Durch die Verwendung von Quantifizierungen (hier: mindestens und höchstens) im Aufgabentext sind weitere Schwierigkeiten zu erwarten. Die zweite zu bewertende Aussage („Wenn Elektro-Meier …“) ist eine Implikation, die erfahrungsgemäß häufig von Schülerinnen und Schülern inhaltlich nicht vollständig erfasst wird.

Anregungen für den Unterricht

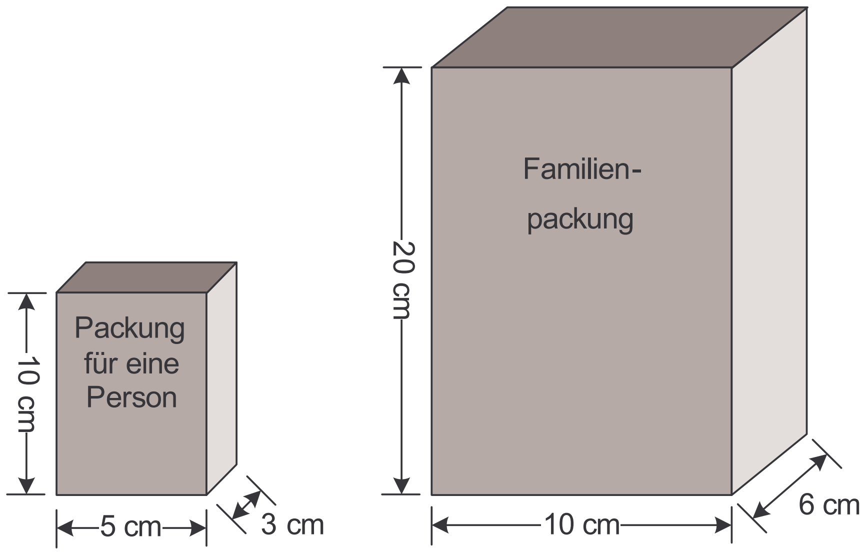
Der Inhalt der Aufgabenstellung und die zu bewertenden Aussagen beinhalten einen Sachverhalt, der den Schülerinnen und Schülern aus ihrer Erfahrungswelt bekannt ist, ohne dass sie vielleicht bereits selbst in einer ähnlichen Situation gewesen sind. Rabattaktionen bei verschiedenen Artikeln des Einzelhandels (z.B. Bekleidung, Unterhaltungselektronik) sind alltäglich und bieten vielfältige Gelegenheit zu Betrachtungen und „Überprüfungen“ für den Konsumenten. Für entsprechende Aufgabenstellungen lassen sich weitere Beispiele aus Werbeprospekten entnehmen und geeignet variieren. Mit allen Schülerinnen und Schülern kann im Zusammenhang mit dieser Aufgabe über sprachliche Quantifizierungen (z.B. höchstens, mindestens, wenigstens, mehr als, weniger als) gesprochen werden, um Unterschiede zwischen alltäglichem Sprachgebrauch und deren Gebrauch in der Mathematik bewusst zu machen.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten,** könnte der Aufgabentext dahingehend ausgewertet werden, dass zunächst die enthaltenen Informationen zu Rabattmöglichkeiten in einer Tabelle dargestellt werden. Die Beurteilung der beiden Aussagen kann damit erleichtert werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können aufgefordert werden, den Aufgabentext durch verschiedene andere Angaben zu variieren und weitere zu bewertende Aussagen im Sachzusammenhang zu formulieren und mit richtig oder falsch zu beantworten.
Mit dem Bezug auf eine Werbeaktion eines großen Elektronik-Discounters könnte u.a. untersucht werden, ob man bei 19 % Rabatt auf den Endverkaufspreis tatsächlich einen Betrag in Höhe der Mehrwertsteuer eines bestimmten Artikels (wie im Werbeprospekt versprochen) spart. Die Aufgabe bietet Möglichkeiten, an Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler im Verständnis von Texten mit mathematischem Inhalt zu arbeiten und ihnen Gelegenheit zu geben, ihre Überlegungen und Lösungswege verständlich darzustellen (K6).

Aufgabe 23

Cornflakes



Die beiden abgebildeten Packungen für Cornflakes haben die gleiche Form und sind beide vollständig mit Cornflakes gefüllt. Die kleine Packung enthält die Menge Cornflakes, die normalerweise für eine Person reicht. Wie viele solcher Portionen Cornflakes enthält dann die Familienpackung?

Kreuze an.

- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ 8
- ☐ 12

Lösung

8

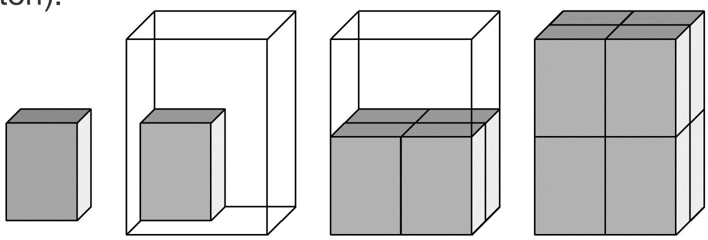
Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Beide Verpackungen sind miteinander bezüglich ihrer Volumina zu vergleichen (L2). Dabei sind die realen Verpackungen in der Aufgabe bereits reduziert auf das Wesentliche, die Darstellung der Quader. Bei den nachfolgend beschriebenen Lösungswegen ist das Vorgehen mehrschrittig (AB II):

- Mit Hilfe der Maßangaben in den Darstellungen kann bereits der Vergleich beider Packungen quantifiziert werden (K4). Die Darstellung erlaubt das Einzeichnen von Hilfslinien und so das Skizzieren der ganzen Lösung (s. Abb. unten).

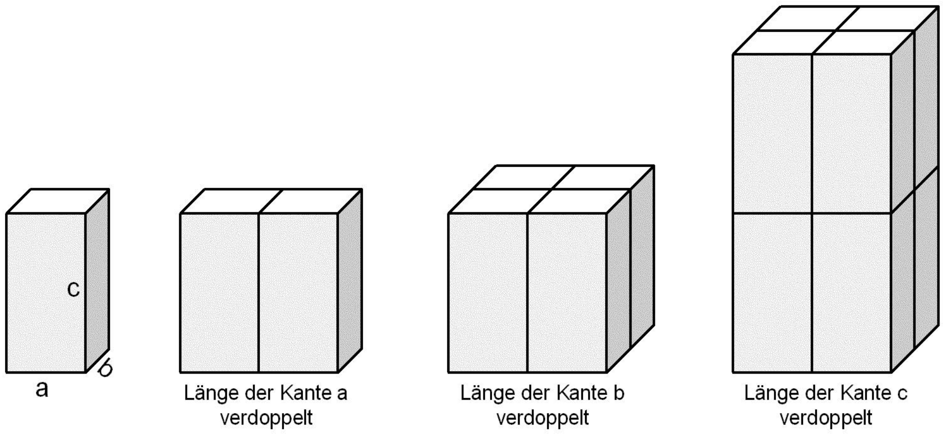


- Alternativ ist der Weg über die berechneten Volumina möglich (K5).
- Ein rein rechnerischer, die Maßzahlen berücksichtigender Ansatz, verlangt nach einer Strategie und dem mehrschrittigen (innermathematischen) Modellieren (K2, K3).
  $5 \cdot 3 \cdot 10 = 150 \quad 10 \cdot 6 \cdot 20 = 1200 \quad 1200 : 150 = 8$
  bzw. $8 \cdot 150 = 1200$
- Darüber hinaus kann das Verwenden der Volumenformel des Quaders zu einer allgemeinen Beantwortung des Problems führen, was den Anforderungsbereich auf III erhöhen würde:
  $V_Q = a \cdot b \cdot c$ $\Rightarrow$ Verdoppelung der Kantenlängen $\Rightarrow$ Verachtfachung des Volumens $\quad V_Q = 2\,a \cdot 2\,b \cdot 2\,c = 8 \cdot a \cdot b \cdot c$

Aufgabe 23

Anregungen für den Unterricht

Für Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, empfiehlt sich der Einsatz konkreter Materialien. Dies können quaderförmige Verpackungen sein, aber z.B. auch Cuisenaire-Stäbe:

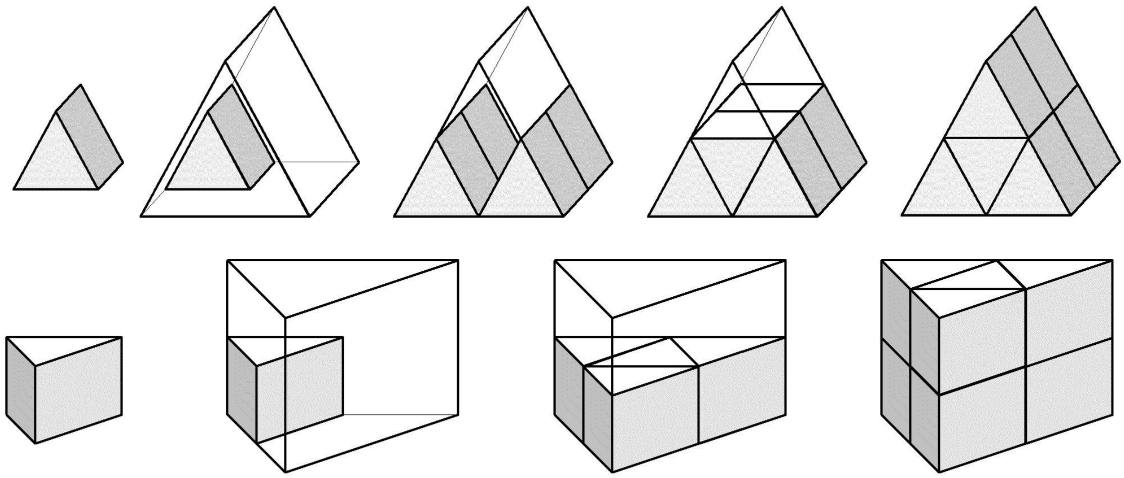


Weitere Verständnis klärende Fragen nach dem jeweiligen Quadervolumen sollten sich anschließen, z.B.:
Wie verändert sich V_Q , wenn
- nur die Kantenlänge a verdreifacht wird?
- die Kantenlängen a und b verdreifacht werden?
- wenn alle Kantenlängen verdreifacht werden?

Entsprechende Fragestellungen wie bei Vervierfachungen, Halbierungen, Drittellungen der Kantenlängen können folgen.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können durch Variationen innerhalb dieses Aufgabentyps gefördert werden, indem sie über entsprechende Situationen kritisch reflektieren und verallgemeinernd zu Ergebnissen gelangen (AB III).
Beispiele:
- Klaus behauptet: „Die Verachtfachung des Quadervolumens bei Verdoppelung der Kantenlängen gilt analog auch für Dreiecksprismen, wenn man die Grundseite g des Dreiecks, die Dreieckshöhe h_g und die Körperhöhe k verdoppelt.“
  Inga sagt: „Da muss ich gar nicht lange drüber nachdenken. Dreiecksprismen sind doch nichts anderes als halbierte Quader.“
  Petra erwidert: „Wenn das mit den halbierten Quadern stimmt, dann kann sich das Volumen aber nur vervierfachen. Die Hälfte von 8 ist schließlich 4.“
  Ute meint schließlich: „Ganz klar – Verachtfachung. Solange in den Formeln nur Malzeichen vorkommen, ist das alles ungefährlich. Wehe, wenn da ein Plus- oder Minuszeichen drinsteckt, wie z.B. beim Trapezprisma, dann ist Alarmstufe Rot.“
  Wer hat recht?

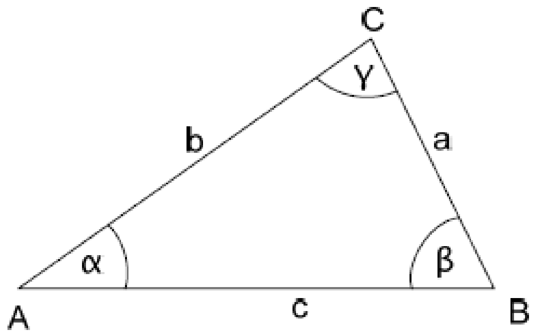
Aufgabe 23



- Was geschieht mit dem Oberflächeninhalt (Verpackung) der quaderförmigen Cornflakes-Packung, wenn man die Kantenlängen verdoppelt?
  Wie sieht dies im Beispiel „Dreiecksprismen“ aus?

Aufgabe 24

Dreieck
Die (nicht maßstäbliche) Skizze zeigt das Dreieck ABC mit einem Umfang von 80 cm. c ist die längste Seite des Dreiecks.



24.1: Kreuze die richtige Aussage an.

- ☐ $\gamma = \alpha$
- ☐ $\gamma < \alpha$
- ☐ $\gamma > \beta$
- ☐ $\gamma < \beta$

24.2:

- ☐ a = 40 cm
- ☐ a < 40 cm
- ☐ a > 40 cm
- ☐ a = 80 cm

Lösung

24.1: $\gamma > \beta$
24.2: a < 40 cm

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Aufgabe 24

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler haben nach Erfassen der im Aufgabentext beschriebenen Eigenschaften des Dreiecks ABC

- die Größe des Winkels γ im Vergleich zu den beiden anderen Innenwinkeln bzw.
- die Länge der Seite a

hinsichtlich der vorgegebenen Auswahlantworten zu prüfen (L2).
Sie verwenden dazu die Darstellung (K4), arbeiten mit symbolischer und formaler Sprache (K5) und nutzen eine geeignete Lösungsstrategie (K2). Ihr Vorgehen ist mehrschrittig und erfordert eine Verknüpfung ihres vorhandenen Wissens (AB II).

Fehler können auftreten, wenn nicht alle beschriebenen Eigenschaften des Dreiecks ABC (Der Umfang ist 80 cm und c ist die längste Seite.) zur Lösung herangezogen werden.
Nichtbeachten der Dreieckseigenschaft „Der längsten Seite in einem Dreieck liegt auch der größte Winkel gegenüber." führt bei Aufgabe 24.1 zu den falschen Antworten ($\gamma < \alpha$ und $\gamma < \beta$).
Bei Aufgabe 24.2 besteht die Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler nur schwer oder nicht in der Lage sind, die Länge der Seite a einzuordnen. Sowohl eine konkrete Längenangabe (a = 40 cm bzw. a = 80 cm) als auch eine Länge über 40 cm (vgl. Gesamtumfang) kommen nicht in Frage. Ein möglicher Weg für Schülerinnen und Schüler ist das Ausschlussverfahren, dass in Verbindung mit der Bedingung „c ist längste Seite im Dreieck" zur richtigen Auswahl führt.

Schülerinnen und Schüler, die falsche Lösungen angekreuzt haben, können im nachfolgenden Unterricht aufgefordert werden, Dreiecke mit den in der Lösung angegebenen Bedingungen zu zeichnen. Diese können dann an Hand der Vorgaben im Aufgabentext geprüft werden.

Anregungen für den Unterricht

Für **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, könnte die dazugehörige Skizze Anregung für auswertende Betrachtungen liefern. Dabei kann u.a. problematisiert werden, dass die im Text beschriebenen Eigenschaften des Dreiecks ABC durch diese Skizze lediglich für ein denkbares Dreieck visualisiert werden. Ein Messen in dieser Skizze reicht aber für das Finden allgemeingültiger Lösungen nicht aus. Die Schülerinnen und Schüler können aufgefordert werden, weitere Dreiecke zu skizzieren, die die angegebenen Bedingungen erfüllen, um aus den Konkretisierungen einen allgemeinen Zugang zu finden. Dafür sollten relevante Eigenschaften von Dreiecken (z.B. Seite-Winkel-Beziehungen, Dreiecksungleichung) wiederholt und mit Hilfe verschiedener Repräsentanten gezeigt werden. Durch Veränderung der gegebenen Eigenschaften (z.B. Umfang, Lage der längsten Seite) kann die gegebene Aufgabenstellung variiert werden.

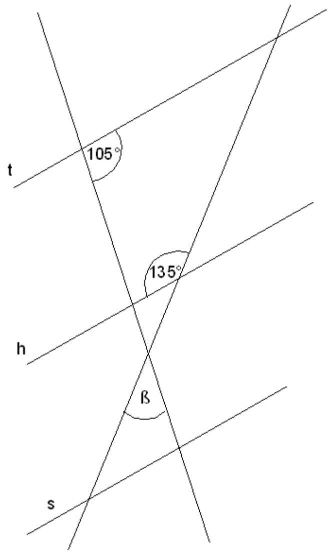
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können angeregt werden, weitere Aussagen über Seiten- und Winkelverhältnisse in Dreiecken zu untersuchen, ggf. sogar selbst zu formulieren. Das könnten Aussagen sein, wie:

- Alle gleichschenkligen Dreiecke haben drei spitze Winkel.
- Es gibt gleichschenklige Dreiecke, die zwei stumpfe Winkel haben.
- Nicht alle gleichschenkligen Dreieck sind stumpfwinklig.

Es bietet sich dann an, den Wahrheitsgehalt solcher Aussagen zu überprüfen, ggf. ausgehend von gezeichneten Repräsentanten. Weiterhin könnte auf die Rolle von Quantifizierungen (z.B. „alle“, „es gibt“, „nicht alle“) in mathematischen Aussagen und in der Alltagssprache eingegangen werden.

Aufgabe 25

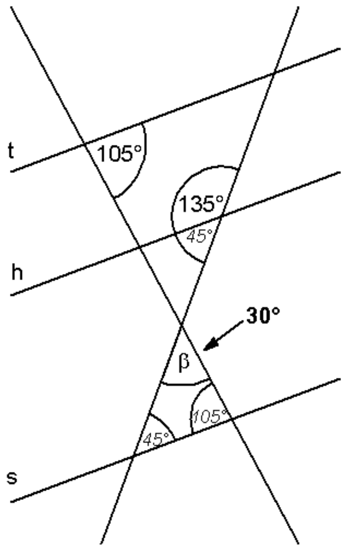
Winkelgröße
Die Geraden t, h und s verlaufen parallel zueinander.
Bestimme den Winkel β. Dein Vorgehen soll nachvollziehbar sein.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung

Richtige Lösung „30°“ mit angemessener Beschreibung/Begründung.
Die Beschreibung muss schlüssig sein und zumindest implizit (z.B. in einer Zeichnung) oder auch explizit die Sätze über Stufen-, Neben-, Scheitelwinkel und Winkelsumme im Dreieck beinhalten.



Aufgabe 25

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Mathematisch argumentieren (K1)** **Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler wenden bei dieser Aufgabe Sätze über Winkelbeziehungen an geschnittenen parallelen Geraden und im Dreieck an (L3), um die Größe des Winkels β zu bestimmen (L2).
Zur erfolgreichen Bearbeitung müssen Zusammenhänge zwischen den in der graphischen Darstellung gegebenen Winkelgrößen und der gesuchten Winkelgröße erkannt und angewendet werden (K4). Grundkenntnisse zu Winkeln an geschnittenen Parallelen, zu Winkeln an sich schneidenden Geraden und zur Winkelsumme im Dreieck dienen dazu, einen Lösungsweg zu finden (K2). Dieser ist mehrschrittig und wird in einer nachvollziehbaren Argumentation dargestellt (K1, AB II).
Die Aufgabe erlaubt verschiedene Lösungswege. Alle führen in unterschiedlicher Reihenfolge über Stufen-, Neben-, Scheitelwinkel und die Winkelsumme im Dreieck zur Lösung, sofern die entsprechenden Sätze richtig verwendet werden. Schülerinnen und Schüler setzen je nach Voraussetzungen einen Lösungsweg um (K5). Dabei kann die gegebene Zeichnung als Hilfsmittel dienen.

Bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung können auftretende **Fehler** folgende Ursachen haben:

- Schülerinnen und Schüler argumentieren nicht über Winkelsätze an geschnittenen Parallelen und den Winkelsummensatz im Dreieck, sondern begründen ihr Ergebnis, z.B. mit der Aussage: „Das habe ich mit meinem Geodreieck abgemessen".
- Schülerinnen und Schüler erkennen in der Darstellung nicht die entscheidende Figur „Dreieck" und nutzen nicht die Parallelität der sich schneidenden Geraden.
- Schülerinnen und Schüler können die zur Bearbeitung der Aufgabe erforderlichen Winkelsätze nicht anwenden, weil sie ihnen nicht bewusst sind.

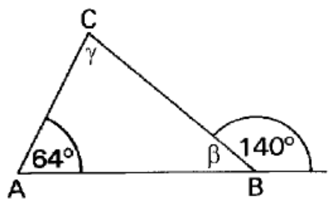
Zur genaueren **Diagnose** ist es notwendig, zunächst die Beschreibungen der gegebenen Figur einzufordern. Anschließend sollten dann verschiedene Ansätze vorgestellt und besprochen werden. Je nachdem, wie β ermittelt wurde, werden die wichtigsten Lösungsschritte gekennzeichnet (vgl. Lösungsskizze) oder aufgeschrieben.

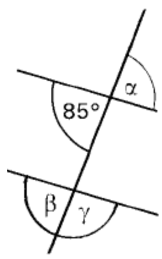
Anregungen für den Unterricht

Bei der Bestimmung von Winkelgrößen kann der unterstützende Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware im Unterricht zur Festigung der Inhalte beitragen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten,** bietet es sich an, die Komplexität der Aufgabe zu reduzieren, indem die Winkelsätze zunächst isoliert geübt werden bzw. Aufgaben bearbeitet werden, zu deren Lösung nur ein einschrittiges Vorgehen notwendig ist. Dazu bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben, die Aussagen zur Winkelsumme in n-Ecken, zu Winkeln an sich schneidenden Geraden bzw. an geschnittenen Parallelen erfordern. Es ist sinnvoll, dabei zunächst beschreiben zu lassen, welche für die Lösung der Aufgabe relevanten Informationen in der Darstellung bzw. dem Aufgabentext enthalten sind.
Beispiele:

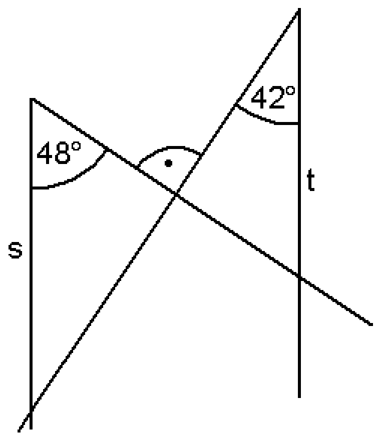
- Zeichne (mit einem Programm zur dynamischen Geometrie) ein Dreieck, (Viereck, Fünfeck, …). Bestimme die Summe der Innenwinkel. Vergleiche jeweils die Anzahl der Ecken mit der Summe der Innenwinkel. Notiere deine Feststellungen über die Winkelsumme.
- Bestimme die Größe aller in den beiden unten stehenden Zeichnungen auftretender Winkel und trage die Ergebnisse in der Zeichnungen ein. Gib an, wie viele Winkelmaße als Zwischenergebnisse mindestens bestimmt werden müssen, bevor man das Winkelmaß von γ angeben kann.
  Erläutere dein Ergebnis. Wie groß ist γ?





Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten,** bieten sich vertiefende Aufgabenstellungen zur Weiterarbeit an, die nur über die Bestimmung von Zwischengrößen lösbar sind, wie:

- Bestimme die Größe aller in der Zeichnung auftretenden Winkel und trage die Ergebnisse in der Zeichnung ein.
- Begründe, warum die Strahlen s und t parallel sind.
- Untersuche, wie viele Winkelmaße als Zwischenergebnisse mindestens bestimmt werden müssen, bevor man auf die Parallelität schließen kann.
  Gib die Anzahl an und begründe.

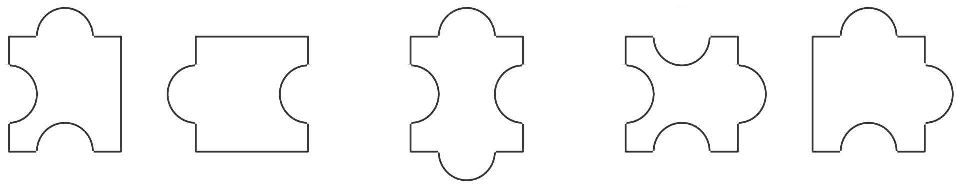


Aufgabe 26

Puzzleteile

Welches dieser Puzzleteile hat den größten Flächeninhalt ?

Kreuze an.



☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Lösung

Das 5. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

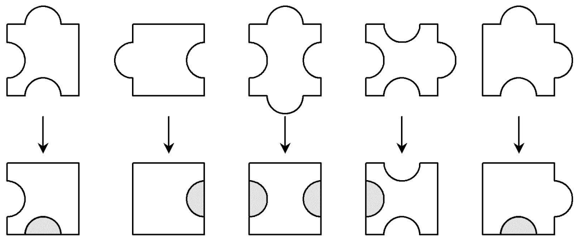
Leitidee	**Messen (L2)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Elementare Voraussetzung dieser Aufgabe ist eine Grundvorstellung bei den Schülerinnen und Schülern von Flächengrößen und die Strategie der Zerlegung in disjunkte einfachere Teilflächen, deren Inhalte man addieren kann, um den Gesamtinhalt zu bestimmen. Um Flächengleichheit zu „sehen", müssen die Schülerinnen und Schüler auch über eine Vorstellung von Kongruenz verfügen, ohne diesen Begriff unbedingt zu kennen.

Das Lösen dieser Aufgabe erfordert von den Schülerinnen und Schülern ein gedankliches Operieren mit den vorgegebenen Flächen (L2). Den größten Flächeninhalt finden sie durch geeignete Strategien im direkten Flächenvergleich (K2). Dazu ist es hilfreich, die komplementären Halbkreise (Ausstülpung und Einbuchtung) zu erkennen, entsprechend gedanklich zusammenzufügen und sich so der ursprünglichen Quadratform zu nähern (K4).

Aufgabe 26



Neben dieser visuellen Vorstellung kann auch das konkrete Zählen der Einbuchtungen und Ausstülpungen bei jeder einzelnen Figur eine Lösungsstrategie sein. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II).

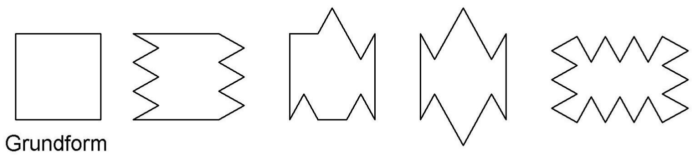
Anregungen für den Unterricht

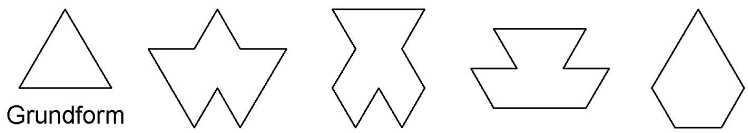
Für den Unterricht bieten sich zahlreiche Aufgabenvariationen zu diesem Sachverhalt an.

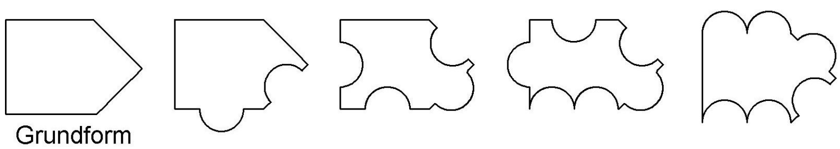
Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgabe hatten, sollten die Lösungsstrategie an Variationen der gegebenen Aufgabe festigen. Gemäß der angesprochenen Grundvorstellung sollten auch einfachere Flächen betrachtet werden, die aus Rechtecken oder rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt sind.

Bei **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, kann der Schwierigkeitsgrad durch komplexere Formen erhöht werden.

Beispiele:

- 

- 

- 

Durch Weglassen der Grundform wird der Schwierigkeitsgrad weiter erhöht.

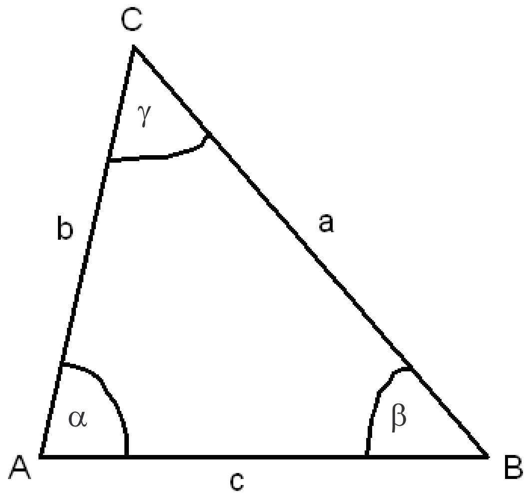
Aufgabe 27

Aufgabe 27

Konstruierbare Dreiecke

Entscheide jeweils, ob sich mit den unten angegebenen Bestimmungsstücken (siehe auch Zeichnung) ein Dreieck (bis auf seine Lage) eindeutig konstruieren lässt.

Kreuze an.



(Zeichnung nicht maßstabsgerecht !)

Bestimmungsstücke			ja	nein
c = 5,8 cm	α = 40°	ß = 68°	☐	☐
γ = 72°	α = 40°	ß = 68°	☐	☐
b = 8,8 cm	c = 5,6 cm	α = 53°	☐	☐
c = 5,8 cm	a = 7,4 cm	α = 68°	☐	☐
c = 6 cm	a = 4 cm	α = 70°	☐	☐

Lösung

1. Zeile: "ja"
2. Zeile: "nein"
3. Zeile: "ja"
4. Zeile: "ja"
5. Zeile: "nein"

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Diese Aufgabenstellung gehört zur Dreiecksgeometrie (L3). Als ersten Schritt zur Lösung müssen die Schülerinnen und Schüler die gegebenen Bestimmungsstücke mit der zeichnerischen Darstellung des Dreiecks in Beziehung setzen (K4). Falls die Kongruenzsätze bekannt sind, liegen die Anforderungen vor allem im Anwenden auf die jeweils gegebene Situation (K5). Bei den in der zweiten und letzten Zeile gegebenen Bedingungen sind zusätzliche Überlegungen, am besten mit Hilfe einer Zeichnung, nötig. Die Schülerinnen und Schüler müssen mit selbst gewählten Lösungsstrategien die Problemstellungen bearbeiten (K2), insbesondere dann, wenn die Kongruenzsätze nicht bekannt sind. Die Vorgehensweise ist mehrschrittig (AB II).

Erfahrungsgemäß kennen wahrscheinlich viele Schülerinnen und Schüler die Kongruenzsätze nicht mehr exakt. Probleme und damit **Fehler** werden vor allem bei den in der zweiten, vierten und fünften Zeile gegebenen Bedingungen auftreten. Bei den Bedingungen der zweiten Zeile führt ein ausgeprägtes geometrisches Vorstellungsvermögen zu der Erkenntnis, dass es mehrere nicht kongruente Lösungen gibt. Bei den in der vierten Zeile angegebenen Bedingungen kann auf den entsprechenden Kongruenzsatz zurückgegriffen oder (in Gedanken) eine Zeichnung angefertigt werden. Bei den Bedingungen der letzten Zeile, in denen der angegebene Winkel der kleineren Seite gegenüberliegt, sind die notwendigen Überlegungen komplexer und erst ein Konstruktionsversuch hilft bei der Entscheidung, ob es kein oder ein Dreieck oder es sogar zwei Dreiecke geben kann.

Allein anhand der Bearbeitung der Aufgaben lassen sich aufgrund des Antwortformats („ja“/„nein“) nur sehr eingeschränkt Aussagen zur **Diagnose** stellen, zumal die Wahrscheinlichkeit, die richtige Entscheidung zu treffen, jeweils 0,5 beträgt. Insbesondere bei den Bedingungen der fünften Zeile besteht die Möglichkeit, dass eine falsche Vorstellung (Liegt der angegebene Winkel der kürzeren Seite gegenüber, kann es kein eindeutig gegebenes Dreieck geben.) zur richtigen Antwort führt. Bezüglich dieser Zeile sowie bei fehlerhafter Bearbeitung bietet es sich an, durch weitergehende Aufgabenstellungen, wie zum Beispiel „Begründe deine Antwort.“, tiefer gehende Analysen durchzuführen.
Bei fehlerhafter Bearbeitung bietet es sich an, durch weitergehende Aufgabenstellungen, wie zum Beispiel „Begründe deine Antwort“, detailliertere Analysen durchzuführen.

Anregungen für den Unterricht

In diesem Bereich der Geometrie ist ein anschauliches und experimentierendes Vorgehen an den Anfang zu stellen. Hierzu empfiehlt es sich, die Schülerinnen und Schüler Dreiecke aus gegebenen Bestimmungsstücken zeichnen und konstruieren zu lassen. Daraus resultierende Überlegungen sollten im Anschluss mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware vertieft werden. Dies ist gerade in solchen Situationen sinnvoll, in denen es unendlich viele Lösungen gibt. Darauf können verallgemeinernde, theoretische Fragestellungen folgen, z.B.: „Wie viele Bestimmungsstücke sind mindestens notwendig?“

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, empfiehlt es sich, an Hand von Beispielen aufzuzeigen, dass durch gegebene Bestimmungsstücke für jedes Dreieck einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

- Das Dreieck ist nicht konstruierbar.
  Beispiel: Die Dreiecksungleichung ist nicht erfüllt.
- Das Dreieck ist nicht eindeutig konstruierbar.
  Beispiel: Es sind nur die Maße der drei Innenwinkel gegeben.
- Das Dreieck ist (bis auf Kongruenz) eindeutig konstruierbar.

Hierzu ist, wie oben bereits erwähnt, ein anschauliches und handlungsorientiertes Vorgehen empfehlenswert.
Der Fall der Mehrdeutigkeit einer Konstruktion lässt sich im Klassenverband herausarbeiten, indem in selbstständiger Schülerarbeit Dreiecke aus drei vorgegebenen Bestimmungsstücken (z.B. die Maße der drei Innenwinkel oder $\alpha = 30°$, $c = 6$ cm und $a = 4$ cm) konstruiert und die Lösungen anschließend verglichen werden. Gerade im Fall, dass neben zwei Seiten der Winkel gegeben ist, der der kürzeren Seite gegenüberliegt, sollten die unterschiedlichen Möglichkeiten erarbeitet werden.

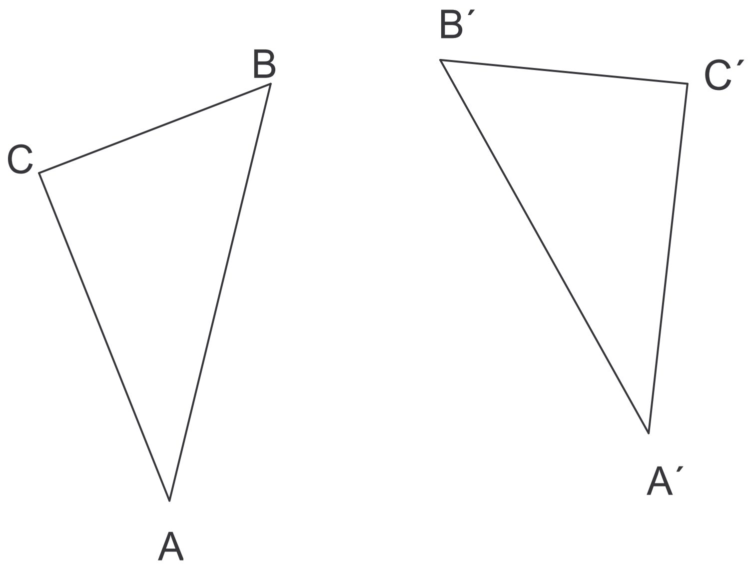
Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich Anwendungsaufgaben zu den Kongruenzsätzen an, z.B. das Lösen von Vermessungsaufgaben mit Hilfe maßstabsgetreuer Zeichnungen.
Weitergehende theoretische Fragestellungen, wie „Welche Bestimmungsgrößen legen ein Viereck bis auf Kongruenz fest?“, können sich anschließen. Vgl. auch Aufgabe 24 und Aufgabe 28.

Aufgabe 28

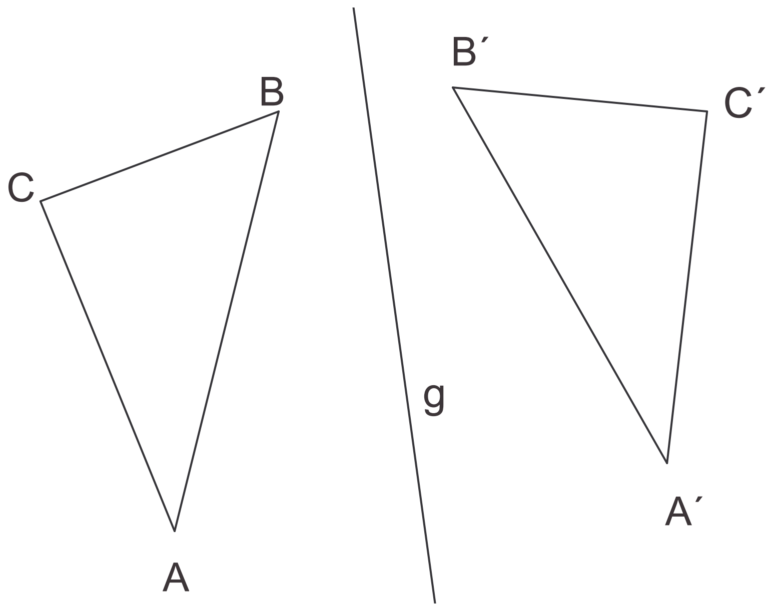
Spiegelachse

Das Dreieck A´B´C´ ist das Ergebnis einer Achsenspiegelung des Dreiecks ABC.

Zeichne die Spiegelachse g ein .



Lösung



Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Beim Betrachten der achsensymmetrischen Darstellung wird zunächst die (gedankliche) Zuordnung von Bildpunkten zu Originalpunkten in der Darstellung erwartet (K4). Unterschiedliche Strategien (K2, AB II) sind für das Bestimmen der Spiegelachse denkbar:

- Anwenden von Alltagswissen bzw. Grundvorstellungen, dass Bild und Original denselben Abstand zur Spiegelachse haben und sich genau gegenüberliegen. In diesem Fall ergibt sich die Lösung allein aus Halbieren der Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ (bzw. $\overline{CC'}$) und der Verbindung der Halbierungspunkte bzw. durch Interpretation "von genau gegenüber liegend" als "mittel - senkrecht sein" von Original-Bild-Strecke zur Spiegelachse (vgl. unten).
- Anwenden der geometrischen Eigenschaften der Spiegelung. Hier wäre nur einmal ein Originalpunkt mit dem dazugehörigen Bildpunkt durch eine Strecke zu verbinden (oder umgekehrt) und darauf die Mittelsenkrechte zu konstruieren.

Dazu sind mathematische Werkzeuge (Geodreieck, Zirkel und Lineal oder ggf. Geometrie-Software) zu nutzen (K5), deren Einsatz in diesen Situationen bereits geübt wurde.

Fehler entstehen, wenn
- eine geschätzte, augenscheinliche Symmetrieachse eingezeichnet
- ungenau gezeichnet
- mathematische Werkzeuge fehlerhaft genutzt
- die Halbierungs- oder Orthogonalitätsbedingung nicht beachtet

wurde(n).

Zur **Diagnose** kann die Lehrkraft die Bearbeitung der Darstellung heranziehen. Weiteren Aufschluss kann eine Beschreibung der Vorgehensweise geben.

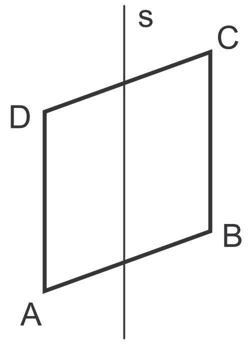
Anregungen für den Unterricht

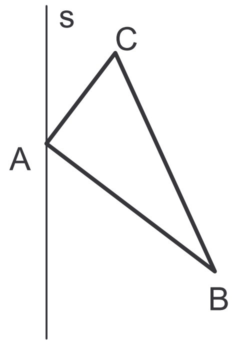
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollen zunächst ein Dreieck oder eine andere ebene Figuren an einer vorgegebenen Achse spiegeln. Dazu ist der Einsatz des Geodreiecks sinnvoll. Es ermöglicht das eigenständige Finden von Eigenschaften der Geradenspiegelung. Anschließend ist das Besprechen von Strategien zur Bearbeitung sinnvoll. Eventuell ist der Umgang mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeugen durch Üben vorher abzusichern.

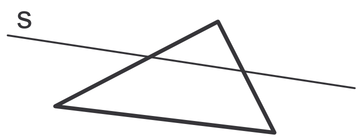
Aufgabe 28

Als weitere Aufgaben sind solche wie die folgenden zu empfehlen:

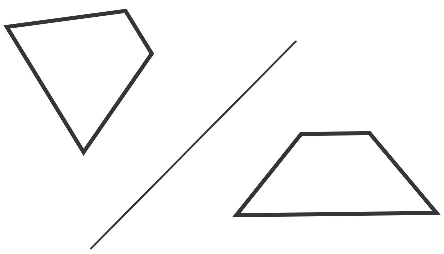
- Spiegle jede Figur an der Spiegelachse s.



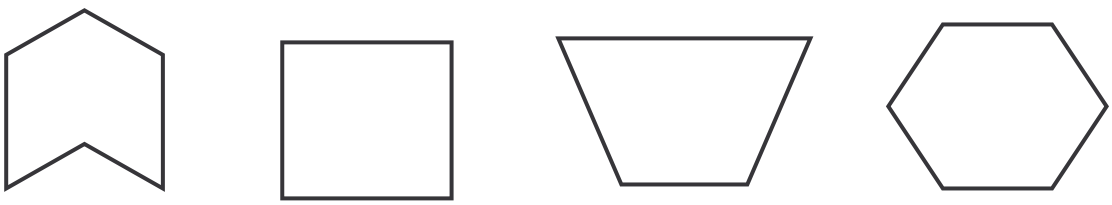




- Ist die Gerade s Spiegelachse der gegebenen Figuren? Begründe deine Entscheidung.



- Folgende Figuren sind durch eine Achsenspiegelung entstanden. Zeichne alle möglichen Spiegelachsen in jede Figur ein.



Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Aufgabe gelöst haben, können sich im Aufschreiben von Handlungsanweisungen zum Finden einer Symmetrieachse bei ebenen Figuren üben. Dabei sollte bewusst werden, dass diese Vorgehensweise zugleich zur Überprüfung der Achsensymmetrie genutzt werden kann.

Aufgabe 29

Trapez
Kreuze die Eigenschaft an, die für jedes beliebige gleichschenklige Trapez gilt.

☐ Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.
☐ Die Diagonalen sind gleich lang.
☐ Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
☐ Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.

Lösung

Die Diagonalen sind gleich lang.

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler haben aus den gegebenen Aussagen über gleichschenklige Trapeze (L3) die zutreffende Eigenschaft auszuwählen. Sie verwenden dazu geeignete heuristische Hilfsmittel wie Skizzen (K2) und lösen z.B. mit dem Ausschlussverfahren (K5). Ihr Vorgehen ist mehrschrittig und erfordert eine Verknüpfung des vorhandenen Wissens (AB II).

Fehler können auftreten, wenn Schülerinnen und Schüler die Aussage über alle gleichschenklige Trapeze („für jedes ... gilt“) nicht vollständig erfassen und damit eventuell die Antworten auswählen, die sich nur auf eine echte Teilmenge (z.B. Quadrate oder Rechtecke) der gleichschenkligen Trapeze beziehen. Bei Wahl der ersten Antwortmöglichkeit besteht auch die Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler die Begriffe Diagonale und Mittelinie im Trapez verwechselt haben.

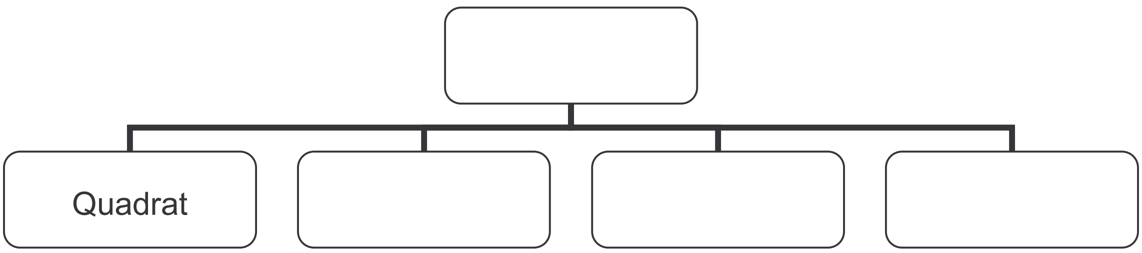
Möglichkeiten zu **Diagnose** bieten sich in der Aufgabenauswertung. Schülerinnen und Schüler sollten hier ausführlich Gelegenheit bekommen, ihre Auswahlentscheidungen vorzustellen und zu begründen.

Anregungen für den Unterricht

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten zunächst die Eigenschaften von Trapezen wiederholt werden. Falsche Auswahlantworten können Anlass sein, gleichschenklige Trapeze zu finden, die diesen Aussagen gerecht werden und Gegenbeispiele, die die getroffenen Allaussagen widerlegen. Dazu können sich Schülerinnen und Schüler durch Zeichnen, Vorstellen und Diskutieren von Beispielen für solche Trapeze auch gegenseitig Hilfen geben. Es können verschiedene Trapeze gezeichnet werden und Beziehungen zwischen verschiedenen Arten von Trapezen hergestellt und wiederholt werden.
Folgende Aussagen sollten diskutiert werden:

- Alle Rechtecke sind gleichschenklige Trapeze, aber nicht jedes gleichschenklige Trapez ist ein Rechteck.
- Es gibt Trapeze, die nur ein Paar paralleler Seiten besitzen.

Eine gemeinsam mit allen Schülerinnen und Schülern erarbeitete Übersicht zu Vierecksarten („Haus der Vierecke“) kann Grundlage für weitere Überlegungen sein. Die folgende Aufgabe bietet dazu Anregungen:
Finde einen übergeordneten Begriff und weitere Unterbegriffe. Gib mehrere Möglichkeiten an.



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können angeregt werden, weitere Aussagen über gleichschenklige Trapeze zu formulieren und zu überprüfen. Das könnten Aussagen sein, wie:

- Alle gleichschenkligen Trapeze sind Parallelogramme.
- Es gibt gleichschenklige Trapeze, die keine Rechtecke sind.
- Nicht alle gleichschenkligen Trapeze haben zwei Paar paralleler Seiten.
- Es gibt gleichschenklige Trapeze, bei denen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Im Unterrichtsgespräch bietet sich an, den Wahrheitsgehalt solcher Aussagen zu überprüfen, gegebenenfalls durch Zeichnen von Repräsentanten. Weiterhin könnte auf die Rolle von Quantifizierungen (z.B. „alle“, „es gibt“, „nicht alle“) in mathematischen Aussagen und in der Umgangssprache eingegangen werden.

Aufgabe 30

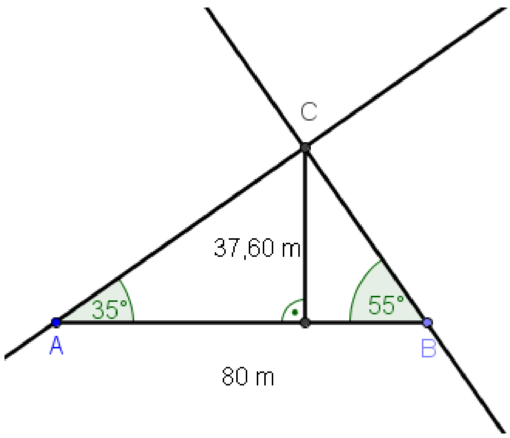
Flussbreite

Benjamin ist 14 Jahre alt und geht in die 8. Klasse. Er absolviert ein zweiwöchiges Praktikum bei einem ortsansässigen Vermessungsamt und soll die ungefähre Breite eines Flusses bestimmen. Hierzu steckt er entlang des Flussufers eine Standlinie $\overline{AB}$ von 80 m ab. Von den Endpunkten A und B misst er zu einem an der anderen Uferseite stehenden Baum die Winkelmaße $\alpha = 35°$ und $\beta = 55°$.

Bestimme die Breite des Flusses mit Hilfe einer Zeichnung.

Lösung

alle Antworten von 35 m bis 40 m
[Toleranzbereich also ca. ± 1 mm und ca. ± 1°]
Die Einheit muss Bestandteil der Lösung sein.



Eine Konstruktion ist nicht erforderlich.
Schülerantwort z.B. 35 m

Aufgabenmerkmale hinsichtlich der Bildungsstandards Mathematik

Leitidee	**Messen (L2)** **Raum und Form (L3)**
Kompetenz	**Probleme mathematisch lösen (K2)** **Mathematisch modellieren (K3)** **Mathematische Darstellungen verwenden (K4)** **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen(K5)** **Kommunizieren (K6)**
Anforderungsbereich	**AB II**

Aufgabe 30

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zunächst ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler den Text der Frage entsprechend Sinn erfassend lesen (K6). Die Realsituation ist in eine geometrische Zeichnung umzusetzen (L3, K3, K4). Dabei ist die Strecke $\overline{AB}$ im geeigneten Maßstab darzustellen. In den Punkten A bzw. B sind die Winkel anzutragen. Für die zeichnerische Lösung der Problemstellung müssen die freien Schenkel so weit verlängert werden, bis ein Schnittpunkt entsteht (K5). Von ihm ist die kürzeste Strecke (das Lot) zur Standlinie zu zeichnen und zu messen (L2). Die Erkenntnis, dass diese Strecke die gesuchte Breite liefert, ist Ergebnis einer mehrschrittigen Problemlösung (K2, AB II).

Häufig auftretende **Fehler** sind dadurch bedingt, dass die Notwendigkeit, die Höhe des Dreiecks als kürzeste Entfernung vom gefundenen Schnittpunkt zur Strecke $\overline{AB}$ zu ermitteln, nicht erkannt wird. Weitere Abweichungen können durch Zeichenungenauigkeit entstehen. Außerdem können Fehler aus Nichtbeachtung oder ungeeigneter Wahl des Maßstabs folgen.

Zur **Diagnose** sollte schwerpunktmäßig die angefertigte Zeichnung herangezogen werden, darüber hinaus auch Erläuterungen der betreffenden Schülerinnen und Schüler.

Anregungen für den Unterricht

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst unterstützt werden, eine geeignete Skizze zu entwerfen, die die gegebenen Werte enthält und die gesuchte Strecke ausweist. Als Hilfsmöglichkeit sollte ggf. mit Unterstreichungen im Text gearbeitet werden. Eine entscheidende Phase der Lösungsfindung ist das Erkennen der gesuchten Breite als kürzeste Entfernung des Schnittpunktes von der gegebenen Standlinie. Die Zeichnung des Dreiecks kann zusätzlich durch Üben mit dem Geodreieck (Winkel antragen, Lot fällen, Strecken messen) vorbereitet werden. Beim Schließen von den gemessenen Werten auf die Realsituation sollten Schülerinnen und Schüler angehalten werden, ihr Ergebnis (unter Beachtung des gewählten Maßstabes) an der Realsituation zu überprüfen. Modellierungsanlässe sollten durch echte Realsituationen herbeigeführt werden (Freilandgeometrie – arbeiten mit dem Försterdreieck und Theodolit). Die Präsentation der Vorgehensweise ermöglicht auch die Beschreibung des Modellierungskreislaufs, bei dem auf die Bedeutung der Validierung der Ergebnisse eingegangen werden sollte (vgl. /1/, S. 40 ff).

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, suchen eigenständig Realsituationen, die Modellierungsanlässe bieten und präsentieren diese den Mitschülerinnen und Mitschülern (Höhe des Turms, Breite des Gebäudes hinter einem See usw.).